Министерство образования и науки РФ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

ВЕСТНИК

НИЖЕГОРОДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

№ 4

Часть 2

Нижний Новгород
Издательство Нижегородского госуниверситета
2011

ББК С
УДК 5+3
В 38

В 38 **Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.** № 4 Часть 2. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. – 594 с.

Выходит 6 раз в год

ББК С

Электронная версия журнала:
http//www.unn.ru/?file=vestniki_journals

Ministry of Education and Science of the Russian Federation

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod

VESTNIK

OF LOBACHEVSKY STATE UNIVERSITY OF NIZHNI NOVGOROD

№ 4

Part 2

Nizhni Novgorod
Nizhni Novgorod University Press
2011

Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod. No. 4. Part 2. – Nizhni Novgorod: Nizhni Novgorod University Press, 2011. – 594 pp.

The journal appears six times a year

Electronic version of the journal can be found at:
http//www.unn.ru/?file=vestniki_journals

Российский Национальный комитет по теоретической и прикладной механике
совместно: с Институтом механики МГУ им. М.В. Ломоносова,
Институтом проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
Нижегородским государственным университетом им. Н.И. Лобачевского,
при участии: Российского федерального ядерного центра – ВНИИ экспериментальной физики,
Нижегородского научного центра РАН,
ОКБ машиностроения им. И.И. Африкантова,
Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева
провели 24–30 августа 2011 года в г. Нижнем Новгороде

X ВСЕРОССИЙСКИЙ СЪЕЗД ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ ПРОБЛЕМАМ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ.

В рамках съезда проведены Вторая Всероссийская школа молодых ученых-механиков и собрание Российского Национального комитета по теоретической и прикладной механике.
На основании материалов съезда подготовлены научные статьи настоящего выпуска Вестника.

ОРГКОМИТЕТ СЪЕЗДА

Г.Г. Черный – *председатель*, Л.А. Игумнов, В.А. Полянский – *заместители председателя*;
С.Ю. Литвинчук, И.Л. Панкратьева – *ученые секретари*

Члены бюро оргкомитета

В.А. Бабешко, И.Г. Горячева, С.М. Дмитриев, В.Ф. Журавлев, Д.Л. Зверев, Д.М. Климов, В.В. Козлов, В.Е. Костюков, А.Г. Куликовский, В.А. Левин, И.И. Липатов, А.Г. Литвак, Е.В. Ломакин, Г.А. Любимов, В.П. Матвеенко, Г.К. Михайлов, Н.Ф. Морозов, Ю.С. Осипов, С.Я. Степанов, В.М. Фомин, В.Е. Фортов, Ф.Л. Черноусько, Е.В. Чупрунов

Члены оргкомитета

Л.Д. Акуленко, И.М. Ананьевский, Б.Д. Аннин, В.А. Антонец, Н.А. Анфимов, В.Г. Баженов, Д.В. Баландин, Н.В. Баничук, О.М. Белоцерковский, А.Н. Богданов, В.Н. Болотник, А.М. Брагов, В.Н. Бранец, А.А. Буренин, Р.А. Васин, А.Б. Ватажин, В.М. Волков, Р.Ф. Ганиев, Р.В. Гольдштейн, А.Н. Голубятников, Н.В. Дерендяев, В.И. Ерофеев, Д.А. Индейцев, В.В. Калинчук, С.А. Капустин, А.В. Карапетян, Ю.С. Качанов, В.Н. Комаров, К.Г. Корнев, Ю.Г. Коротких, В.Л. Котов, А.В. Кочетков, А.Н. Крайко, Н.Н. Красовский, В.Н. Кукуджанов, А.М. Липанов, А.К. Ломунов, А.К. Любимов, А.В. Манжиров, А.П. Маркеев, Ю.Г. Мартыненко, Н.А. Махутов, О.Э. Мельник, Е.Е. Мешков, А.Л. Михайлов, А.А. Мовчан, В.Я. Нейланд, Р.И. Нигматулин, Н.В. Никитин, В.В. Новиков, Л.В. Овсянников, А.Н. Осипцов, В.Е. Панин, В.М. Пашин, В.Н. Перевезенцев, А.Г. Петров, Ю.В. Петров, С.Г. Псахье, В.В. Пухначев, А.К. Ребров, С.А. Решмин, Ю.А. Рыжов, В.В. Сидоренко, Л.В. Смирнов, А.Н. Супрун, Д.В. Тарлаковский, В.М. Титов, А.К. Цатурян, В.Н. Чувильдеев,

X ВСЕРОССИЙСКИЙ СЪЕЗД ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ ПРОБЛЕМАМ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

Съезд по теоретической и прикладной механике – значимое научное мероприятие в области механики, проводимое в стране раз в 5 лет. Данный съезд является юбилейным, десятым, он проходит в Нижнем Новгороде с 24 по 30 августа 2011 года. В работе съезда принимают участие около 1500 участников, среди которых ведущие ученые-механики России, а также приглашенные ученые из других стран. На съезде представлены для обсуждения результаты научных исследований по наиболее актуальным и важным проблемам, связанным с разработкой научных основ при создании космической и авиационной техники, с решением проблем энергетики, строительства и транспорта, оборонного комплекса, с исследованием природных и техногенных процессов, теории управления, механики новых материалов и нанотехнологий, биомеханики и многих других.

Современная механика – это вечно новая и важнейшая фундаментальная наука со своими подходами к решению сложных проблем с использованием теоретических и экспериментальных методов, а также методов численного моделирования, которые непосредственно связаны с построением математических моделей реальных явлений и объектов. Данные модели, как правило, носят универсальный характер и могут быть использованы для прогнозирования возможных ситуаций, предсказания нежелательных явлений и предотвращения катастроф. Механика – это не только наука, имеющая выдающиеся исторические достижения, но и быстроразвивающаяся наука, позволяющая описывать поведение новых объектов, явлений и материалов с учетом широкого спектра их свойств и возможных процессов, результаты научных исследований которых направлены на решение многих актуальных и жизненно важных проблем.

Практически все механизмы, которые двигаются и работают на земле и под землей, которые перемещаются по воде и под водой, в воздушном и безвоздушном пространстве, все наземные и подземные сооружения, а также механизмы, с помощью которых они созданы, основаны на решениях проблем, которыми занимается наука механика. Без развития механики абсолютно невозможно использование достижений многих других естественных наук, и эта взаимосвязь с другими науками чрезвычайно плодотворна. Различного рода техногенные катастрофы во многих случаях связаны с ошибками проектирования вследствие недостаточного знания законов механики, этому есть много примеров разрушения мостов, зданий, конструкций и других сооружений.

Механика внесла неоценимый вклад в создание ракетной техники и космонавтику. На основе решения сложнейших задач с использованием присущих ей методов механика способствовала созданию систем вывода на орбиту искусственных спутников Земли и других космических аппаратов.

С помощью подходов механики успешно описываются процессы, происходящие в мантии Земли. Методы механики используются для изучения процессов, определяющих динамику извержения вулканов, и оценки параметров вулканических систем, не поддающихся непосредственному измерению, позволяющих прогнозировать возможные последствия извержений.

Механики занимаются решением проблем атомной энергетики, в частности корпус реактора рассчитывается методами механики с учетом длительной службы реактора и влияния мощного потока излучаемых атомным топливом частиц на механические свойства материалов.

Одним из выдающихся достижений механики является создание инерциальных гироскопических систем навигации высокой точности. Разработка систем управления непосредственно связана с созданием различного рода робототехнических систем.

Другая важная область механики связана с экспериментальным изучением и теоретическим описанием взаимодействия газовых потоков с поверхностями твердых тел. В частности, одна из задач механики заключается в исследовании химического взаимодействия газа с твердыми поверхностями, что также является примером взаимосвязи механики с другими науками. Неоценимы достижения механики в создании сверхзвуковых летательных аппаратов и двигателей.

Большой раздел механики связан с исследованием свойств новых конструкционных материалов как с использованием феноменологического подхода, так и с учетом физических процессов, сопровождающих процесс деформирования материалов. Одна из наиболее важных проблем связана с изучением основных закономерностей разрушения материалов, сооружений и конструкций, их многостадийности и многомасштабности, а также формулировкой соответствующих критериев прочности. Данная проблема усложняется наличием различного рода неоднородностей материалов, что относится и к композиционным материалам, но эта проблема успешно решается с помощью подходов механики. Одно из важнейших направлений механики состоит в изучении поверхностных эффектов, определяющих как прочность всего тела, так и характеристики трения и износа поверхности. Это направление носит название трибологии. Законы механики используются при описании поведения биологических объектов, а также при создании новой медицинской аппаратуры.

Достижениями ученых-механиков и инженеров пользуется человечество во всем мире в каждый момент своего существования. Очень трудно перечислить все направления исследований, развитием которых занимаются ученые-механики. Такие сведения можно почерпнуть из публикуемых сообщений, представленных на X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики.

Г.Г. Черный,
академик РАН

Е.В. Ломакин,
член-корреспондент РАН

СОДЕРЖАНИЕ

Общая и прикладная механика

Мезо-, нано-, биомеханика и механика природных процессов

CONTENTS

General and applied mechanics

Meso- and nanomechanics, biomechanics and mechanics of natural processes

ОБЩАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

УДК 539.3

О ПАМЯТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ТЕОРИИ ГИБКИХ ПЛАСТИН

Я. Аврейцевич[1], *Е.Ю. Крылова*[2], *И.В. Папкова*[2], *Т.В. Яковлева*[2], *В.А. Крысько*[2]

[1]Технический университет, Лодзь (Польша)
[2]Саратовский государственный технический университет

Kat.ktylova@bk.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Впервые исследуется нелинейная динамика гибких прямоугольных в плане пластин под действием внешней сдвиговой знакопеременной нагрузки. Анализ характера колебаний производится с помощью качественной теории дифференциальных уравнений и нелинейной динамики. Впервые для механических систем выявлено, что смена характера колебаний происходит с некоторой задержкой по времени.

Ключевые слова: нелинейные колебания, диссипативные системы, пластины, фурье-анализ, вейвлет-анализ, сдвиговая знакопеременная нагрузка.

Основные уравнения

В рамках нелинейной классической теории рассмотрим пластину на прямоугольном плане с постоянной жесткостью и плотностью при действии знакопеременного внешнего сдвигового давления $S = s_0 \sin \omega_p t$, где ω_p, s_0 – частота и амплитуда внешнего воздействия соответственно.

Исходными являются уравнения теории пологих оболочек [1, 2] в безразмерном виде:

$$\frac{1}{12(1-\mu^2)}(\nabla_\lambda{}^4 w) - L(w,F) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \varepsilon\frac{\partial w}{\partial t} -$$

$$-q(x_1, x_2, t) + 2S\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\nabla_\lambda{}^4 F + \frac{1}{2}L(w,w) = 0, \qquad (1)$$

где w и F – функция прогиба и усилия.

К уравнениям (1) присоединим граничные условия:

$$w=0;\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}=0;\quad F=0;\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1{}^2}=0 \text{ при } x_1=0;1,$$

$$w=0;\quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}=0;\quad F=0;\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2{}^2}=0 \text{ при } x_2=0;1,$$

и начальные условия

$$w(x_1, x_2)\,|_{t=0} = 0,\quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

Полученные системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных сводятся к системам обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений методом конечных разностей с аппроксимацией $O(h^2)$ по пространственным переменным. Система обыкновенных дифференциальных уравнений по времени решается методом Рунге – Кутта четвертого порядка.

Анализ полученных результатов

Рассмотрим пластину под действием внешней сдвиговой знакопеременной нагрузки, заданной в виде $S = s_0 \sin \omega_p t$.

При изучении колебаний системы при различных вариантах управляющих параметров нагрузки в произвольной точке пластины строились: сигнал, фазовый и модальные портреты в трехмерной постановке, спектр мощности, поверхности и линии равных прогибов, автокорреляционные функции; вычислялись изменения знака старшего показателя Ляпунова. Впервые введено понятие модального портрета, характеризующего изменение во времени произвольной точки поверхности пластины с помощью прогиба, первой и второй производной по пространственным координатам. Данная характеристика необходима для исследования перехода поверхности пластины в состояние хаоса, т.е. для изучения пространственно-временного хаоса. Было установлено, что поведение пластины вне зоны хаотических колебаний характеризуется симметрией линий равных прогибов и четким периодом по времени в сигнале и поверхностях.

Исследуем поведение пластины под действием нагрузки с параметрами $s_0 = 8.4$ и $\omega_p = 26$. Вейвлет-спектр Морле (рис. 1) и сигнал позволяют увидеть, что частотные характеристики колебаний системы на разных интервалах времени существенно отличаются.

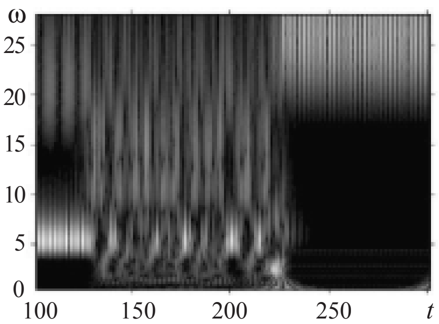


Рис. 1

Происходит потеря устойчивости системы не только при изменении некоторых управляющих параметров, но и при их фиксированных значениях с течением времени. При исследовании поведения пластины с помощью вейвлет-анализа было выявлено три временных интервала: $t \in [50; 56]$, $t \in [130; 225]$, $t \in [230; 286]$, где характер ее колебаний различен, т.е. наблюдается перемежаемость по времени. На рис. 2 приведены: линии равных прогибов в различные моменты времени, модальные портреты, спектры мощности Фурье, сигналы для центральной точки пластины на соответствующих интервалах времени.

На первом временном интервале (рис. 2*а*), колебания системы происходят на двух частотах, это квазипериодические колебания. Частота возбуждения затухла, но появились две независимые частоты. При рассмотрении эволюции поверхностей и линий равных прогибов с течением времени четко видна диагональная симметрия и присутствует период по времени.

Далее следует продолжительная по времени зона пространственно-временного хаоса (рис. 2*б*), о чем свидетельствуют хаотические пятна на модальных и фазовых портретах, сигнал и положительность Ляпуновских показателей. При изучении этой области выяснилось, что в начале хаотического окна (рис. 2*б*, *А*) на линиях равных прогибов не наблюдается симметрии, хотя память о ее недавнем присутствии еще сохраняется. В центре интервала симметрия полностью нарушается (рис. 2*б*, *В*, *С*).

На последнем интервале сигнал соответствует гармоническим колебаниям (рис. 2*в*), что подтверждают все характеристики. Поверхности и линии равных прогибов лишь на конце рассматриваемого интервала соответствуют по-

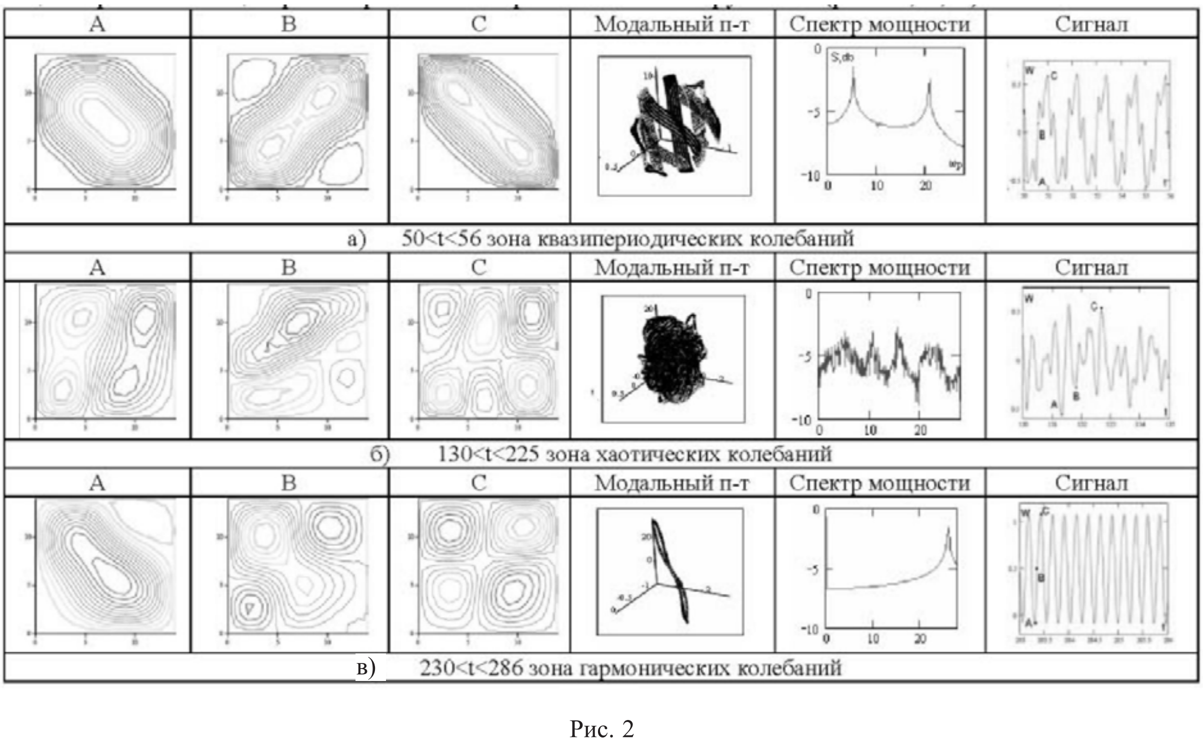


Рис. 2

ведению пластины в условиях гармонических колебаний при данных параметрах нагрузки, т.е., несмотря на то, что колебания пластины идут на одной частоте – частоте внешней возбуждающей силы, характер изгибания пластины не мгновенно становится гармоническим, для этого требуется некоторое время. Так, характер изгибания пластины становится идентичен гармоническому лишь начиная с $t = 284$.

Таким образом, можно сделать вывод, что поведение пластины под действием сдвиговой знакопеременной сжимающей нагрузки устанавливается не сразу, эффект, накопленный в зонах хаоса, гасится лишь с течением времени. Чем больше окно предшествующих хаотических колебаний, тем дольше сглаживается память о нем. То же можно сказать и о переходе системы в состояние хаоса. Необходимо некоторое время для установления хаотического характера изгибания пластины после зон квазипериодических колебаний.

Итак, при смене характера колебаний пластины под действием внешней сдвиговой знакопеременной нагрузки впервые в нелинейных механических системах обнаружена некоторая временная задержка, т.е. память системы.

Список литературы

1. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1956. 420 с.

2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.:, Наука, 1972. 432 с.

ON THE MEMORY OF DIFFERENTIAL SYSTEMS IN THE THEORY OF FLEXIBLE PLATES

J. Awrejcewicz, E.Yu. Krylova, I.V. Papkova, T.V. Yakovleva, V.A. Krysko

Nonlinear dynamics of flexible rectangular plates under an external shearing sign-alternating load is studied for the first time.

The character of the oscillations is analyzed using a qualitative theory of differential equations and nonlinear dynamics. For the first time, for mechanical systems, it has been discovered that changing of the oscillation character occurs with some time delay.

Keywords: nonlinear oscillations, dissipative systems, plates, Fourier's analysis, wavelets analysis, shearing alternating load.

УДК 521.1:629.19

К ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ МЕХАНИКИ КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА

В.Г. Адамян

Гюмрийский филиал Государственного инженерного университета (Армения)

vgadamyan@mail.ru

Поступила в редакцию 15.05.2011

Изложены разработанные геометрические теории гравитации и межорбитальных котангенциальных переходов космического аппарата. Предложен геометрический подход, который позволяет произвести анализ орбитальных переходов, воспроизвести движение космического аппарата и получить точное решение задачи оптимизации перелета между заданными орбитами по расходу топлива.

Ключевые слова: орбита, баллистика, небесная механика, алгоритм, компланарный переход, космический аппарат, маневр.

Трудно скрыть ностальгию по той ушедшей эре, когда в механике царила наглядность, а формальные аспекты были на втором плане. В 1687 году Исаак Ньютон опубликовал свою книгу «Математические начала натуральной философии» [1], значение которой для механики сложно переоценить. В четвертом разделе первой книги «Начала» он предлагал применить алгоритм Евклида об определении конических сечений в задачах движения материальных тел. И хотя Ньютон был одним из создателей дифференциального и интегрального исчисления, в «Началах» он избегал его применений. Каждое из сформулированных им утверждений он обосновывал при помощи геометрических приемов, считая, что в противном случае его «Начала» перестали бы быть строгими. Но без оснований сегодня многие считают, что Ньютон занимался решением этих вопросов из чисто геометрического интереса и что будто эта часть «Начала» не имеет значения для сколько-нибудь существенного развития науки о небесной механике. Многие ученые считают также, что Ньютон был просто вынужден изобрести дифференцирование и интегрирование, чтобы иметь возможность развивать механику.

В монографии [2], развивая геометрические идеи Ньютона, предложен геометрический подход к решению проблемы движения в поле гравитационных сил и выведены все необходимые следствия закона всемирного тяготения. Алгоритм Евклида позволил построить геометрический аппарат, который при решении задач механики заменил аппарат математического анализа, и вывести все признанные законы механики. Созданная модель позволила изучить, интерпретировать и прогнозиривать факты и явления, а также воспроизводить их, что представляется особенно ценным. Каждое рассуждение сопровождается разработкой соответствующего геометрического алгоритма, который освещает механическую задачу, придавая ей присущую геометрическим понятиям наглядность. Разработанные геометрические алгоритмы однозначно выражают связь между данным и последующим состояниями движущегося материального тела, т.е. позволяют на основе знания значений физических величин в некоторой исходной точке траектории определить значения этих величин в любой другой точке траектории.

При разработке алгоритма движения материальной точки были исключены из рассмотрения физические величины, имеющие размерности скорости, ускорения, силы, времени и массы. Одним из полезных свойств предложенного алгоритма является исключение времени как независимой переменной. Очевидно, что для полного решения задачи необходимо определить время и другие физические величины, которые в работе устанавливаются через геометрические характеристики движения.

Перевод физических понятий на язык геометрии позволил нам выдать эти понятия и решить механические задачи, исходя только из геометрических соображений, предвидеть окончательные результаты почти без вычислений.

Предложенная схема стала решающим доказательством того, что природа построена на основе геометрических принципов. Благодаря использованию геометрических методов, удалось определить многие характерные особенности исследуемых процессов и явлений гравитации, которые не столь заметны при аналитическом исследовании.

Созданная в [2] теория оказалось столь сильной, что позволила с единой точки зрения подойти к разрешению самых разнообразных задач небесной механики и баллистики и получить ряд новых результатов, имеющих научное и практическое значение. Следует отметить, что все задачи решаются построениями, вытекающими из исследуемых явлений, с использованием исключительно прямых и окружностей – единственных линий, применяемых в элементарной геометрии. При решении всех задач проявляются такие положительные качества, как доступность, простота, возможность оперативного изменения параметров решаемой задачи и точность полученных результатов.

В монографии [3] исследуются геометрические закономерности двухимпульсных котангенциальных переходов между произвольно ориентированными компланарными орбитами в рамках созданной в [2] теории гравитации. Такие задачи возникают в случае, когда достижения поставленной цели требуют перехода космического аппарата на другую, более подходящую орбиту. Математическая задача, возникающая при этом, заключается в том, чтобы заранее определить, какие именно и когда надо сообщить аппарату дополнительные импульсы, чтобы его орбита изменилась желательным образом.

Группа котангенциальных переходов, хотя и образует лишь частный случай всех переходов, важна для практики маневрирования в космосе. Следует отметить, что в небесной механике не существует общих стандартных приемов, необходимых для исследования всевозможных котангенциальных переходов. Полученные результаты позволяют строить более простую модель движения космического аппарата при котангенциальном переходе между компланарными орбитами, которая выделяет существенные факторы движения и с успехом может быть использована в механике космического полета. Разработан общий метод исследования, основанный на замене траектории котангенциального перехода ее эксцентром, сопряженным с эксцентрами заданных орбит. Эксцентр – это окружность, построенная на большой оси эллипса или на действительной оси гиперболы как на диаметре. Для параболы эксцентр является ее вершинной касательной. Разработанные в [2, 3] геометрические алгоритмы действуют с равной эффективностью при всевозможных видах, размерах и расположении заданных орбит, выявляют наглядное содержание исследуемых задач и дают возможность увидеть геометрические начала во многих явлениях природы.

Параметры траектории котангенциального перехода и значения импульсов скоростей, управляющих движением космического аппарата при переходе, определяются в явном виде и зависят от параметров заданных орбит и истинной аномалии точки приложения первого импульса скорости [4].

Исследования ученых показали, что при оптимальном переходе между заданными компланарными орбитами по расходу топлива не требуется изменения направления движения в точках приложения импульсов скоростей [5–8]. Но условие соприкасания переходной орбиты с заданными компланарными орбитами является только условием локальной оптимальности. Это означает, что оптимальную орбиту перелета между заданными орбитами нужно искать в семействе котангенциальных переходных орбит.

Предлагается точный метод нахождения оптимальной переходной орбиты, позволяющий интуитивный подбор различных переходных орбит и их сравнение по затратам топлива, характерного для вариационного подхода, заменить общим алгоритмом для определения семейства котангенциальных переходных орбит. Это означает, что среди огромного множества котангенциальных переходных орбит выбирается единственная, которая наилучшим образом отвечает требованиям поставленной задачи. Этот подход позволяет произвести анализ орбитальных переходов в условиях, близких к реальным, воспроизвести на чертеже движение космического аппарата и получить точное теоретическое решение задачи оптимизации перелета между заданными орбитами по расходу топлива. Известными методами небесной механики эти задачи решаются с использованием трудоемких вычислительных процедур, часто приближенно [5–8].

Список литературы

1. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989. 688 с.
2. Адамян В.Г. Альмагест – 2. Геометрическая теория гравитации. Ереван: ГАСПРИНТ, 2004. 224 с.
3. Адамян В.Г. Геометрическая теория межорбитальных котангенциальных переходов. Ереван: Авторское издание, 2007. 152 с.
4. Адамян В.Г.и др. Двухимпульсные котангенциальные переходы между компланарными эллипти-

ческими орбитами // Прикладная математика и механика. 2009. №6. С. 921–933.

5. Аппазов Р.Ф., Сытин О.Г. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. М.: Наука, 1987. 440 с.

6. Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г., Ярославский В.А. Маневрирование космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1970. 416 с.

7. Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической новигации. М.: Мир, 1966. 152 с.

8. Эрике К. Космический полет. Т. 2. М.: Наука, 1970. 744 с.

ON THE GEOMETRICAL THEORY OF MOTION IN THE PROBLEM OF SPACE FLIGHT MECHANICS OF TWO COSMIC BODIES

V.G. Adamyan

Newly-developed geometric theories of gravitation and inter-orbital transfers of spacecraft are presented. A geometric approach is introduced, which permits to analyze orbital transfers, to reproduce the motion of spacecraft and to obtain an exact solution of the problem of optimization of fuel expense when flying from one orbit to another.

Keywords: orbit, ballistics, celestial mechanics, algorithm, coplanar transfer, spacecraft, maneuver.

УДК 531.01; 531.19

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНЫХ ФОРМ НИТИ В ОКРЕСТНОСТИ СПУТНИКА НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

С.Ф. Адлай

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва

SemjonAdlaj@gmail.com

Поступила в редакцию 16.05.2011

Исследуется устойчивость равновесных относительно орбитальной системы координат форм абсолютно гибкой нерастяжимой однородной нити в окрестности спутника на круговой орбите. Ранее автором была завершена классификация указанных равновесных форм, а ее итоги представлены в докладе на XI Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления».

Ключевые слова: орбита, баллистика, небесная механика, алгоритм, компланарный переход, космический аппарат, маневр.

Введем ортогональную орбитальную систему координат $Oxyz$ с началом O в центре масс спутника, движущегося по круговой орбите. Направим ось Oz вдоль радиуса-вектора, исходящего из центра Земли к центру масс спутника, ось Ox – по направлению движения спутника, а ось Oy – по нормали к плоскости орбиты так, дабы упорядоченная тройка единичных векторов репера $Oxyz$ оказалась правой. Суммарный потенциал u гравитационных и центробежных сил в точке (x, y, z) в спутниковом приближении не зависит от координаты x и имеет вид [1]:

$$u(x,y,z) = 2^{-1}\omega^2(y^2 - 3z^2),$$

где ω – угловая скорость орбитального движения, предполагаемая постоянной.

Конфигурации нити с закрепленными концами в орбитальной системе координат оказываются плоскими в трех взаимно перпендикулярных плоскостях: в плоскости орбиты, в плоскости, ортогональной радиусу-вектору спутника, и в плоскости, ортогональной направлению орбитального движения. В частности, формы равновесия в плоскости орбиты задаются графиками однопараметрического семейства эллиптического синуса. Такие формы равновесия были впервые указаны Аппелем в качестве примера бесконечного счетного числа решений задачи о равновесии нити, концы которой прикрепляются к оси, силы отталкивания от которой пропорциональны произведению длины элемента нити на его расстояние до указанной оси [2].

Условия устойчивости равновесных форм в линейном параллельном поле сил

Пожарицкий указал в [3], что лишь одно решение из бесконечного множества решений, полученных Аппелем, задачи о равновесии нити с фиксированными концами на оси, силы отталкивания от которой пропорциональны расстоянию, является устойчивым, а именно, решение с минимальным числом полуволн, то есть решение с одной полуволной. В общей постановке, когда точки закрепления не обязаны лежать на оси исчезновения сил, вводим фазы начальной и конечной точки, то есть абсциссы начальной и конечной точки относительно полупериода. Когда начальная точка пробегает первую полуволну, а конечная – вторую, их фазы параметризуют поверхность, вложенную в трехмерное пространство, соответствующую отображению пары фаз в тройку, которая соответствует отношениям трех длин к разнице абсцисс между начальной и конечной точками, а именно высоты начальной точки, высоты конечной точки и расстояния между начальной и конечной точками. Такая параметризованная поверхность, отвечающая центральному значению параметра $\alpha = 1/\sqrt{2}$ [4], изображена на рис. 1. Данная поверхность содержит сингулярность – зонтик Уитни [5], не разрушающуюся при ее шевелении (то есть при изменении параметра α). Исследование огибающей поверхности при изменении параметра α является ключевым не только для изучения устойчивости в линейном

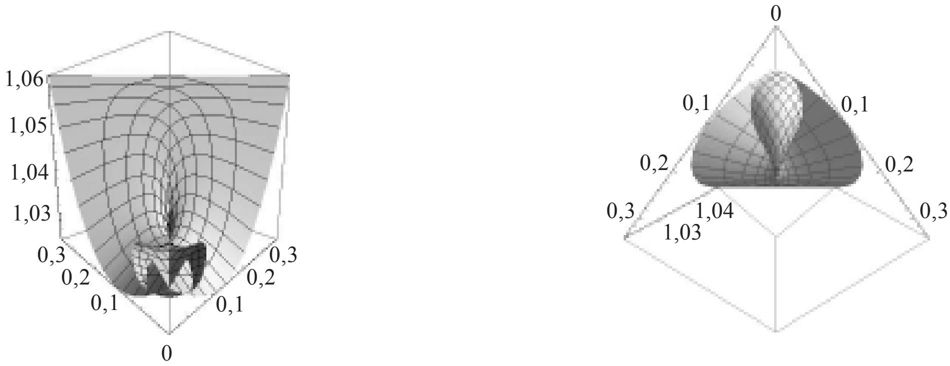


Рис. 1

параллельном поле сил, но и для последующего ее общего исследования в окрестности спутника на круговой орбите.

Условия устойчивости равновесных форм общего положения в окрестности спутника на круговой орбите

В общем случае форма равновесия нити определяется натурально-параметризованной пространственной кривой с ненулевым кручением, кручение кривой в каждой точке определяется однозначно координатами точки и направлением касательного вектора. Оказывается, что для таких пространственных кривых, кручение которых обращается в нуль на дискретном множестве, выполнено усиленное условие Лежандра. Таким образом, усиленное условие Якоби оказывается достаточным условием устойчивости равновесных форм общего положения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 11-01-00751-а.

Список литературы

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
2. Аппель П. Теоретическая механика / Пер. с фр. И.Г. Малкина. В 2-х т. М.: ГИФМЛ, 1960.
3. Пожарицкий Г.К. Устойчивость равновесий механических систем, включающих гибкую нерастяжимую нить // Прикладная математика и механика. 1973. Т. 37, № 4.
4. Adlaj S. Tether equilibria in a linear parallel force field // 4th International Young Researchers Workshop on Geometry, Mechanics and Control. Ghent, Belgium, January 11–13, 2010. http://www.wgmc.ugent.be/adlaj.pdf (23 pages).
5. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Редакция журнала «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

INVESTIGATION OF STABILITY OF TETHER EQUILIBRIA IN PROXIMITY TO A CIRCULARLY ORBITING SATELLITE

S.F. Adlaj

The stability of equilibria of an absolutely flexible non stretchable homogeneous tether in proximity to a circularly orbiting satellite is investigated. Previously, a classification of such equilibria was obtained by the author and presented on the XI International Conference «Stability and oscillations of nonlinear control systems» in the paper «Equilibrium of a flexible non-stretchable tether in proximity to a circularly orbiting satellite», June 3, 2010.

Keywords: orbital coordinate system, absolutely flexible non-stretchable homogeneous tether, equilibrium, stability.

УДК 531.38

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ СКАЧКОВ В ИЗМЕРИТЕЛЯХ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ БИНС

П.А. Акимов, А.И. Матасов

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

alexander.matasov@gmail.com

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматривается задача выявления скачков в показаниях датчиков угловой скорости бесплатформенных инерциальных навигационных систем. Решение этой задачи основано на методе наименьших модулей. Строятся оценки уровней неоптимальности приближенных решений, полученных при помощи метода наименьших модулей.

Ключевые слова: метод наименьших модулей, инерциальные навигационные системы, динамические задачи оценивания, уровни неоптимальности.

Задача оценивания

Бесплатформенные инерциальные навигационные системы (БИНС) предназначены для определения местоположения, скорости и ориентации движущегося объекта при помощи инерциальных датчиков – акселерометров и гироскопов. Акселерометры позволяют получить информацию об ускорениях фиксированной точки объекта, а гироскопические устройства – об угловой скорости вращения носителя БИНС. Совместная обработка этих данных позволяет решить задачу навигации. При этом особую важность приобретает задача калибровки – определения систематических составляющих погрешностей инерциальных датчиков. Обычно смещения нуля и прочие параметрические погрешности на достаточно длительных отрезках времени меняются несущественно и могут быть определены с необходимой точностью при помощи калибровки. Однако нередко в показаниях гироскопов происходят одномоментные невозвратные изменения (скачки) на величину, значительно превосходящую средний уровень шумов. Данное явление не позволяет провести надежную калибровку инерциальной системы, поэтому важно выявлять моменты и величины подобных скачков. Общепринятые способы обработки сигналов основаны на идеях калмановской теории оценивания (методе наименьших квадратов). Как показывают численные эксперименты, эти методы не всегда позволяют достаточно точно определить скачки в погрешностях датчиков угловой скорости, так как дают слишком «размытую» оценку. Предлагается новый подход к обработке сигналов БИНС при стендовых испытаниях, основанный методе наименьших модулей (l_1-аппроксимации), который позволяет получить более контрастную оценку скачков. Ранее подобная методика применялась в статических проблемах оценивания и показала свою эффективность. В навигационных задачах, имеющих дело с динамическими системами, и, следовательно, большими массивами измерений и неизвестных параметров, указанные методы не использовались.

Задача идентификации сбоев может быть сформулирована в виде проблемы оценивания параметров состояния динамической системы по измерениям координат, скоростей и углов ориентации, получаемым из вычислителя БИНС, в совокупности с аналогичной стендовой информацией. Построение дискретной динамической системы для соответствующей задачи оценивания производится на основе уравнений ошибок БИНС [1]. Фазовый вектор в этой системе описывает ошибки в определении координат, скоростей и углов ориентации системы, а также погрешности инерциальных датчиков.

Решение проблемы оценивания состоит в минимизации функционала, представляющего собой сумму l_1-норм векторов невязок (то есть сумму модулей их компонент), соответствующих априорной информации, неточностям динамической модели и уравнениям для измерений [2]:

$$I_0 = \min_{x \in \mathbf{R}^N} \sum_{i=1}^{M} p_i \, | y_i - \Phi_i^T x | \text{ при ограничениях}$$

$$\Psi_j^T x - v_j = 0, \quad j = 1,\dots,L \quad (\Phi_i, \Psi_j \in \mathbf{R}^N). \quad (1)$$

В качестве неизвестных переменных выступают значения векторов состояния и возмущений динамической системы для всего интервала времени, на котором производились измерения. Ограничения в (1) описывают динамику модели. Подчеркнем, что в рассматриваемой постановке решается задача сглаживания; при этом она ставится в рамках детерминированного подхода: каких-либо предположений о вероятностных характеристиках шумов не делается.

Алгоритмы решения и уровни неоптимальности

Можно указать два метода численного решения проблемы l_1-аппроксимации (1). Первый из них основан на сведении ее к эквивалентной задаче линейного программирования, которая может быть решена стандартными алгоритмами, например симплекс-методом или методом внутренней точки [3]. При необходимости обрабатывать массивы информации, соответствующие длительным процессам измерений, данный подход не всегда эффективен, поскольку требует привлечения больших объемов памяти компьютера.

Второй подход состоит в переходе к проблеме безусловной оптимизации, т.е. к классической задаче метода наименьших модулей:

$$I_0 = \min_{q \in \mathbf{R}^n} I(q), \quad I(q) = \sum_{i=1}^{\nu} |z_i - H_i^T q|. \quad (2)$$

Одним из способов численного решения задачи (2) является алгоритм Вейсфельда [4]. Идея этого алгоритма состоит в решении последовательности задач взвешенного метода наименьших квадратов:

$$q^k = \arg\min_{q \in \mathbf{R}^n} \sum_{i=1}^{\nu} W_i^{k-1} (z_i - H_i^T q)^2,$$

весовые коэффициенты W_i^{k-1} в которых зависят от результатов предыдущих шагов. Получаемый на каждой итерации вектор q^k может рассматриваться как приближенное решение исходной задачи метода наименьших модулей. Данный метод дает возможность решать задачи с весьма большим количеством неизвестных параметров (порядка 10 000).

Алгоритм Вейсфельда позволяет найти лишь приближенное решение задачи (2), поэтому важным является вопрос оценки качества этого решения. Одной из характеристик качества приближения может служить уровень неоптимальности: $\Delta = I(q^k)/I_0$. В статье [5] показано, как при помощи теории двойственности выпуклых вариационных задач построить оценки сверху для уровня неоптимальности текущей итерации. Если эти оценки достаточно близки к 1, то $I(q^k)$ и I_0 тоже мало отличаются и q^k можно взять в качестве удачного приближенного решения проблемы (2).

В результате численных экспериментов подтверждена эффективность метода наименьших модулей при идентификации скачков в показаниях датчиков угловой скорости (и, при необходимости, акселерометров). При этом установлено важное преимущество описанного подхода по сравнению с широко применяемым на практике методом наименьших квадратов. Предложенные алгоритмы, в том числе использующие оценки уровней неоптимальности, дают возможность с необходимой точностью решать задачи оценивания при помощи метода наименьших модулей в случае большого количества измерений и неизвестных параметров. Таким образом, представлена математическая формализация задачи идентификации скачков и разработаны соответствующие методы численного решения, обладающие высокой эффективностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследова-ний (проект № 11-08-00004).

Список литературы

1. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Ч. I. Математические модели инерциальной навигации. М.: МГУ, 2010.

2. Акимов П.А., Матасов А.И. // Автоматика и телемеханика. 2011. №2. С. 9–24.

3. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004.

4. Мудров В.И., Кушко В.Л. Методы обработки измерений: квазиправдоподобные оценки. М.: Радио и связь, 1983.

5. Акимов П.А., Матасов А.И. // Автоматика и телемеханика. 2010. №2. С. 4–16.

THE LEAST ABSOLUTE DEVIATIONS METHOD FOR THE IDENTIFICATION OF JUMPS IN ANGULAR VELOCITY SENSORS OF SDINS

P.A. Akimov, A.I. Matasov

The work is devoted to the detection of jumps in the signals of the angular velocity sensors (gyroscopes) of strapdown inertial navigation system (SDINS). The solution for this problem is based on the least absolute deviation method. Non-optimality levels are constructed for approximate solutions that are obtained by the least absolute deviation method.

Keywords: least absolute deviations method, inertial navigation systems, state estimation for dynamic systems, non-optimality levels.

УДК 539.3:534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДЕФЕКТОВ НА СПЕКТРЫ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕЙ

Л.Д. Акуленко, С.В. Нестеров

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

gavrikov@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Изучаются частоты и формы продольных колебаний стержней, имеющих дефекты (инерционные, геометрические, жесткостные и др.), с целью их диагностики. Теоретическим аппаратом являются методы прямой задачи Штурма – Лиувилля и ее высокоточное решение (метод ускоренной сходимости). Излагаются результаты анализа множественных численно-аналитических и физических экспериментов для разных типов дефектов и мест локализации, а также мод колебаний. На их основе введен эффективный критерий поврежденности. Установлены качественные особенности и возможности определения дефектов (решения обратной задачи). Показано, что при наличии нескольких дефектов колебания существенно усложняются. Решение обратной задачи известными методами затруднено.

Ключевые слова: прямолинейный стержень, дефект, собственные частоты, формы, резонансный метод, динамическое взвешивание.

Имеется ряд работ, в которых исследуется влияние различных неоднородностей (инерционных, геометрических, жесткостных дефектов) на спектры собственных частот как продольных, так и поперечных колебаний стержней. В этих работах дефекты моделируются наиболее простыми способами, позволяющими привести задачу нахождения спектров к тем или иным вариантам алгебраических систем, определяющим спектр собственных частот. Недостатками этих работ являются именно конструкция (упрощенная форма) дефектов, доступных математическому описанию, малое количество сопоставлений теоретических и экспериментальных результатов, а также отсутствие указаний на то, какие требования должны предъявляться к экспериментам, в частности к используемым образцам и измерительной аппаратуре.

Рассматриваются спектры и формы продольных колебаний стрежней, имеющих дефекты, которые моделируются специальным образом.

Основным математическим инструментом является задача Штурма – Лиувилля с краевыми условиями второго рода (условия Неймана)

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+\lambda r(x)u=0,\quad u'(0)=u'(1)=0 \qquad (1)$$

для продольных колебаний стрежня, где λ – безразмерное собственное число, пропорциональное квадрату собственной частоты, u – форма колебаний.

Была введена математическая классификация дефектов:

1. «Инерционные дефекты»

$$r(x)=1+\sum_{k=1}^{N} f_k(x),$$

где $f_k(x)$ – функции, локализованные в окрестности точек b_k; при этом принимается $p(x) = 1$.

2. «Упругие дефекты»

$$p(x)=1+\sum_{k=1}^{N} f_k(x),$$

где $f_k(x)$ – функции, локализованные в окрестности точек b_k; при этом принимается $r(x) = 1$.

3. «Дефекты поперечного сечения»

$$S(x)=S_0\left(1+\sum_{k=1}^{N} f_k(x)\right),$$

$$r(x)=p(x)=S_0\left(1+\sum_{k=1}^{N} f_k(x)\right).$$

Рассмотрим случай продольных колебаний, который проще реализуется в эксперименте. Краевая задача (1) решается методом ускоренной сходимости, определяется влияние одиночных дефектов всех трех типов на собственные частоты. Получены зависимости собственных частот и форм колебаний от параметров дефектов. Произведено сопоставление теоретических и экспериментальных результатов, которые были получены на установке резонансного типа, специально сконструированной для этих исследований.

Дополнительным результатом теоретических и экспериментальных исследований является получение возможности динамического определения масс образцов твердых и упругих тел: 1) геометрически малых элементов, соединенных с колеблющимся стержнем; 2) стержней большой протяженности с неизвестной массой при заданной массе элементов. Относительная погрешность определения массы посредством «динамического взвешивания» составляет величину порядка 0.5%. Теоретически установлено, что в условиях малой гравитации (невесомости) или движения несущего тела с существенно изменяющимся ускорением предложенный метод является адекватным способом определения массы.

Установлено также, что экспериментально определяется «дефект упругости» при его расположении в узловой точке колебаний.

Основные результаты исследований:

1. Разности собственных частот стрежня, имеющего дефекты, и частот стержня без дефектов в зависимости от положения дефекта имеют осцилляционный характер.

2. При наличии нескольких дефектов между этими осцилляциями происходит интерференция. Осцилляции могут либо усиливаться, либо ослабляться.

3. Формы колебаний стрежня с дефектами практически не отличаются от форм колебаний стержня без дефекта. В окрестности расположения «дефектов упругости» или поперечного сечения производная $\partial u/\partial x$ имеет весьма большие значения и соответственно возникают большие локальные напряжения.

4. Если имеются несколько дефектов, то при высоких частотах наблюдается своеобразное разделение колебаний различных участков стержня, ограниченных точками положения дефектов.

5. Наибольшие расхождения между теорией и экспериментом имеются в случае множественных «дефектов поперечного сечения». Как правило, экспериментально наблюдаются мультиплеты продольных колебаний и одновременно возбуждаются поперечные и крутильные колебания. Это объясняется тем, что при таких дефектах нарушается симметрия колеблющегося стержня.

INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF DEFECTS ON THE NATURAL FREQUENCY SPECTRUM AND VIBRATION SHAPES OF RODS

L.D. Akulenko, S.V. Nesterov

The eigenfrequencies and shapes of longitudinal vibrations of rods that have defects of various kinds (inertial, geometric, stiffness, etc.) are studied with the aim of detecting these defects. This study is based on the direct Sturm-Liouville problem and an accelerated convergence method for obtaining a high-accuracy solution to it. Numerous computational (numerical-analytical) and physical experiments are analyzed for defects of various types, places of their localization, and vibration modes. On the basis of this analysis, an effective criterion for detecting a damaged state was introduced. Qualitative features of the defects and the possibilities for identifying them on the basis of solving the inverse problem were established. It was shown that the vibrations become substantially more complex for several defects. The solution of the inverse problem by means of conventional methods is complicated.

Keywords: straight rod, defect, natural frequencies, vibration shapes, resonant technique, dynamic weighing.

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЙ СПУТНИКА С ДВУХСТЕПЕННЫМ СИЛОВЫМ ГИРОСКОПОМ НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

Н.И. Амелькин

Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный

namelkin@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

На основе теоремы Барбашина – Красовского разработана методика, позволяющая по характеру вековой устойчивости и усеченным уравнениям линейного приближения делать заключение о характере устойчивости по Ляпунову положений равновесия автономных систем с частичной диссипацией. Методика использована для исследования положений равновесия спутника, несущего двухстепенной силовой гироскоп с диссипацией в оси рамки, на круговой орбите.

Ключевые слова: спутник, силовой гироскопа, положения равновесия, вековая устойчивость, устойчивость по Ляпунову.

1. Методика исследования устойчивости систем с частичной диссипацией

Рассматривается автономная система, положение которой задается $(n + m)$-мерным вектором обобщенных координат q, где $q^T = (y^T, x^T)$, $y^T = (y_1, ..., y_n)$, $x^T = (x_1, ..., x_m)$. Предполагается, что известна функция $V(q,\dot{q})$, для которой в силу уравнений движения выполняется условие $\dot{V} \le 0$, причем диссипация действует только по координатам $x_1, ..., x_N$, т.е.

$$\dot{V} < 0 \text{ при } \dot{x} \neq 0 \text{ и } \dot{V} = 0 \text{ при } \dot{x} = 0. \quad (1)$$

Обозначив через z и u векторы $z^T = (\dot{q}^T, q^T)$, $u^T = (\dot{y}^T, y^T)$, запишем уравнения движения системы в виде, разрешенном относительно старших производных:

$$\dot{u} = f(u, \dot{x}, x), \quad \ddot{x} = \varphi(u, \dot{x}, x). \quad (2)$$

Здесь f и φ – вектор-функции фазовых переменных размерности $N = 2n$ и m соответственно.

По теореме Барбашина – Красовского, если в малой окрестности положения равновесия $z = 0$ $(u = 0, x = 0)$ нет целых траекторий $z^0(t) \not\equiv 0$, удовлетворяющих условию $\dot{V}(z^0(t)) \equiv 0$, то в случае вековой устойчивости (V имеет строгий локальный минимум в точке $z = 0$) оно асимптотически устойчиво, а в случае вековой неустойчивости (V не имеет минимума в точке $z = 0$) – неустойчиво по Ляпунову.

В силу (1) для отсутствия в окрестности точки $z = 0$ целых траекторий $z^0(t) \not\equiv 0$ необходимо и достаточно, чтобы в этой окрестности получаемая из (2) при $\dot{x} \equiv 0$ система уравнений

$$\dot{u} = f(u, 0, x), \quad 0 = \varphi(u, 0, x) \quad (3)$$

имела только тривиальное решение $u \equiv 0$, $x \equiv 0$. Система (3) представляет собой переопределенную систему дифференциальных уравнений относительно переменных u, а переменные x могут принимать только фиксированные значения, т.е. выступают в роли параметров.

Система, получаемая линеаризацией уравнений (3) в окрестности положения равновесия, записывается в виде

$$\dot{u} = \mathbf{A}^T u + \mathbf{B}x, \quad \mathbf{P}^T u + \mathbf{C}x = 0, \quad (4)$$

где матрицы выражаются через производные от функций f и φ в точке $u = 0$, $x = 0$ формулами

$$\mathbf{A}^T = \partial f / \partial u^T, \quad \mathbf{B} = \partial f / \partial x^T, \qquad \mathbf{P}^T = \partial \varphi / \partial u^T, \quad \mathbf{C} = \partial \varphi / \partial x^T. \quad (5)$$

Теорема 1. *Для отсутствия нетривиальных решений системы* (3) *в окрестности положения равновесия* $u = 0$, $x = 0$ *достаточно выполнения условий*

$$d = \det \begin{Vmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{B} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{C} \end{Vmatrix} \neq 0, \quad g = \det(\mathbf{G}\mathbf{G}^T) \neq 0; \qquad \mathbf{G} = \|\mathbf{P} \;\; \mathbf{AP} \;\; \mathbf{A}^2\mathbf{P} \;\; \ldots \;\; \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{P}\|. \quad (6)$$

Первое из условий (6) означает отсутствие в окрестности рассматриваемой точки других положений равновесия линейной системы (4). Второе из условий (6) означает, что переопределенная система

$$\dot{u} = \mathbf{A}^T u, \quad \mathbf{P}^T u = 0, \quad (7)$$

получаемая из уравнений (4) при $x \equiv 0$, имеет только тривиальное решение $u \equiv 0$.

2. Анализ устойчивости равновесий спутника, несущего двухстепенной силовой гироскоп с диссипацией в оси рамки

Для спутника, несущего двухстепенной силовой гироскоп, положения равновесия на круговой орбите соответствуют стационарным точкам измененной потенциальной энергии

$$W = 3\mathbf{r}^T \mathbf{J}\mathbf{r}/2 - \mathbf{n}^T \mathbf{J}\mathbf{n}/2 - \mathbf{n}^T \mathbf{H} + c(x - x^0)^2/2;$$
$$\mathbf{H} = \widetilde{\mathbf{H}}/\omega_0, \quad c = \widetilde{c}/\omega_0^2 \tag{8}$$

и определяются решениями системы уравнений [1, 2]

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{J}\mathbf{n}+\mathbf{H})=3\mathbf{r}\times\mathbf{J}\mathbf{r}, \quad \mathbf{s}^T(\mathbf{n}\times\mathbf{H})+c(x-x_0)=0, \tag{9}$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$ – орты орбитального базиса, направленные по радиусу орбиты и по нормали к плоскости орбиты соответственно, $\widetilde{\mathbf{H}}$ – собственный кинетический момент вращения ротора, ω_0 – угловая скорость орбитального базиса, $\mathbf{s}$ – орт оси прецессии гироскопа, $\widetilde{c}$ – коэффициент жесткости пружины, x – угол прецессии гироскопа, $\mathbf{J}$ – тензор инерции спутника. При наличии строгого локального минимума функции (8) положение равновесия устойчиво, а при отсутствии минимума – неустойчиво в вековом смысле.

Линеаризованные уравнения движения в окрестности положения равновесия записываются в виде [3]:

$$\begin{gathered}\mathbf{J}\mathbf{U}' + I\mathbf{s}x'' + \mathbf{s}\times(\mathbf{H} - I\mathbf{n})x' + \mathbf{n}\times(\mathbf{s}\times\mathbf{H})x = \\ = \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{f}(\psi), \\ I(\mathbf{s}^T\mathbf{U}' + x'') = (\mathbf{s}\times\mathbf{H})^T\mathbf{U} - \mu x' - (\mathbf{n}^T\mathbf{H} + c)x, \\ \psi' = \mathbf{U} + \psi\times\mathbf{n}.\end{gathered} \tag{10}$$

Здесь штрихом обозначены производные по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$, x – отклонение угла прецессии от его значения в положении равновесия, $\boldsymbol{\psi}$ – вектор малого поворота корпуса спутника, I – момент инерции гироскопа относительно оси $\mathbf{s}$, $\mu = \widetilde{\mu}/\omega_0$, где $\widetilde{\mu}$ – коэффициент демпфирования, а функции $\mathbf{f}(\boldsymbol{\psi})$ и $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ определяются формулами

$$\begin{gathered}\mathbf{f}(\psi) = 3[(\mathbf{r}\times\psi)\times\mathbf{J}\mathbf{r} + \mathbf{r}\times\mathbf{J}(\mathbf{r}\times\psi)], \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}) = -\mathbf{U}\times(\mathbf{J}\mathbf{n} + \mathbf{H}) - \mathbf{n}\times\mathbf{J}\mathbf{U}.\end{gathered} \tag{11}$$

При $x \equiv 0$ система (10) принимает вид

$$\begin{gathered}\mathbf{J}\mathbf{U}' = \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{f}(\psi), \quad \psi' = \mathbf{U} + \psi\times\mathbf{n}, \\ I\mathbf{s}^T\mathbf{U}' = (\mathbf{s}\times\mathbf{H})^T\mathbf{U}\end{gathered} \tag{12}$$

и представляет собой переопределенную систему из семи скалярных дифференциальных уравнений для шести переменных $\boldsymbol{\psi}$, $\mathbf{U}$. В силу теоремы 1, для отсутствия в окрестности изолированного положения равновесия целых траекторий $z^0(t)$ нелинейной системы достаточно, чтобы усеченная линеаризованная система (12) имела только тривиальное решение $\boldsymbol{\psi} \equiv 0$, $\mathbf{U} \equiv 0$.

В [1–3] проведено исследование положений равновесия спутника с двухстепенным силовым гироскопом для случая, когда ось прецессии гироскопа параллельна одной из главных центральных осей инерции спутника, и для динамически симметричного спутника при произвольном расположении оси прецессии. Изучена зависимость положений равновесия от величины кинетического момента ротора и определен характер их вековой устойчивости. При наличии диссипации в оси рамки гироскопа на основе теоремы 1 (по результатам исследования решений системы (12)) определен характер устойчивости по Ляпунову всех положений равновесия за исключением точек, соответствующих отдельным значениям величины кинетического момента ротора.

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации в рамках контрактов с Минобрнауки России № 13.G25.31.0028 и № 14.740.11.0149.

Список литературы

1. Амелькин Н.И. О стационарных движениях спутника с двухстепенным силовым гироскопом в центральном гравитационном поле и их устойчивости // ПММ. 2009. №2. С. 236–249.

2. Амелькин Н.И. О равновесиях и устойчивости динамически симметричного спутника с двухстепенным силовым гироскопом // ПММ. 2010. Т. 74, № 5. С. 718–733.

3. Амелькин Н.И. Анализ устойчивости равновесий спутника, несущего двухстепенной силовой гироскоп с диссипацией в оси рамки // ПММ. 2010. Т. 74, №4. С. 567–581.

ON THE STABILITY OF EQUILIBRIUMS OF A SATELLITE WITH A TWO-DEGREE-OF-FREEDOM POWERED GYROSCOPE ON A CIRCULAR ORBIT

N.I. Amelkin

Based on Barbashin – Krasovsky theorem, a technique is developed that allows making conclusions about the nature of Lyapunov stability of equilibriums of autonomous systems with partial dissipation on the basis of the character of secular stability and truncated equations of linear approximation. Technique was used to study equilibriums of a satellite carrying a two-degree-of-freedom powered gyroscope on a circular orbit.

Keywords: satellite, powered gyroscope, equilibriums, secular stability, Lyapunov stability.

УДК 531.36; 62-50

ПРИВЕДЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В ЗАДАННОЕ СОСТОЯНИЕ

И.М. Ананьевский

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

anan@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматриваются нелинейные лагранжевы механические системы с неопределенными параметрами, подверженные действию управляющих сил и неизвестных возмущений. Развивается подход к построению управления в виде обратной связи, позволяющий приводить систему из произвольного начального состояния в заданное терминальное состояние за конечное время с помощью ограниченного управления.

Ключевые слова: лагранжева система, неопределенные параметры, ограниченное управление, конечное время движения.

Введение

На практике нередко возникают задачи управления различными объектами в условиях неполноты информации о самих объектах и характеристиках окружающей среды. В частности, могут быть неизвестны массо-инерционные параметры механической системы, присутствовать неконтролируемые возмущения и т.п. В последние годы для решения таких задач разработаны алгоритмы управления, позволяющие приводить систему в заданное терминальное состояние за конечное время, не нарушая наложенных на управляющие воздействия ограничений [1–3]. Эти алгоритмы применимы к склерономным механическим системам, у которых число степеней свободы равно размерности вектора управляющих сил, и в предположении, что управляющие силы превосходят по величине все прочие силы, действующие на систему. В статье развивается подход, предложенный в [4, 5]. Показано, что этот подход применим для решения задач управления механическими системами с дефицитом управления, а также в предположении малости управляющих воздействий по сравнению с другими известными силами, действующими на систему.

Управление реономной механической системой

Рассмотрим общий случай реономной механической системы с кинетической энергией, заданной в форме полного квадратичного полинома, коэффициенты которого явным образом зависят от времени:

$$T(t,q,\dot q)=\frac{1}{2}\langle A(t,q)\dot q,\dot q\rangle+\langle a_1(t,q),\dot q\rangle+a_0(t,q). \quad (1)$$

Здесь $q, \dot q$ – векторы обобщенных координат и скоростей системы. Предполагается, что матрица кинетической энергии представима в виде

$$A(t,q)=A_0(t,q)+A_1(t,q),$$

где симметрическая матрица $A_0(t,q)$ положительно определена и известна, а $A_1(t,q)$ – неизвестная симметрическая матрица, причем матрица $A_1(t,q)$ считается в некотором смысле малой по сравнению с $A_0(t,q)$. Функция $a_0(t,q)$ и вектор-функция $a_1(t,q)$ предполагаются также неизвестными.

Динамика рассматриваемой системы подчиняется уравнениям Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q}-\frac{\partial T}{\partial q}=s+u. \quad (2)$$

Вектор неизвестных возмущений удовлетворяет условию

$$|s(t,q,\dot q)|\le S, \quad S>0.$$

Решается задача синтеза управления $u(t,q,\dot q)$, подчиняющегося ограничению

$$|u(t,q,\dot q)|\le U, \quad U>0, \quad (3)$$

и обеспечивающего приведение системы (1) в терминальное состояние покоя $q=0$, $\dot q=0$ за конечное время (время процесса заранее не фиксировано). При этом фазовые координаты и скорости считаются доступными измерению в каждый момент времени.

Определим управление в виде

$$u(t,q,\dot q)=-\alpha(t,q,\dot q)A_0(t,q)\dot q-\beta(t,q,\dot q)q, \quad (4)$$

где

$$\alpha(t,q,\dot q)=\sqrt{\frac{\beta(t,q,\dot q)}{M}},\quad \beta(t,q,\dot q)=\frac{3U^2}{32V(t,q,\dot q)},\quad (5)$$

$$V(t,q,\dot q)=\frac{1}{2}\langle A_0(t,q)\dot q,\dot q\rangle+\frac{1}{2}\beta(t,q,\dot q)q^2+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha(t,q,\dot q)\langle A_0(t,q)\dot q,q\rangle,\quad q^2+\dot q^2>0.\quad (6)$$

Соотношения (5), (6) задают функции $\alpha(t,q,\dot q)$, $\beta(t,q,\dot q)$ и $V(t,q,\dot q)$ неявно. Установлено, что в области $q^2+\dot q^2>0$ существуют непрерывно-дифференцируемые положительные функции $\alpha(t,q,\dot q)$, $\beta(t,q,\dot q)$ и $V(t,q,\dot q)$, удовлетворяющие этим соотношениям. Сформулированы и доказаны достаточные условия того, что управляющая функция (4) подчиняется ограничению (3) и решает сформулированную задачу.

Управление механической системой с помощью малых сил

Показано, что данный подход применим для управления механической системой с неопределенными параметрами в предположении, что на систему действуют потенциальные силы, превосходящие по величине управляющие силы.

С этой целью для некоторой «эталонной» системы с полностью известными параметрами строится «номинальная» траектория, ведущая в терминальное состояние. Затем с помощью процедуры отслеживания траектории исходная система приводится вдоль номинальной траектории в терминальное состояние. Подход оказывается эффективным применительно к системе уравнений в отклонениях и позволяет строить для нее закон управления, гарантирующий такое поведение исходной системы.

Результаты численного моделирования

Рассмотрена задача о приведении звеньев двузвенного манипулятора на подвижном основании в заданную конфигурацию. Предполагается, что массо-инерционные параметры двузвенника известны неточно, а основание движется по неизвестному закону.

Исследована также задача о выведении двузвенного маятника с неточно известными массо-инерционными параметрами в верхнее положение равновесия с помощью малых сил. Приведены результаты численного моделирования динамики этих систем.

Работа выполнена в рамках гранта поддержки ведущих научных школ (НШ-64817.2010.1) и при финансовой поддержке РФФИ (проекты 08-01-00234 и 08-01-00411).

Список литературы

1. Пятницкий Е. С. // ДАН СССР. 1988. Т. 300, №2. С. 300–303.

2. Черноусько Ф. Л. // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 179–171.

3. Решмин С. А., Черноусько Ф. Л. // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 1. С. 121–128.

4. Ананьевский И. М. // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 2. С. 163–178.

5. Ананьевский И. М. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. №3. С. 24–35.

STEERING OF UNCERTAIN MECHANICAL SYSTEMS TO A PRESCRIBED STATE

I.M. Ananievski

We consider a nonlinear Lagrangian mechanical system with uncertain parameters under the assumption that the system is subjected to control forces and unknown disturbances. An approach to designing bounded controls is proposed which enables one to steer the system to a prescribed terminal state in a finite time.

Keywords: Lagrangian system, uncertain parameters, bounded control, finite time of motion.

УДК 531.36

О СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.С. Андреев

Ульяновский госуниверситет

AndreevAS@ulsu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Излагаются новые методы решения задач о стабилизации движений нелинейных управляемых механических систем управлениями запаздывающего типа: с учетом конечного запаздывания в структуре обратной связи, ПИД-регуляторов и т.д.

Ключевые слова: стабилизация, запаздывающая обратная связь, механическая система, функционал Ляпунова, кусочно-непрерывное управление.

1. Основой разработки является развитие прямого метода Ляпунова в задаче управления системами, описываемыми функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, u). \tag{1}$$

Здесь $t \in R$, $x \in R^n$, R^n – n-мерное действительное векторное пространство с некоторой нормой $|x|$, $f = f(t, \varphi, u)$ – непрерывная векторная функция, определенная на множестве $R \times G \times R^m$, где $G \subset C$, C – банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \to R^n$ $(h > 0)$, с нормой $\|\varphi\| = \sup(|\varphi(s)|, -h \le s \le 0)$; либо $G \subset B$, B – допустимое пространство непрерывных функций $\varphi : (-\infty, 0] \to R^n$ [1], $u \in R^m$ – управление, R^m – m-мерное действительное векторное пространство с некоторой нормой $|u|$.

Будем для удобства полагать, что $f(t, 0, 0) = 0$, так что $u = 0$ соответствует заданное программное движение $x = 0$.

Для задачи синтеза управления системой (1), состоящей в определении управления $u \in U$, при котором невозмущенное движение $x = 0$ является равномерно асимптотически устойчивым (U – множество кусочно-непрерывных функций $u : R \times G \to R^m$, $u(t, 0) = 0$), эффективной оказывается следующая теорема типа достаточных условий асимптотической устойчивости из [2, 3].

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *могут быть найдены инвариантно дифференцируемый функционал* $V = V(t, \varphi)$ *и управление* $u^0 \in U$, *разрывные на множестве* $\{\Psi(t, \varphi) = 0\}$, *такие, что*:

1) $a_1(d_0(\varphi, \psi)) \le V(t, \varphi) \le a_2(\|\varphi\|), \dot{V}(t, \varphi) \le -W(t, \varphi) \le 0$;

2) *для каждой предельной к* (f^0, V, W), $f^0 = f(t, \psi, u^0(t, \psi))$, *совокупности* (F^*, V^*, W^*) *множество* $\{V^* > 0\} \cap \{W^* = 0\}$ *не содержит движений дифференциального включения* $\dot{x}(t) \in F^*(t, x_t)$.

Тогда управление $u = u(\varphi, \psi)$ *решает поставленную задачу*.

(Через $d_0(\varphi, \psi)$ в теореме 1 обозначена величина

$$d_0(\varphi, \psi) = \sup(|\varphi(0) - \psi(0)|, \forall \psi \in \Psi(t, \varphi)),$$

через a_1 и a_2 – функции типа Хана).

2. Исследуется задача о стабилизации программного движения голономной механической системы, сводящаяся к задаче о стабилизации положения равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы, описываемой уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + U,$$

где $T = T_2 + T_1 + T_0$ $(2T_2 = \dot{q}^T A(t, q)\dot{q}$, $T_1 = B^T(t, q)\dot{q}$, $T_0 = T_0(t, q))$ – кинетическая энергия возмущенного движения, Q и U – обобщенные естественные и управляющие силы.

Теорема 1 позволяет обосновать новые методы стабилизации невозмущенного движения $q = \dot{q} = 0$ посредством непрерывных и кусочно-непрерывных управлений вида

$$U = U(\dot{q}(t) + f(t, q_t)), \quad U = U(t, \dot{q}_t, q_t).$$

Полученные результаты развивают некоторые результаты, представленные в [4–6].

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (2.1.1/11180) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (НК-408П, госконтракт № П/2230).

Список литературы

1 Hale J.K., Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay // Funk. Ekv. 1978. V. 21. P. 11–41.

2 Андреев А.С. Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2005.

3 Павликов С.В. Метод функционалов Ляпунова в задачах устойчивости. Набережные Челны: Ин-т управления, 2006.

4 Пятницкий Е.С. Синтез иерархических систем управления механическими объектами на принципе декомпозиции. I и II // Автоматика и телемеханика. 1989. №1. С. 87–99; №2. С. 57–71.

5 Матюхин В.И. Универсальные законы управления механическими системами. М: МАКС Пресс, 2001. 252 с.

6 Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.

ON STABILIZATION OF CONTROLLED MECHANICAL SYSTEMS WITH DELAY

A.S. Andreev

New methods for solving the motion stabilization problem for nonlinear mechanical systems by use of delayed controls have been proposed with taking into account of finite delayed feedback, PID-regulators, etc.

Keywords: stabilization, delayed feedback, mechanical system, Lyapunov functional, piece-wise continuous control.

УДК 531

К ДИНАМИКЕ ТЕЛ, КОНТАКТИРУЮЩИХ ПРИ ДВИЖЕНИИ С ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТЬЮ

В.В. Андронов

МГТУ им. Н.Э.Баумана, Москва

andron33@.korolev-net.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Приводятся основные положения теории поликомпонентного сухого трения при контакте твердых тел с шероховатой опорной плоскостью. Обсуждаются различные возможности использования факта многомерности трения в современных технологиях. Обращается внимание на многомерный характер трения также и в случае точечного контакта и вытекающую отсюда неудовлетворительность исторически сложившейся традиции описания точечного контакта простым законом Кулона. Анализируется ряд задач динамики с качением при адекватном учете фрикционного взаимодействия.

Ключевые слова: сухое трение, закон Кулона, плоский и точечный контакт с трением, поликомпонентное трение, преобразованное трение, аппроксимации Паде.

О законе Кулона

Задачи динамики твердого тела, соприкасающегося с шероховатой плоскостью, можно разделить на задачи с плоским и с точечным (условно) контактом. И те и другие обычно рассматриваются в предположении, что характер взаимодействия тела с основанием в касательной плоскости подчиняются закону сухого трения Кулона. В его изначальном виде этот закон сформулирован для поступательного движения и записывается так:

$$F = -f\,Nv/|v|, \qquad (1)$$

где F – сила трения, препятствующая поступательному скольжению тела со скоростью v; f – коэффициент трения, N – модуль силы взаимодействия между телом и плоскостью по нормали к ней. При непоступательном характере скольжения написанный закон нарушается, однако его можно применять для малых участков площадки контакта в дифференциальной форме:

$$dF = -f\,\sigma(r)\frac{v_c(r)}{|v_c(r)|}dS. \qquad (2)$$

Здесь dF – сила трения, приходящаяся на элемент площадки контакта dS, r – радиус-вектор точки этого элемента, $\sigma(r)$ и $v_c(r)$ – нормальное давление на элемент и вектор его скорости скольжения.

Поликомпонентное кулоново трение

Приводя эту плоскую распределенную систему элементарных сил трения к началу отсчета векторов r и интегрируя по всей площадке контакта, получаем силу и пару сил – силу трения F и момент трения M. При заданном характере распределения $\sigma(r)$ эти величины, естественно, оказываются функциями кинематических параметров – поступательной v и угловой ω скоростей тела:

$$F = F(v, \omega), \quad M = M(v, \omega).$$

Эти функции, представленные их Паде-аппроксимациями, имеют следующий вид (R – характерный размер площадки контакта, a, b – постоянные) [1–4]:

$$F = (F_x, F_y) = -\frac{F_0(v_x, v_y)}{|v| + b\,|u|}, \quad M = -\frac{M_0 u}{|u| + a\,|v|}$$

$$\left(v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \neq 0,\ u = R\omega \neq 0\right). \qquad (3)$$

Так обстоит дело, если не учитывается трение качения. При учете трения качения появляются две новые фрикционные характеристики – проекции момента трения качения, так что в общем случае движения выпуклого тела трение характеризуется пятью скалярными компонентами.

О некоторых задачах с поликомпонентным сухим трением

Как видно из (3), все три компоненты трения (F_x, F_y, M) взаимосвязаны. Изменение одной из них вызывает изменение других. Осуществляя целенаправленное изменение (управление), можно сообщать движению тела желаемые свойства. Это обстоятельство находит применение в разнообразных приборах, технологических и транспортно-технологических машинах, в том числе устройствах с вибрационным принципом действия [4–6]. Часто динамической моделью процессов в таких устройствах служит тяжелое плоское твердое тело, расположенное на шероховатой наклонной плоскости с малым углом наклона к горизонту, а ход процесса отождествляется с движением тела вдоль этой плоскости в направлении малой скатывающей силы. Рассматривается цикл задач динамики в рамках этого направления в теории систем с сухим трением.

Другой тип рассмотренных задач относится к движению выпуклого тела (например, шара), когда контакт с плоскостью считается точечным. Однако реальные тела всегда соприкасаются по некоторой площадке, пусть и весьма малой, но конечной, поэтому феномен поликомпонентности трения остается действующим и при точечном контакте. Тогда из зависимости (3) следует, что при наличии верчения $(u \neq 0)$ сила трения покоя исчезает: $F(0,v)=0$. Вместе с этим исчезают и физические причины для неподвижности точки контакта. Следовательно, сухое кулоново трение не может служить причиной для возникновения неголономной связи. Неизбежно возникает скольжение. При этом зависимость для силы трения получается отличной от формулы (1), соответствующей закону Кулона в его простейшей форме, обычно применяемой в подобных задачах. Вследствие этого известный подход к учету трения в задачах качения требует переосмысления.

На это, кстати, указывают и далекие от действительности результаты решения некоторых известных задач, найденные при таком моделировании трения (постоянство скорости верчения в задаче о бильярдном шаре, весьма экзотические условия для придания шару криволинейной траектории [4] и многое другое). Пример такого несоответствия мы имеем в традиционном решении задачи о движении тяжелого шара по внутренней поверхности вертикального цилиндра, согласно которому очевидного систематического опускания шара не происходит – центр шара периодически возвращается в исходное положение. Но все становится на свои места, если трение описать адекватным образом, учитывая его поликомпонентный характер.

Исследование проведено совместно с В.Ф. Журавлевым.

Список литературы

1. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62, вып. 5. С. 762–767.

2. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задачах динамики твердых тел // Успехи механики. 2005. №3. С. 58–76.

3. Журавлев В.Ф. Динамика тяжелого однородного шара на шероховатой плоскости // МТТ. 2006. №6. С. 3–9.

4. Андронов В.В., Журавлев В.Ф. Сухое трение в задачах механики. М.-Ижевск: РХД, 2010. 184 с.

5. Андронов В.В. Механические системы с преобразованным сухим трением // МТТ. 1988. №1. С. 40–49.

6. Андронов В.В. Механика в лесоинженерном деле. М.: Изд-во Московс. гос. ун-та леса, 2000.176 с.

TO DYNAMICS OF BODIES BEING IN CONTACT WITH A ROUGH PLANE IN MOTION

V.V. Andronov

Basic propositions on the theory of multicomponent dry friction are presented. Distinctive possibilities of the using the fact of the friction multidimensionality in modern technologies are discussed. Special attention is given to the multidimensional character of the friction under conditions of point contact followed by inconsistency of its description using simple Coulomb's law. Some problems on rolling with adequate accounting of the friction are analyzed.

Keywords: dry friction, Coulomb's law, plane and point contact with friction, multicomponent friction, transformed friction, Pade-approximations.

УДК 681.5

КОЛЕБАНИЯ В ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЕ С ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ И ЗАПОМИНАНИЕМ СИГНАЛА УПРАВЛЕНИЯ

О.Г. Антоновская, В.И. Горюнов

НИИ прикладной математики и кибернетики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

olga.antonovsckaja@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.05.2011

Разрабатываются принципы создания систем управления автовращательными и автоколебательными процессами, обладающих не только простотой технической реализации, но и близостью к стратегии оптимального управления с разрывным характером управляющих воздействий при переходе от одних крайних значений к другим.

Ключевые слова: математическое моделирование, динамика систем, точечное отображение, неподвижная точка, устойчивость.

Известно, что одной из фундаментальных проблем прикладной механики является разработка систем управления автовращательными и автоколебательными процессами, обладающих не только простотой технической реализации, но и близостью к стратегии оптимального управления с разрывным характером управляющих воздействий при переходе от одних крайних значений к другим [1].

При использовании в качестве перестраиваемого параметра счетчика числа колебаний координаты управляемого объекта для создания динамически изменяющейся во времени последовательности импульсов и сравнения ее с периодической последовательностью эталонных импульсов возникает необходимость использования в цепи обратной связи системы управления астатизирующего звена, поскольку с его помощью можно закончить движение на многообразии, являющемся аналогом пластинки скользящих движений, реализуемой в автономных системах [2]. Наличие диссипации в системе с широтно-импульсной модуляцией, в отличие от автономного случая, приводит к появлению колебательных явлений в объекте регулирования. Последнее диктует необходимость детального анализа этого явления.

Рассмотрим с этой целью математическую модель (ММ) системы с широтно-импульсной модуляцией, предложенную в [3].

Безразмерные уравнения ММ с управляемой координатой x в произвольном периоде эталонных импульсов имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} + \mu x = u(\tau), \\ &\alpha\dot{\theta} = g(x(\tau)), \end{aligned} \quad (0 \le \theta \le 1,\ 0 \le \tau \le 1), \qquad (1)$$

где точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ, координата x – линейная, координаты τ и θ – циклические; $\alpha > 0$ – перестраиваемый параметр; $0 < \mu \ll 1$ – параметр диссипативных потерь; $g(x)$ – неубывающая положительная функция с условием нормировки $g(0) = 1$.

Кусочно-постоянная управляющая функция $u(\tau)$ может принимать одно из трех значений: +1, 0, −1. Нулевое значение $u(\tau)$ соответствует этапу хранения информации.

Поскольку управление $u(\tau)$ является кусочно-постоянной функцией времени, исследование динамики ММ сводится к анализу свойств траекторий в каждом из трех подпространств Π_1, Π_2, Π_3, в каждом из которых управление $u(\tau)$ принимает соответственно постоянное значение +1, 0, −1. Тогда условия перехода фазовой траектории из одного подпространства в другое соответствуют закону управления системой. Так, если в Π_1 фазовая траектория движения приходит с течением времени на сечение $\theta = 1$, то осуществляется при сохранении величины x переброс изображающей точки движения в Π_2, что соответствует переходу системы управления в режим запоминания информации. Из Π_2 переходы осуществляются либо в Π_1 (при $\tau = 1$), либо в Π_3 (при $\theta = 1$). Из Π_3 переход может осуществляться только в Π_2 (при $\tau = 1$). Таким образом, исследование условий существования и устойчивости регулярных движений сводится к анализу условий существования и устойчивости неподвижных точек соответствующих циклов точечных отображений различных сечений подпространств Π_i (i = 1, 2, 3).

Без потери общности рассуждений отметим, что при

$$1 \le \alpha \le 1 + S\mu^{-1} \tag{2}$$

и выполнении известных условий устойчивости [3] имеется двукратный цикл неподвижных точек с координатами в Π_1

$$\begin{gathered} x^* = (e^{-\mu(1-\tau^*)} - e^{-\mu})(\mu(1-e^{-\mu}))^{-1}, \\ \theta^* = \alpha^{-1}(1-\tau^* + S(1-e^{-\mu(1-\tau^*)}) \times \\ \times (1-e^{-\mu\tau^*}))(\mu^2(1-e^{-\mu}))^{-1}, \end{gathered} \tag{3}$$

и в Π_2

$$\begin{gathered} x^* = (1-e^{-\mu\tau^*})(\mu(1-e^{-\mu}))^{-1}, \\ \tau^* = \mu(\alpha-1)S^{-1}. \end{gathered} \tag{4}$$

Используя (3) и (4) в качестве начальных условий для траекторий системы (1) в каждом из подпространств Π_1 и Π_2, нетрудно удостовериться, что разница между величиной x^* в (3), (4) характеризует полный размах Δx^* колебаний режима управления. При $\mu \to 0$, $\Delta x^* \to 0$, но при этом в линейном приближении двукратный цикл приходит в пространстве параметров на колебательную границу устойчивости, так что приходится учитывать нелинейные свойства соответствующих точечных отображений [4].

При $\alpha > 1$ указанная ситуация с размахом колебаний и характером устойчивости сохраняется.

Таким образом, появление диссипации в системе управления, с одной стороны, обеспечивает устойчивость управления в линейном приближении, а с другой стороны, приводит к увеличению амплитуды колебаний регулируемой координаты. Но последнее означает, что в системах с широтно-импульсной модуляцией управляющего сигнала с переключениями в соответствии с числом и характером расположения импульсов необходимо на этапе запоминания использовать дополнительные механизмы регулирования величины фазового рассогласования импульсов.

Список литературы

1. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
3. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. // Вестник ННГУ. 2009. № 4. С. 141–145.
4. Антоновская О.Г., Горюнов В.И. // Вестник ННГУ. 2008. № 6. С. 135–140.

OSCILLATIONS IN DISSIPATIVE SYSTEM WITH WIDTH-PULSE MODULATION AND CONTROL SIGNAL STORAGE

O.G. Antonovskaya, V.I. Goryunov

This paper is devoted to working out the principles of the creation for auto-rotation and auto-oscillation processes control systems, which are not only simple for technical realization, but close to optimal control strategy with interrupted control force character when transiting from one set of extreme values to another.

Keywords: mathematical modeling, system dynamics, point mapping, fixed point, stability.

Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (2), с. 44–46

УДК 519.6

МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАНИПУЛЯТОРА НАВЕДЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО ТЕЛЕСКОПА «МИЛЛИМЕТРОН»

Ю.Н. Артеменко

Астрокосмический центр Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, Москва

Altishenko@yahoo.com

Поступила в редакцию 15.06.2011

Одной из важнейших проблем создания космической обсерватории «Миллиметрон» (проект «Спектр-М») является задача наведения раскрываемого телескопа диаметром 10–12 м с точностью до 0.3–0.1 угл. сек., усложняющаяся нежесткой гантелеобразной конструкцией КА с постоянно ориентированными на Солнце радиационными экранами для защиты телескопа от солнечного нагрева. Предлагается применить специальное многофункциональное устройство – манипулятор наведения, представляющий собой набор из нескольких одиночных гексаподов (платформа Гофа – Стюарта), работающих как единое целое устройство. Использование манипулятора наведения в проекте «Миллиметрон» позволяет обеспечить: выдвижение телескопа из транспортного положения в рабочее; наведение телескопа на любой пространственный угол в полусфере, ограниченной экранами системы радиационного охлаждения телескопа; сохранение неизменными положений центров масс телескопа и КА (или очень близких к ним) при наведении телескопа; ориентацию КА; снижение стабилизационных колебаний телескопа; разгрузку двигателей-маховиков КА и решить другие задачи. В результате предполагаемое устройство преобразовалось в трансформируемый многофункциональный космический робот-манипулятор для обеспечения навигационных задач орбитальной астрофизической обсерватории «Миллиметрон».

Ключевые слова: телескоп, космический робот-манипулятор наведения, гексапод, обсерватория «Миллиметрон».

Федеральной космической программой России предусматривается создание космической обсерватории «Миллиметрон» (проект «Спектр-М») с раскрываемым телескопом диаметром 10–12 м, работающим в диапазоне волн от 20 мкм до 20 мм. Особенностью телескопа является его охлаждение до 4 К, что обеспечит ему сверхвысокую чувствительность.

Проблемы с высокой точностью наведения телескопа и его стабилизации во время работы проявились из-за необходимости разнести на значительное расстояние между собой телескоп и служебный модуль, на котором размещаются двигатели коррекций и стабилизации и двигатели-маховики. Центр массы космического аппарата (КА) оказался посередине, а его положение сильно зависит от положения центра масс (ц.м.) телескопа при его поворотах, что сказывается на возможностях двигателей-маховиков парировать возникающие моменты при повороте телескопа и стабилизировать возникающие колебания.

Для наведения телескопа целесообразно использовать манипулятор, выполненный в виде многозвенного гексапода. Манипулятор вместе с телескопом при его повороте образуют маховик в гантелеобразной конструкции КА. Для исключения закрутки КА вокруг его осей поворот телескопа должен происходить вокруг неподвижного центра системы «телескоп-манипулятор», а следовательно неподвижного ц.м. КА. Возникающие моменты инерции должны гаситься двигателями-маховиками КА, установленными на служебном модуле, т.е. на другой стороне гантелеобразной конструкции КА. Особенностями манипулятора являются возможность контроля и изменения положения ц.м. телескопа и положения его оси, что обеспечивает высокоточное наведение телескопа, коррекцию высокоточного наведения телескопа при изменении ориентации КА в процессе наблюдений, выполнения режима сканирования телескопа, снижение стабилизационных колебаний телескопа и проводить разгрузку двигателей-маховиков КА.

Как следует из работ В.А. Глазунова, А.П. Карпенко, Ю.Т. Коганова и др., манипуляторы на основе гексапода имеют замкнутые кинематические цепи и воспринимают нагрузку как пространственные фермы. Штанги этих механизмов работают на растяжение-сжатие, что ведет к повышению жесткости всей конструкции и, как следствие, к повышению точности позиционирования и грузоподъемности механизмов.

Эти особенности гексаподов, используемые в манипуляторе наведения, обеспечивают более высокую жесткость манипулятора по сравнению с другими возможными механизмами с параллельной структурой и конструкциями космической обсерватории – рефлектором телескопа, опоры системы охлаждения (ОСО) теплозащитных экранов солнечных батарей.

Манипулятор наведения в процессе летной эксплуатации будет испытывать значительные нагрузки, вызванные моментами инерции телескопа, масса которого составляет около 2 тонн, при его поворотах, а также влиянием внутренних и внешних сил со стороны КА, вызванных поворотом связной антенны диаметром 1.5 м, коррекции орбиты КА и его ориентации, давления солнечного света на КА и вызванных всем этим стабилизационных колебаний КА.

Основным режимом работы манипулятора является режим программного наведения телескопа на любой пространственный угол в полусфере, ограниченной экранами системы радиационного охлаждения телескопа, вокруг неподвижного центра масс КТ.

При этом в массу телескопа, кроме рефлектора и криоконтейнера с научной аппаратурой, включается манипулятор и кабельная петля, проходящая внутри него. Положение оси телескопа определяется нормалью к плоскости верхнего гексапода манипулятора, проходящей через ее центр. Технологическое несовпадение оси с нормалью выявляется при юстировке телескопа в космосе и вводится в виде поправки в систему управления (СУ) манипулятора. Ось телескопа будет проходить через его ц.м. только при вертикальном положении манипулятора и нулевом угле поворота телескопа.

При любом другом угле поворота телескопа манипулятор будет изгибаться, а, следовательно, будет меняться положение его ц.м. Максимальное отклонение оси телескопа от его ц.м. будет достигаться при угле поворота 90^{o}. В общем случае при введении двух систем координат (СК) телескопа – одна базовая СК с центром в ц.м. телескопа, а другая – оптическая СК с центром в центре верхнего основания, расстояние между центрами обоих СК при поворотах телескопа будут меняться по всем трем координатам.

Приняв за основу неподвижность ц.м. при повороте телескопа, получим сложную траекторию перемещения центра верхнего основания гексапода, характеризующего ось телескопа. В этом случае для достижения оптимальности перемещений манипулятора из одного положения в другое (изменение углов наведения) все гексаподы манипулятора должны реализовать не только линейные, но и вращательные степени свободы.

Последний гексапод манипулятора (ближайший к телескопу) должен реализовать все 6 степеней свободы, включая поворот вокруг оси телескопа, так как это необходимо при юстировке телескопа для выявления систематических ошибок прецессии оси при стабилизационных колебаний телескопа, а также при сканировании телескопа и в режимах высокоточного наведения и стабилизации телескопа, когда будут задействованы пьезодвигатели, установленные наконечниками на стержни верхнего гексапода.

Имеется возможность складывания манипулятора в транспортное положение. Гексаподы для этого подходят лучше других механизмов с параллельной структурой. Из известных вариантов складывания гексаподов, например путем раздвижения сторон промежуточных треугольных оснований многозвенных манипуляторов, подходят только те, которые проходят по ограничению диаметра обтекателя РН. Диаметр манипулятора в сложенном состоянии не должен превышать 3 метров. А из условий жесткости конструкции крайние основания манипулятора составляют 3 метра в диаметре по центрам закрепленных на них шарниров, что определяется диаметром ОСО и криоконтейнера, и по 2 метра промежуточных оснований для обеспечения достаточного места внутри оснований диаметром не менее 1 м для прохождения кабельной петли и приспособлений ее крепления к манипулятору.

Количество звеньев манипулятора определилось из расчета и вышеперечисленных условий и оказалось равным пяти. В этом случае исключаются проявления интерференции отдельных кинематических цепей манипулятора, т.е. их соприкосновения и потери управляемости в некоторых конфигурациях манипулятора, и сохраняются качества гексаподов, о которых говорилось выше. Максимальная высота пятизвенного манипулятора достигается 9 метров, и он может реализовать все перечисленные режимы работы, как для 10-метрового телескопа, так и для 12-метрового.

Проблема задания движений манипулятора в обобщенных координатах, связанных со степенями подвижности манипулятора, решается современными вычислительными и программными средствами распределенного интеллектуального адаптивного управления на основе нейронных сетей.

Манипуляторы состоят из большого количества шарниров, двигателей, датчиков. У 5-звенного манипулятора количество стержней, двигателей и датчиков достигает 30 штук, количество шарниров составляет 60 штук. Для сравнения: у ОСО КТ «ММ» количество шарниров составляет 360 штук. Количество механизмов раскрытия с приводом – 4 штуки.

Повышение надежности электродвигателей в космической технике достигается за счет дублирования обмоток электродвигателя и подводящих цепей, что будет сделано и в манипуляторе. Кроме этого, манипулятор следует рассматривать не только как совокупность отдельных гексаподов и их систем управления, но и как распределенную интеллектуальную систему всех входящих элементов с адаптивным управлением на основе нейронных сетей. В этом случае отказ одного двигателя какого-то гексапода не приводит его к выходу из строя, а только к ограничению его возможностей и незначительному ухудшению работы всего манипулятора.

Преимущества системы наведения космического телескопа (КТ) на основе манипулятора заключаются в следующем:

1. Наведение КТ осуществляется одной системой.

2. На систему наведения возлагаются функции стабилизации телескопа, ориентации КА и разгрузки двигателей-маховиков КА.

3. Система обеспечивает увеличение наблюдательного времени КТ за счет повышения скорости наведения, сокращения времени стабилизации КТ, сокращения количества и времени разгрузки маховиков.

В результате проведенных исследований была достигнута поставленная цель – обеспечение поворота телескопа на любой пространственный угол при сохранении неизменным его центра массы.

Работа выполнена совместно с научными сотрудниками ИПМаш РАН А.Е. Городецким, В.В. Дубаренко и А.Ю. Кучминым в инициативном порядке.

MULTI-FUNCTIONAL APPLICATION OF THE MANIPULATOR OF DIRECTING OF THE SPACE TELESCOPE «MILLIMETRON»

Yu.N. Artemenko

One of the most important problems of the design of the space observatory «Millimetron» (the project «Spectrum - M») is the task of directing of opening telescope of the diameter 10-12 m with the accuracy up to 0.3–0.1". This task is aggravated by a non-rigid dumb-bell shaped construction of the space apparatus with radiation screens with permanent orientation to the Sun used for protecting the telescope from warming in the Sun. A special multi-functional device, a directing manipulator, is suggested which represents a set of several single hexapods (Gough – Stewart platform) working as a united complete devise. In the project «Millimetron», an application of the directing manipulator allows: transforming the telescope from transportation shape to the working one; directing the telescope to any spatial angle in the half-sphere limited by the screens of the radiation cooling of the telescope; maintaining a constant situation of the mass centre of the telescope and space apparatus (ore very closed to them) by directing the telescope; orientation of the space apparatus; decreasing stabilization oscillations of the telescope; decreasing the load of the actuators – hand-wheels of the space apparatus etc. As a result, the suggested devise is reshaped to transformable multi-functional space robot-manipulator for navigation tasks of the orbital astrophysical observatory «Millimetron».

Keywords: telescope, directing space robot-manipulator, hexapod, observatory «Millimetron**».**

УДК 531.383

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ СВОЙСТВ РЕЗОНАТОРА НА ДИНАМИКУ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА

С.В. Астахов, И.В. Меркурьев, В.В. Подалков

Московский энергетический институт (технический университет)

MerkuryevIV@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматриваются нелинейные эффекты волнового твердотельного гироскопа с резонатором в виде тонкой упругой оболочки вращения. Построена математическая модель свободных и вынужденных колебаний тонкого упругого резонатора, учитывающая влияние нелинейной упругости конструкционного материала. При помощи метода усреднения Крылова – Боголюбова исследована динамика резонатора в медленных переменных, измеряемых электронным контуром прибора. Показано, что нелинейные упругие свойства материала резонатора приводят к дополнительным погрешностям гироскопа, возникновению неустойчивых ветвей резонансных кривых и срыву колебаний.

Ключевые слова: волновой твердотельный гироскоп, резонанс, нелинейные колебания, погрешность гироскопа, точность, метод малого параметра.

Введение

Волновой твердотельный гироскоп (ВТГ) является одним из перспективных датчиков инерциальной информации, применяемых в составе навигационных систем подвижных объектов. В основе функционирования ВТГ лежит физический принцип, заключающийся в инертных свойствах упругих волн в осесимметричном твердом теле [1, 2]. Чувствительным элементом ВТГ является тонкий упругий осесимметричный резонатор, изготовленный из материала, обладающего малым коэффициентом потерь при колебаниях.

Основы теории волновых гироскопов были заложены в работе [2], исследование погрешностей таких гироскопов с различными формами колеблющегося резонатора выполнено в [3–6]. Было показано, что погрешности изготовления резонатора (переменная плотность, толщина, анизотропия упругих свойств материала и др.), нелинейность колебаний резонатора, изученная в [3, 5, 6], вызывают раздвоение собственной частоты изгибных колебаний, которое отражается на волновой картине колебаний резонатора и характеризует точность гироскопа.

Постановка задачи

Математические модели волновых твердотельных гироскопов используют различные уравнения теории распределенных упругих систем – оболочек и колец [3, 7, 8]. Линейная теория оболочек основана на допущении о бесконечной малости перемещений точек тела и линейной зависимости между напряжениями и деформациями тела. Как показано в [7], в основе закона Гука, выражающего в общей форме для любой точки тела связь между напряжениями и деформациями, лежат два различных процесса линеаризации, названные геометрической и физической линеаризацией.

С помощью линейной теории с достаточной точностью определяются основные характеристики колебательной системы: частота изгибных колебаний, масштабный коэффициент гироскопа и др. Однако в рамках линейной теории невозможно объяснить явления, наблюдаемые в ходе эксперимента: срыв колебаний, зависимость частоты колебаний от амплитуды колебаний, уходы гироскопа, вызванные малым расщеплением частоты колебаний.

Эти явления присущи нелинейным системам и могут быть объяснены дополнительными слагаемыми в модели движения, учитывающими конечные (нелинейные) деформации геометрической природы или нелинейную зависимость напряжений и деформаций тела от физических свойств конструкционного материала.

При выводе уравнений движения тонкого упругого резонатора учитывается физическая нелинейность упругих свойств материала. Влияние геометрической нелинейности колебаний резонатора исследовано в [3, 6].

Предполагается, что резонатор в виде оболочки вращения ограничен двумя параллелями или имеет форму купола. Условия на краях оболочки линейные и однородные. В этих предположениях задача исследования свободных колебаний резонатора допускает применение метода разделения переменных и сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Вектор перемещения $\mathbf{u}_k$ элемента резонатора представим в одномодовом приближении:

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k^{(1)}(s,\beta) f(t) + \mathbf{u}_k^{(2)}(s,\beta) g(t),$$

где k – номер основной формы колебаний; $f(t)$, $g(t)$ – искомые функции времени; $\mathbf{u}_k^{(j)}$ $(j=1, 2)$ – функции, имеющие для осесимметричного резонатора следующий вид:

$$\mathbf{u}_k^{(1)} = \| U_k(s)\cos k\beta,\ V_k(s)\sin k\beta,\ -W_k(s)\cos k\beta \|^T,$$

$$\mathbf{u}_k^{(2)} = \| -U_k(s)\sin k\beta,\ V_k(s)\cos k\beta,\ W_k(s)\cos k\beta \|^T,$$

где $U_k(s), V_k(s), W_k(s)$ – собственные формы свободных колебаний резонатора.

При вычислении потенциальной энергии упругой деформации тонкой оболочки вращения использованы нелинейные соотношения между напряжениями и деформациями элемента оболочки [7]. При этом в предположении малости колебаний резонатора использованы линейные выражения для деформации.

В результате вычислений получены нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие в одномодовом приближении изгибные колебания резонатора:

$$\begin{gathered} \ddot{f} + f = -\gamma\dot{f} + \nu\dot{g} + \xi(f^2 + g^2) f + u_0 \cos\mu\tau, \\ \ddot{g} + g = -\gamma\dot{g} - \nu\dot{g} + \xi(f^2 + g^2) g, \end{gathered} \tag{1}$$

где γ – нормализованный коэффициент демпфирования; ν – безразмерная угловая скорость основания гироскопа; ξ – параметр, характеризующий нелинейную упругость материала резонатора; u_0 – безразмерный параметр, характеризующий величину электрических сил, действующих на резонатор; μ – нормализованная частота мягкого резонансного возбуждения колебаний резонатора, точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ.

Заключение

Для исследования дифференциальных уравнений движения (1) в условиях медленного изменения параметров системы применены асимптотические методы осреднения. Получены дифференциальные уравнения для волновой картины колебаний резонатора в различных наборах медленных переменных [9]. Показано, что частота колебаний основной формы зависит от квадрата амплитуды колебаний и пропорциональна параметру, характеризующему нелинейные упругие свойства материала резонатора. Основное влияние нелинейные упругие свойства конструкционного материала оказывают на медленную прецессию волновой картины колебаний, характеризующую точность гироскопа.

Построены амплитудно-частотные характеристики стационарных колебаний резонатора ВТГ, позволяющие объяснить явления срыва колебаний резонатора и установить влияние нелинейных слагаемых в модели движения на точность гироскопа в режиме датчика угловой скорости и в интегрирующем режиме. Найдена зависимость амплитуд и фаз стационарных колебаний чувствительного элемента от параметров системы, построены области устойчивости стационарных режимов колебаний в пространстве параметров системы. Показано, что нелинейные упругие свойства материала резонатора приводят к дополнительным погрешностям гироскопа, возникновению неустойчивых ветвей резонансных кривых и срыву колебаний. Предложена методика идентификации параметров системы по измерениям медленных переменных в режиме свободных и вынужденных колебаний, опробованная на стендовых испытаниях опытных образцов гироскопов. Предложены алгоритмы измерения угловой скорости основания и настройки частоты внешнего воздействия, обеспечивающие увеличение полосы пропускания и повышение точности гироскопа.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-01-00756-а).

Список литературы

1. Bryan G.H. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell // Proc. Camb. Phil. Soc. Math. Phys Sci. 1890 V. 7. P. 101–111.

2. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. О динамических эффектах в упругом вращающемся кольце // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №5. С.17–24.

3. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.

4. Журавлев В.Ф. Теоретические основы волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) // Изв. РАН. МТТ. 1993. №3. С. 15–26.

5. Мартыненко Ю.Г., Меркурьев И.В., Подалков В.В. Управление нелинейными колебаниями вибрационного кольцевого микрогироскопа // Изв. РАН. МТТ. 2008. №3. С. 77–89.

6. Меркурьев И.В., Подалков В.В. Динамика волнового твердотельного и микромеханических гироскопов. М.: Физматлит, 2009. 228 с.

7. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Изд-во

иностр. лит., 1961. 777 с.

8. Филин А.П. Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1987. 384 с.

9. Журавлев В.Ф. О глобальных эволюциях состояния обобщенного маятника Фуко // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 6. С. 5–11.

THE INFLUENCE OF NONLINEAR ELASTIC PROPERTIES OF STRUCTURAL MATERIAL ON THE DYNAMICS OF WAVE SOLID-STATE GYROSCOPES

S.V. Astakhov, I.V. Merkuriev, V.V. Podalkov

The present paper studies the influence of nonlinear elastic properties of structural material on the dynamics of wave solid-state gyroscopes. The resonator is manufactured as a thin elastic hemispherical shell, which is mounted on a mobile basis. It is assumed that the elastic properties of the cavity material are nonlinear and obey Hooke's law. We obtained quasi-linear time-dependent system of differential equations, which describe the fluctuations of the sensor by two generalized coordinates. The study of this system is conducted in a quasi-linear formulation of the small-parameter method of Krylov – Bogolyubov. It is shown that the nonlinear elasticity properties of the resonator leads to the precession of the wave pattern of the resonator and introduces an additional error in the instrument.

Keywords: wave solid-state gyroscope, resonance, nonlinear oscillations, the error of the gyroscope, the accuracy of the method of small parameter.

Общая и прикладная механика
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (2), с. 50–51

УДК 62-50

НОВЫЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Д.В. Баландин[1]***, М.М. Коган***[2]

[1]Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского
[2]Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

dbalandin@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

С единых позиций на основе линейных матричных неравенств рассматривается и решается широкий круг задач управления, в том числе стабилизация неустойчивого объекта по состоянию и измеряемому выходу, модальное управление, оптимальное гашение внешних возмущений, управление с неточно известными начальными условиями объекта, управление с учетом ограничений на фазовые и управляющие переменные, управление в условиях неполной информации о параметрах системы. Приводятся примеры решения задач управления различными механическими системами.

Ключевые слова: динамическая система, оптимальное управление, стабилизация, оптимальное гашение внешних возмущений, ограничения на фазовые и управляющие переменные, линейные матричные неравенства.

Введение

Излагаются новые математические методы построения линейных обратных связей для динамических объектов, описываемых дифференциальными уравнениями. Цели синтеза – обеспечение асимптотической устойчивости системы, оптимизация переходного процесса в ней при фазовых и интегральных ограничениях, минимизация максимального значения нормы управляемого выхода при внешних возмущениях, восстановление и фильтрация неизмеряемых переменных по зашумленным измерениям других переменных и многие другие. Важно подчеркнуть, что во всех рассматриваемых задачах синтезируются обратные связи как по состоянию, если оно измеряется, так и по измеряемому выходу, если состояние объекта недоступно измерению. Другой существенной особенностью развиваемых методов является возможность их применения при наличии различного рода неопределенности: неизвестные начальные условия объекта, параметрическая, функциональная или даже динамическая неопределенность в математической модели объекта. В таких случаях синтезируемые обратные связи реализуют робастные регуляторы или фильтры, которые находятся на основе минимаксного подхода как решения вспомогательных дифференциальных игр. Кроме того, излагаемые методы позволяют синтезировать так называемые грубые обратные связи, которые обеспечивают выполнение той или иной цели в условиях возможных неконтролируемых изменений в известных пределах параметров самих обратных связей. В основе синтеза так или иначе лежит метод функций Ляпунова: цель формулируется в терминах квадратичной функции Ляпунова, а точнее, – в виде некоторого целевого матричного неравенства, в общем случае нелинейного относительно неизвестной матрицы функции Ляпунова и неизвестной матрицы параметров синтезируемой обратной связи. Применение аппарата линейных матричных неравенств, изложенного в монографии [1], позволяет синтезировать требуемую обратную связь, «разделяя переменные» в целевом неравенстве и приводя его к линейным матричным неравенствам, эффективно решаемым в пакете Matlab.

Основная идея синтеза

Основную идею синтеза продемонстрируем на решении задачи стабилизации. Рассмотрим управляемый объект

$$\dot{x} = Ax + Bu\,,$$

где x – состояние объекта, u – управление. Задача состоит в синтезе линейной обратной связи

$$u = \Theta\, x$$

такой, что замкнутая система

$$\dot{x} = (A + B\Theta)x$$

асимптотически устойчива. Согласно теореме Ляпунова, для этого необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $V(x) = x^T Y^{-1} x > 0$, производная от которой в силу системы отрицательно определена, т.е.

$$\dot{V} = x^T [(A + B\Theta)^T Y^{-1} + Y^{-1}(A + B\Theta)]x < 0.$$

Перейдем от неравенств для квадратичных форм к эквивалентным матричным неравенствам

$$Y(A + B\Theta)^T + (A + B\Theta)Y < 0, \quad Y > 0.$$

Это нелинейные матричные неравенства относительно неизвестных матриц Y, Θ. Введем новую матричную переменную $Z = \Theta Y$ и запишем приведенные выше неравенства в виде так называемых линейных матричных неравенств

$$YA^T + AY + Z^T B^T + BZ < 0, \quad Y > 0.$$

Для решения последних неравенств, которые являются линейными относительно неизвестных матриц Y, Z, разработаны эффективные алгоритмы, основанные на теории выпуклой оптимизации, и создано соответствующее программное обеспечение, реализованное в пакете Matlab. Если решение этих неравенств найдено, то искомая матрица обратной связи $\Theta = ZY^{-1}$. Таким образом, задача стабилизации сведена к решению системы линейных матричных неравенств.

Показывается, как различные задачи управления могут быть представлены в форме линейных матричных неравенств и решены с использованием стандартных процедур. Среди этих задач модальное управление, оптимальное гашение внешних возмущений, управление с неточно известными начальными условиями объекта, управление с учетом ограничений на фазовые и управляющие переменные, управление в условиях неполной информации о параметрах системы.

Применение к управлению механическими системами

Приводится ряд примеров применения изложенных методов синтеза к задачам управления механическими системами, такими как многомассовая упругая конструкция, моделирующая динамику многоэтажного сооружения при сейсмических воздействиях, быстровращающийся жесткий ротор в электромагнитных подшипниках, система защиты объектов от ударных воздействий. Задача управления высотным сооружением формулируется как задача гашения колебаний или, в терминах теории управления, как задача H_∞-оптимального управления [2, 3]. Задачи управления жестким ротором в электромагнитных подшипниках и задача синтеза системы противоударной изоляции поставлены как задачи оптимального управления с ограничениями на фазовые и управляющие переменные [4, 5].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №10-01-00514 и №11-01-00215).

Список литературы

1. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007. 280 с.

2. Баландин Д.В., Коган М.М. Оптимальное гашение колебаний высотных сооружений при сейсмических воздействиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. №5. С. 60–66.

3. Balandin D.V., Kogan M.M. LMI-based optimal attenuation of multi-storey building oscillations under seismic excitations // Structural Control and Health Monitoring. 2005. Vol. 12, No. 2. P. 213–224.

4. Баландин Д.В., Коган М.М. Метод функций Ляпунова в синтезе законов управления при интегральном и фазовых ограничениях // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 655–664.

5. Balandin D.V., Kogan M.M. LMI-based multi-objective control under multiple integral and output constraints // International Journal of Control. 2010. Vol. 83, No 2. P. 227–232.

NEW METHODS BASED ON LINEAR MATRIX INEQUALITIES FOR SYNTHESIZING FEEDBACK CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

D.V. Balandin, M.M. Kogan

A wide class of control problems, including state and output feedback control for stabilizing unstable objects, modal control, optimal attenuation of disturbances, control under state and input constraints, control under uncertain parameters and initial states, is studied using linear matrix inequalities. Some examples of the control problems for mechanical systems are given.

Keywords: dynamical system, optimal control, stabilizing, optimal attenuation of disturbances, constraints imposed on state and input variables, linear matrix inequalities.

УДК 534.01

КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С САМОПОДОБНОЙ СТРУКТУРОЙ

Л.Я. Банах

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва

banl@inbox.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматриваются механические колебания самоподобных структур, когда каждая ячейка в некотором масштабе повторяет структуру предыдущей. Рассмотрены продольные колебания ступенчатого стержня с закрепленными на нем массами, а также продольные и изгибные колебания вала ступенчатого сечения. Показано, что их собственные частоты совпадают с собственными частотами некоторых регулярных структур с дополнительным закреплением. Следовательно, самоподобные структуры представляют собой механический полосовой фильтр; ширина полосы пропускания обратно пропорциональна коэффициенту масштабирования.

Ключевые слова: колебания, самоподобные структуры, полоса пропускания, уравнение дисперсии, собственные частоты, балка.

1. Постановка задачи

Регулярные структуры с трансляционной симметрией составляют ограниченный класс природных и технических систем. Он может быть существенно расширен за счет самоподобных структур [1]. В таких структурах трансляционная симметрия сопровождается преобразованием подобия (масштабирования) и (или) поворотом соседних ячеек. В механике к ним относятся, например: стержни и валы ступенчатого сечения, параметры которых меняются пропорционально по участкам; конические оболочки; роторы барабанного типа; пространственные коленчатые валы и т.п. При этом коэффициенты масштабирования могут быть различными для разных параметров системы.

2. Одномерные структуры

Математическое исследование колебаний в самоподобных структурах может быть описано на достаточно простых примерах [2].

1. Продольные колебания стержня круглого сечения с закрепленными на нем сосредоточенными массами. Предположим, что геометрические параметры стержня (длина l, радиус поперечного сечения r) меняются с одинаковым масштабом γ и также меняются величины масс. Тогда жесткость для $i+1$ ячейки в γ раз больше жесткости i-й ячейки

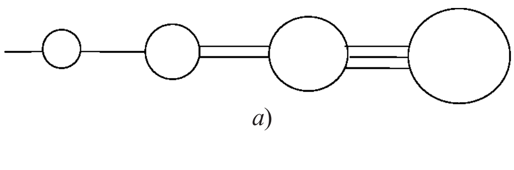
$$k_{i+1} = \frac{EF_{i+1}}{l_{i+1}} = \frac{E\pi\gamma'^2 r_i^2}{\gamma l_i} = \gamma k_i,$$

и для масс $m_i = \gamma m_{i+1}$. Таким образом, упругие и инерционные характеристики системы меняются в одном масштабе (рис. 1*а*).

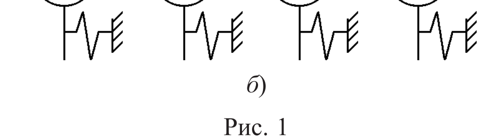
Уравнение дисперсии для системы, показанной на рис. 1*а*, при преобразовании координат

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{N}\mathbf{X}, \quad \mathbf{N} = \mathrm{diag}[1/\gamma^i],$$

превращается в уравнение дисперсии, описывающее регулярную структуру (рис. 1*б*). Отсюда следует, что самоподобная система на рис. 1*а* представляет собой механический полосовой частотный фильтр. Полоса пропускания гармонического сигнала $\omega_0 < \omega < \omega^*$: $\Delta\omega^2 = \omega^{*2} - \omega_0^2 = 4k/\sqrt{\gamma}$.



а)



б)

Рис. 1

Таким образом, полоса пропускания обратно пропорциональна параметру подобия γ. В пределе при достаточно большом коэффициенте масштабирования такая система оказывается настроенной только на одну частоту.

Для собственных форм колебаний амплитуды каждой полуволны возрастают γ в раз, то есть по линейному закону, а фазы максимальных отклонений увеличиваются и стремятся в пределе к $\pi/2$.

2. Продольные колебания балочной системы (рис. 2), в которой параметры s-го участка меняются по степенному закону $T(s) = a^s = e^{bs}$.

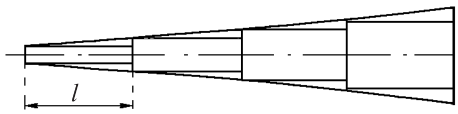


Рис. 2

При этом коэффициенты масштабирования a (или b) могут быть различными для разных параметров:

$$r_s = r_0 a_1^s, \quad m_s = m_0 a_2^s,$$

где r_s – радиус поперечного сечения участка s; m_s – масса этого участка, которую будем считать сосредоточенной в центре масс, $m_s = m_0 l \pi r^2$, m_0 – погонная масса.

Для продольных колебаний вдоль горизонтальной оси находим, что жесткость каждого участка

$$k_s = EF/l = E\pi a_1^{2s}/l.$$

Если принять, что $a_2 = a_1^2$, тогда система становится одномасштабной, что аналогично рассмотренной выше. В этом случае парциальные частоты $\nu_s = k_s/m_s$ для каждого участка одинаковы

$$\nu_s = k_s/m_s = E\pi a_1^{2s}/lm_0 a^s = \text{const}.$$

Используя преобразование координат $x_s = a_1^3 x_s^*$, получим уравнения для продольных колебаний в конечных разностях, как для регулярной структуры

$$k_{s-1}x_{s-1}^* + (\bar{k}_s - m_s\lambda^2)x_s^* + k_{s+1}x_{s+1}^* = 0 \quad (s = 1, \ldots, n).$$

Для рассмотренной балки в пределе при $n \to \infty$ (n – количество участков), получим брус равного сопротивления, его поперечное сечение меняется по длине по экспоненциальному закону

$$F(s) = F\exp(\rho F_0(s)/P).$$

Как известно, такой брус имеет в каждом сечении одинаковую статическую нагрузку от действия постоянной нагрузки P (ρ – плотность материала).

3. Балочные системы

Рассмотрим конечно-элементную модель балки ступенчатого сечения, описывающую изгибные колебания. Уравнение для j-го узла:

$$\mathbf{K}_{12}\mathbf{x}_{j-1} + (\mathbf{K}_{11} + \mathbf{K}_{22})\mathbf{x}_j + \mathbf{K}_{21}\mathbf{x}_{j+1} + \mathbf{M}_{12}\ddot{\mathbf{x}}_{j-1} +$$
$$+ (\mathbf{M}_{11} + \mathbf{M}_{22})\ddot{\mathbf{x}}_j + \mathbf{M}_{21}\ddot{\mathbf{x}}_{j+1} = 0,$$

$\mathbf{x}_j$ – двухмерный вектор с координатами $[y, \theta]$, где y – перемещение узла, θ – угол поворота; $\mathbf{K}_{ij}$, $\mathbf{M}_{ij}$ – блоки матриц жесткости и инерции конечного элемента для 1-го и 2-го концов соответственно. Для того чтобы балка имела самоподобную структуру, необходимо для каждого i-го сечения выполнить условие

$$\nu_j^2 = ml_i^4/EJ_i = \text{const}.$$

Тогда, используя замену переменных, аналогичную п. 2, придем к дисперсионному уравнению, описывающему в новых переменных регулярную структуру.

Список литературы

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.

2. Banakh L.Ya., Kempner M.L. Vibrations of mechanical systems with regular structure. Series: Foundation of Engineering Mechanics. Springer, 2010. 350 p.

VIBRATIONS OF MECHANICAL SYSTEMS WITH SELF-SIMILAR STRUCTURE

L.Ya. Banakh

Mechanical vibrations of regular systems with self-similar structure are considered. In such structures, each successive cell is geometrically similar to the previous one. Thus, the translational symmetry is accompanied by the similarity of operation or/and rotation of neighborhood cells (screw symmetry). As an example, longitudinal vibrations of a beam with stepwise section are considered. For this structure the dispersion equations is obtained. It was found that the natural frequencies for self similar structures coincide with corresponding ones for regular mechanical band filter. More over, the pass band depends on similarity coefficient: the higher this coefficient, the narrower the pass band is. In the limit, for a sufficiently high similarity coefficient, the system behaves as a one-frequency one. As for natural modes the amplitudes for each semi-wave linearly increase proportionally to the similarity coefficient, the phase shifts constantly increase.

Keywords: vibrations, self-similar structure, pass band, dispersion equation, natural frequencies, beam.

УДК 629.114.4

ПРОБЛЕМЫ СОЗДАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА НЕСУЩИХ СИСТЕМ КАРЬЕРНЫХ САМОСВАЛОВ

Ю.Н. Барышников

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва

fortuna@formatek.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Разработаны математические модели и программа для расчета нагрузок, возникающих при наезде карьерных самосвалов на неровности дороги. На основе анализа полученных результатов предложены пути снижения нагруженности несущей системы. Даны рекомендации по использованию различных по степени дискретизации конечно-элементных моделей рамы при проектировании и доводке автомобиля. Приведены сравнительные результаты численных и натурных экспериментов.

Ключевые слова: карьерные самосвалы, несущая система, математические модели, нагрузки, конечно-элементный анализ, численный эксперимент.

Сегодня открытый способ добычи полезных ископаемых признан наиболее перспективным способом во всем мире. На его долю приходится почти три четверти общего объема добычи руд и около 60% добычи угля. Основную роль в этом процессе играет карьерный автотранспорт, на котором перевозится более 75% всей горной массы.

Интенсивный рост количества и глубины карьеров потребовал в 70-х годах прошлого столетия создания новых уникальных автомобилей – карьерных самосвалов особо большой грузоподъемности. Главной задачей при проектировании таких машин являлось обеспечение их высокой надежности и долговечности [1]. Для автомобилей иного класса ее решение развивается по нескольким направлениям: натурные испытания, виртуальный эксперимент и расчетные исследования. Для карьерных самосвалов особо большой грузоподъемности последние приобретают особое значение, поскольку уникальность каждой новой модели и его высокая стоимость не позволяют проводить широкомасштабные эксперименты.

Вот почему появление высокопроизводительных суперкомпьютеров вызвало огромный интерес инженеров и исследователей. Благодаря совместным усилиям российских и белорусских разработчиков созданы и уже используются суперкомпьютеры семейства «СКИФ». Появилась информация о применении этих гигантов и для расчета несущих систем карьерных самосвалов БелАЗ [2].

Традиционно расчет подобных конструкций базируется на применении метода конечных элементов (МКЭ). На рынке программных продуктов можно найти множество предложений, реализующих эту концепцию. Однако МКЭ – всего лишь инструмент в руках исследователя. В то же время выбор самой конечно-элементной модели (КЭМ), степень ее дискретизации, определение реальных нагрузок и анализ полученных результатов – есть огромный научный труд.

Автором на протяжении многих лет работы в Московском автомеханическом институте исследовались различные математические модели несущей системы карьерных самосвалов. Полученный опыт показал, что проблема кроется не только в разработке КЭМ несущей конструкции, но и в создании математических моделей самого самосвала, на которых можно производить расчет реальных нагрузок, действующих на колеса и несущую систему в различных режимах эксплуатации. Последняя задача представляется особенно сложной ввиду нелинейности подвески, разнообразия ее конструктивных схем, а также специфики силового взаимодействия рамы и кузова.

На основе анализа условий эксплуатации карьерных самосвалов выделены основные расчетные случаи. Среди них наиболее опасный случай – наезд груженого автомобиля на неровности дороги. Это происходит в основном в зоне погрузки и разгрузки, где скорость автомобиля невелика, а неровности могут достигать 300 мм. Изучение характера трещин в рамах подтверждает это предположение: причиной их возникновения являются кососимметричные нагрузки, действующие при перекосе автомобиля.

Поэтому на первом этапе исследований были разработаны математические модели самосвалов для расчета таких нагрузок. Каждая модель состояла из подрессоренной и неподрессоренных масс, связанных между собой посредством направляющего устройства подвески. Упругие элементы подвески и шины моделировались пружинами с реальными нелинейными характеристиками.

С использованием принципа возможных перемещений получены нелинейные уравнения равновесия автомобиля. Для их решения разработана программа, реализующая итерационный метод Ньютона в сочетании с методом пошагового нагружения конструкции.

На построенных моделях исследовались случаи наезда груженого самосвала на неровность различными колесами. Увеличение высоты неровности производилось с шагом 5 мм до момента отрыва одного из колес от поверхности дороги. Хотя на практике подобные случаи не наблюдались, предельные результаты необходимы для проверки сходимости метода и сравнения численного и аналитического решений.

В итоге на каждом шаге были рассчитаны кососимметричные нагрузки, действующие на раму от направляющего устройства подвески. Анализ полученных результатов показал, что зависимость нагрузок от высоты неровности имеет ярко выраженный нелинейный характер. При этом величина кососимметричных нагрузок существенно зависит от типа подвески. Так, крутящий момент, возникающий при наезде на одинаковую неровность, у автомобиля с зависимой задней подвеской в 1.5–2 раза меньше, чем у автомобиля с независимой подвеской. Поэтому одним из возможных путей снижения нагруженности несущей системы может быть применение на карьерных самосвалах зависимой задней подвески. Этот вывод косвенно подтверждается наличием такого типа подвесок у большинства зарубежных аналогов.

Далее полученные нагрузки использовались на втором этапе при расчете рамы самосвала. Здесь важным вопросом является степень дискретизации КЭМ.

Рама карьерного самосвала представляет собой жесткую сварную конструкцию, состоящую из элементов замкнутого профиля. В силу симметрии относительно вертикальной плоскости расчету подвергалась половина рамы. При этом нагрузки разделялись на симметричные (изгиб) и кососимметричные (кручение), а результаты расчетов суммировались. Такой прием позволил вдвое уменьшить число степеней свободы КЭМ и, как следствие, время расчета.

Первоначально для моделирования рамы карьерных самосвалов использовалась стержневая КЭМ. Внешними нагрузками являлся собственный вес рамы, вес установленного на раме двигателя и других агрегатов, а также кузова с грузом. Реакции от направляющего аппарата подвески задавались в узлах его крепления и соответствовали одному из расчетных случаев. Результаты расчетов сравнивались с данными натурных испытаний автосамосвалов БелАЗ, когда груженый автомобиль наезжал на неровности высотой 230 мм диагонально расположенными колесами. Установлено, что стержневая КЭМ адекватно описывает общий характер нагруженности рамы. Хорошее совпадение (до 20%) с экспериментом наблюдалось вне зоны узлов. Затем рама моделировалась сеткой пластинчатых конечных элементов (около 1400 элементов для половины рамы). Здесь результаты расчетов отличались от эксперимента уже на 15%.

Дальнейшая дискретизация КЭМ использовалась при изучении напряженно-деформированного состояния в зонах локализации напряжений, в частности в узлах рамы. Следует отметить, что попытки использовать в расчетах комбинированную КЭМ, состоящую из стержневых и пластинчатых элементов, не привели к успеху. Отсутствие протяженных участков между узлами рамы не позволили получить реалистичную картину распределения напряжений.

В заключение отметим, что изложенный подход для расчета несущей системы позволяет уже на ранней стадии проектирования карьерных самосвалов проводить многовариантные расчеты с целью выбора оптимальных конструктивных решений. При окончательной же доводке конструкции необходимо использовать более сложные математические модели, в том числе модели, отражающие динамический характер ее нагружения.

Список литературы

1. Мариев П.Л. и др. Повышение долговечности несущих конструкций карьерных автосамосвалов. Якутск: Якут. науч. центр СО РАН, 1991. 131 с.

2. Медведев А. «СКИФ» смотрит в будущее // Советская Белоруссия. 2011. № 9.

THE ISSUES OF DEVELOPING MATHEMATICAL MODELS FOR CALCULATION OF BEARING SYSTEMS OF LARGE DUMP-BODY TRUCKS

Yu.N. Baryshnikov

Mathematical models and a program for calculating the loads on a large dump-body truck overcoming the roughness of the road are developed. Based on the analysis of the obtained results, possible ways of decreasing loads on the bearing system are suggested. Recommendations on the use of finite-element models of the frame with various discretization degrees in designing and streamlining the vehicle are given. Comparative results of numerical and natural experiments are presented.

Keywords: large dump-trucks, bearing system, mathematical models, loading, finite element analysis, numerical experiment.

УДК 531.36+512.77

МНОЖЕСТВА УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ЗАДАЧ

А.Б. Батхин, А.Д. Брюно

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

batkhin@gmail.com

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматривается вещественная линейная система Гамильтона с постоянными коэффициентами, зависящими от нескольких вещественных параметров. Формулируются и доказываются условия, необходимые и достаточные для устойчивости неподвижного решения этой системы при фиксированных значениях параметров. Предлагается метод вычисления множества всех значений параметров, при которых это решение устойчиво (т.е. множества устойчивости). Применение метода демонстрируется на одной гироскопической задаче, описываемой системой Гамильтона с четырьмя степенями свободы и с тремя параметрами. В вычислениях используется компьютерная алгебра, в частности базис Гребнера, и степенная геометрия. Показывается также, что четырехпараметрическое обобщение этой задачи не содержит принципиально новых трудностей.

Ключевые слова: условия устойчивости, системы Гамильтона, компьютерная алгебра, степенная геометрия.

Вычисление множеств устойчивости гамильтоновых систем

Пусть задана гамильтонова система линейных дифференциальных уравнений $dX/dt = JA(P)X$, $X = (Y, Z)$, $Y, Z \in R^m$, где A – постоянная симметричная матрица, J – симплектическая единица, m – число степеней свободы, P – вектор параметров размерности n. Характеристический многочлен матрицы $JA(P)$ является многочленом $f(\mu)$ от четных степеней λ, т.е. $\mu = \lambda^2$.

Определение. Множество устойчивости Σ линейной гамильтоновой системы – это множество значений параметров P, для которых стационарное решение системы $X = 0$ устойчиво по Ляпунову.

Утверждение. Положение равновесия $X = 0$ линейной гамильтоновой системы устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда

1) все корни многочлена $f(\mu)=\sum_{i=0}^{m} f_i(P)\mu^i$ вещественны и неотрицательны;

2) все элементарные делители матрицы $JA(P)$ просты.

Доказательство выводится из нормальной формы гамильтониана линейной системы [1].

Критическими корнями многочлена $f(\mu)$, при переходе через которые устойчивость может измениться, являются нулевой и двукратный $\mu = -\omega^2$, поэтому граница $\partial\Sigma$ множества устойчивости Σ состоит из частей гиперповерхностей $F_0 = \{P: f_0(P) = 0\}$ и $F_2 = \{P: D(f) = 0\}$, где $D(f)$ – дискриминант многочлена $f(\mu)$. Если $m < 4$, то необходимые и достаточные условия для устойчивости суть $f_k(P) \ge 0$, $k = 0,\dots, m - 1$, $D(f) \ge 0$ вместе с простотой элементарных делителей матрицы $JA(P)$ для критических корней $\lambda = 0, \pm i\omega$. Для $m \ge 4$ критерий устойчивости формулируется в терминах инноров вспомогательной матрицы, построенной из матрицы $JA(P)$ [2–4]. Отметим, что проверка простоты элементарных делителей матрицы $JA(P)$ эффективно осуществляется с помощью вычисления ранга матрицы $M_A(\mu) = JA(P) - \sqrt{\mu}E$ без необходимости вычисления жордановой формы матрицы $JA(P)$.

Гироскопическая задача

Рассматривается механическая система в поле силы тяжести, состоящая из осесимметричных тел, связанных между собой универсальными шарнирами Кардано – Гука (рис. 1).

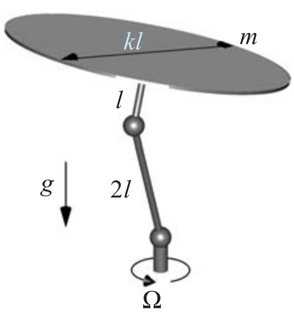


Рис. 1

Центры каждого из шарниров находятся на

осях симметрии соответствующих тел. Нижнее тело – невесомый стержень длиной $2l$ посредством шарнира прикреплен к оси ротора вертикально поставленного мотора, а верхний стержень длиной l жестко прикреплен к центру плоского диска массой m и диаметром kl, $k = 4$, перпендикулярно его плоскости. Ротор мотора вращается с постоянной угловой скоростью Ω. Такие механические системы являются статически неуравновешенными. Анализ устойчивости вращения такой системы относительно вертикальной оси был проведен численно в [5]. Там же приведен вывод уравнений движения, а именно, представлен лагранжиан системы с точностью до членов второго порядка. Система имеет 6 степеней свободы, но ее уравнения движения расщепляются на две подсистемы, из которых нетривиальной является подсистема с $m = 4$. После рационального преобразования исходных параметров элементы матрицы A представляют собой линейные функции от вектора новых параметров P размерности 3.

Характеристический многочлен матрицы $JA(P)$ имеет полиномиальные по P коэффициенты, причем его свободный член $f_0(P)$ является полным квадратом и, следовательно, гиперповерхность, определяемая уравнением $f_0(P) = 0$, не может быть границей множества устойчивости. Роль границы множества Σ выполняет гиперповерхность $F_2 = \{P\colon D(f)(P) = 0\}$, представляющая собой объединение некоторой плоскости и линейчатой поверхности G. Линейчатая поверхность G была найдена с помощью базиса Гребнера и исследована локально вблизи особых точек алгоритмами степенной геометрии [3, 6]. Она заметается прямой, движущейся вдоль двух параболических сегментов P_1^0, P_2^0. Поверхность G делит пространство параметров на четыре области, но устойчивость имеет место только в двух из них, представляющих собой: 1) внутренность криволинейного тетраэдра и 2) неограниченную область (рис. 2).

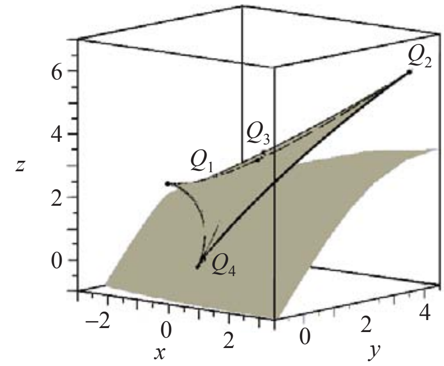


Рис. 2

Каждая из двух областей устойчивости пересекается с областью физических значений параметров. В [5] численно была найдена малая часть области 1). Итак, получен эффективный способ выделения области устойчивости. Также рассмотрено обобщение задачи для случая $k > 0$, т.е. задача с четырьмя параметрами. Работа выполнена совместно с В.П. Вариным.

Работа поддержана РФФИ (проекты 08-01-00082, 11-01-00023).

Список литературы

1. Брюно А.Д. Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990.

2. Джури Э. Инноры и устойчивость динамических систем. М.: Наука, 1979.

3. Брюно А.Д., Батхин А.Б., Варин В.П. Вычисление множеств устойчивости в многопараметрических задачах. Препринт №23. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2010.

4. Брюно А.Д., Батхин А.Б., Варин В.П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых задач // ПММ. 2011. Т. 75. (В печати).

5. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. М.: Физматлит, 2009.

6. Брюно А.Д., Батхин А.Б., Варин В.П. Множество устойчивости одной гироскопической задачи. Препринт № 4. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2010.

SETS OF STABILITY OF MULTIPARAMETER HAMILTONIAN PROBLEMS

A.B. Batkhin, A.D. Bruno

We consider a real linear Hamiltonian system with constant coefficients, which depend on several real parameters. The necessary and sufficient conditions for the stability of stationary solutions of this system for fixed values of the parameters are formulated and proved. A method for computing a set of all the values, for which this solution is stable, is proposed. Application of the method is demonstrated using a gyroscopic problem, described by the Hamiltonian system with four degrees of freedom and with three parameters. Computer algebra (Groebner basis) and Power Geometry are used in the calculations. The four-parameter generalization of this problem does not contain principally new difficulties.

Keywords: conditions of stability, Hamiltonian system, computer algebra, power geometry.

УДК 62-521

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЯЮЩЕГО КЛИНОРЕМЕННОГО ВАРИАТОРА

Г.А. Бахадиров

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз,
Ташкент (Узбекистан)

instmech@rambler.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Составлены дифференциальные уравнения движения машинного агрегата с клиноременным вариатором для случая, когда управляющий механизм воздействует на подвижный диск ведомого звена, а подвижный диск ведущего звена подпружинен. Уравнения позволяют исследовать поведение агрегата во вращательном движении и перемещение системы подвижных дисков вариатора.

Ключевые слова: управление, обобщенные координаты, ведущий и ведомый шкивы, подвижные диски, вращательное и поступательное движения.

Вариаторы широко применяются в станках, машинах и механизмах текстильной, легкой, бумажной, химической промышленности, на транспорте для плавного изменения частоты вращения ведомого вала.

Рассмотрим динамическую модель машинного агрегата в виде двухмассовой динамической модели, имеющей приведенные моменты инерции, J_1 и J_2, связанные, соответственно, с ведущим и ведомым шкивами клиноременного вариатора. Движение звеньев управляющих механизмов клиноременных вариаторов связано с движением шкивов и внешними вращающими моментами T_1 и T_2, приложенными соответственно, к ведущему и ведомому шкивам. Схема машинного агрегата с клиноременным вариатором представлена на рис. 1.

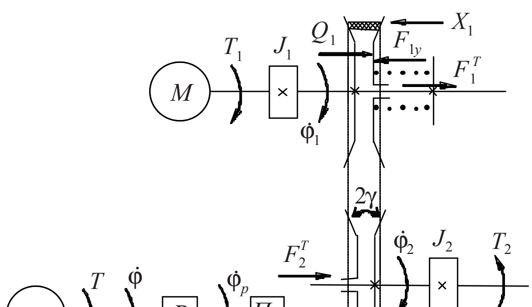


Рис. 1

На машинном агрегате с вариатором M – приводной электродвигатель, развивающий момент T_1; T_2 – момент сил сопротивления; φ_1, φ_2 – углы поворота ведущего и ведомого шкивов, с которыми связаны соответственно приведенные моменты инерции J_1 и J_2 агрегата; X_1 и X_2 – осевые перемещения подвижных дисков ведущего и ведомого шкивов; MP – управляющий электродвигатель, создающий момент T на валу, положение которого определяется углом φ; P – редуктор, ведомый вал которого поворачивается на угол φ_p; Q_1, Q_2 – распорные усилия; F_1, F_2 – силы трения в направляющих подвижных дисках; F_{1y}, F_{2y} – усилия, действующие на подвижные диски ведущего и ведомого шкивов со стороны управляющего механизма либо пружин; J – приведенный к валу двигателя MP момент инерции звеньев управляющего механизма; 2λ – угол клиновой канавки шкивов.

В цепи управления вариатором вращательное движение ведомого вала редуктора P посредством механизмов, которые могут быть различными, преобразуется в поступательное движение X_1, X_2 подвижных дисков шкивов; Π_2 – функция положения механизма, преобразующего вращательное движение в поступательное $\varphi_p = \Pi_2(X_1)$.

Составим уравнения движения агрегата с вариатором, когда управляющий механизм воздействует на подвижный диск ведомого звена, а подвижный диск ведущего звена подпружинен.

В качестве обобщенных координат выберем φ_2 и X_2. Тогда

$$U = U(X_2); \quad \ddot\varphi_1 = \ddot\varphi_2 U + \dot\varphi_2 \dot X_2 U^1;$$

$$\ddot X_1 = \ddot X_2 \widetilde\Pi' + \dot X_2^2 \widetilde\Pi''; \quad \ddot\varphi = Up(\ddot X_2 \Pi_2' + \dot X_2^2 \Pi_2''),$$

и выражение энергии ускорений через обобщенные ускорения представится в виде

$$S=0.5[J_1(\ddot{\varphi}_2U+\dot{\varphi}_2\dot{X}_2U')^2+J_2\ddot{\varphi}_2^2+JU_p^2\times$$
$$\times(\ddot{X}_2\Pi_2'+\dot{X}_2^2\Pi_2'')^2+m_1(\ddot{X}_2\widetilde{\Pi}'+\dot{X}_2^2\widetilde{\Pi}'')^2+m_2\ddot{X}_2^2],$$

где

$$U=\frac{D_2}{D_1};\quad U'=\frac{\partial U}{\partial X_2};\quad \widetilde{\Pi}'=\frac{\partial\widetilde{\Pi}}{\partial X_2};\quad \widetilde{\Pi}''=\frac{\partial^2\widetilde{\Pi}}{\partial X_2^2};$$

$$\Pi_2'=\frac{\partial\Pi_2}{\partial X_2};\quad \Pi_2''=\frac{\partial^2\Pi_2}{\partial X_2^2}.$$

Пружина на ведущем шкиве создает упругую силу $F_{1y}=K_1(\delta_1-x_1)$, где K_1, δ_1 – жесткость и предварительная деформация пружины. Определяя обобщенные силы, соответствующие выбранным обобщенным координатам φ_2 и X_2, из уравнений Аппеля [1], получаем дифференциальные уравнения движения агрегата с клиноременным вариатором

$$(J_2+J_1U^2)\ddot{\varphi}_2+J_1\dot{\varphi}_2\dot{X}_2UU'=T_1U-T_2,$$
$$(JU_p^2(\Pi_2')^2+m_1(\widetilde{\Pi}')^2+m_2)\ddot{X}_2+$$
$$+(JU_p^2\Pi_2'\Pi_2''+m_1\widetilde{\Pi}\widetilde{\Pi}'')\dot{X}_2^2+K_1(\delta_1-\widetilde{\Pi})\widetilde{\Pi}'=$$
$$=\pm(T-T_c)U_p\Pi_2'-(Q_2\pm F_2^T)+(Q_1\mp F_1^T)\widetilde{\Pi}'. \quad (1)$$

Здесь верхние знаки соответствуют сближению дисков ведомого шкива, когда передаточное отношение U вариатора увеличивается, а нижние – расхождению, что вызывает уменьшение передаточного отношения. В данном случае нетрудно показать, что

$$F_{2y}=\pm(T-T_c)U_p\Pi_2'.$$

Первое уравнение в системе (1) описывает поведение агрегата во вращательном движении, а второе – перемещение системы подвижных дисков вариатора.

Членами, пропорциональными $\dot{X}_2^2$, можно пренебречь, и тогда второе уравнение системы (1) будет иметь вид

$$\widetilde{m}_0\ddot{X}_2+K_1(\delta_1-\widetilde{\Pi})\widetilde{\Pi}'=\pm(T-Tc)Up\Pi_2'-$$
$$-(Q_2\pm F_2^T)+(Q_1\mp F_1^T)\widetilde{\Pi}', \quad (2)$$

где $\widetilde{m}_0=JU_p^2(\Pi_2')^2+m_1(\widetilde{\Pi}')^2+m_2$.

Уравнение (2), описывающее перемещения подвижного диска вариатора, запишем в более общем виде

$$m_0\ddot{X}_1=\pm F_{1y}-(Q_1\pm F_1^T)-(F_{2y}-Q_2\pm F_2^T)\Pi', \quad (3)$$

$$m_0\ddot{X}_2=\pm F_{2y}-(Q_2\pm F_2^T)-(F_{1y}-Q_1\pm F_1^T)\widetilde{\Pi}'. \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) имеют одинаковую структуру. При описании движения агрегата с вариатором, когда управление осуществляется через подвижный диск ведомого шкива, можно воспользоваться и уравнением (3). Тогда вместо F_{2y} следует подставлять $F_{2y}=\pm(T-T_c)U_p\Pi_2'$, а силу $\pm F_{1y}$ заменить упругой силой пружины $\pm F_{1y}=K_1(\delta_1-X_1)$.

Если воспользоваться уравнением (4) при управлении через подвижный диск ведущего шкива, то в уравнении (4) следует принять

$$\pm F_{2y}=K_2(\delta_2-X_2),\quad F_{1y}=\pm(T-T_c)U_p\Pi_1'.$$

Уравнения (3), либо (4) могут быть использованы для определения мощности или вращающего момента управляющего двигателя.

Необходимо отметить, что поступательное перемещение подвижных дисков вариатора и вращательное движение агрегата взаимосвязаны, и эта связь осуществляется через распорные усилия. Так как $Q_1=Q_1(F_t)$, $Q_2=Q_2(F_t)$, где полезное окружное усилие равно

$$F_t=2(T_2+J_2\ddot{\varphi}_2):D_2,$$

то перемещения подвижных дисков зависят как от момента T_2 сил сопротивления, так и вращательного движения $\ddot{\varphi}_2$ ведомой части агрегата.

Список литературы

1. Аппель П. Теоретическая механика. Т. 2. М.: ГИФМЛ, 1960. 487 с.

MATHEMATIC MODEL OF CONTROLLING A V-BELT VARIATOR

G.A. Bahadirov

Differential equations of motion of a machine aggregate with a V-belt drive are written for the case, when the controlling mechanism acts on the moveable disk of the driven section, and the moveable disk of the drive section is fixed with a spring. The equations make it possible to analyze the behavior of the aggregate in the rotational motion and the movement of the mobile disk system of the variator.

Keywords: control, coordinate generalization, drive and driven sheave block, mobile disks, rotational and parallel motion.

УДК 539.313+517.95

ДИНАМИКА И СТАТИКА ТРУБОПРОВОДА В ПОЛЕ СИЛ ТЯЖЕСТИ

В.В. Башуров[1]***, А.И. Кропотов***[1]***, М.В. Пчелинцев***[2]***, Н.А. Скоркин***[2]***,***
Н.А. Ваганова[3]***, М.Ю. Филимонов***[3]

[1]Трехгорный технологический институт – филиал Национального исследовательского ядерного университета МИФИ
[2]Снежинский физико-технический институт – филиал Национального исследовательского ядерного университета МИФИ
[3]Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

cetm@atlint.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Нелинейность уравнений отличает настоящую модель от используемых прежде. Рассматриваются две модели: первая модель основана на допущении отсутствия горизонтальных перемещений, их малости, а также малости первых производных, что позволяет сформулировать задачу равновесия в виде одного дифференциального уравнения второго порядка, а во второй модели эти допущения отсутствуют, что приводит к появлению системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Как одно уравнение, так и система, имеют первые интегралы, и соответствующая краевая задача сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений. Для решения последних предлагается новый способ их решения. Рассмотрена также динамика трубопровода с движущейся по нему жидкостью и получен ряд точных решений.

Ключевые слова: трубопровод, равновесие, деформация, точное решение.

Рассмотрим колебания трубопровода длиной L, представляемого в виде цилиндра кругового сечения, по которому протекает жидкость, в поле сил тяжести. Математическая модель такого трубопровода в предположении малости вертикальных перемещений и отсутствии горизонтальных перемещений представляет собой одно нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение. Материал трубы подчиняется линейному закону Гука:

$$T = E\varepsilon S,$$

уравнение имеет вид

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=ES\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-$$
$$-\frac{\rho_0 S v^2}{[1+(\partial y/\partial x)^2]^{3/2}}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\rho S g. \qquad (1)$$

Здесь E – модуль Юнга, ε – относительная линейная деформация, S – площадь сечения трубопровода, ρ_0 – плотность жидкости, v – скорость жидкости, y – вертикальное перемещение элемента трубы, x – координата элемента трубы, ρ – плотность элемента трубы, учитывающая плотность материала оболочки и жидкости, g – ускорение свободного падения. Постоянная m равна массе элемента трубы единичной длины, учитывающая как массу стенки трубы, так и массу жидкости в данном элементе трубы.

Рассматривается задача равновесия трубопровода, представленная «простой» моделью (1). С этой целью в уравнении (1) «зануляется» производная по времени. В случае покоящейся жидкости уравнение удается проинтегрировать точно, в случае движущейся жидкости получен ряд численных решений. Получено условие, связанное со скоростью течения, при нарушении которого уравнение (1) допускает три возможных решения.

Рассмотрена «сложная» модель движения (а также равновесия) трубопровода, в котором сняты ограничения как по малости деформаций, так и по отсутствию горизонтальных перемещений. Эта модель представлена системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\rho\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}=E\dfrac{\partial}{\partial s}\left[\dfrac{\sqrt{y_s'^2+x_s'^2}-1}{\sqrt{y_s'^2+x_s'^2}}\dfrac{\partial x}{\partial s}\right]-\rho_0 v_0^2\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \\ \rho\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=E\dfrac{\partial}{\partial s}\left[\dfrac{\sqrt{y_s'^2+x_s'^2}-1}{\sqrt{y_s'^2+x_s'^2}}\dfrac{\partial y}{\partial s}\right]-\rho_0 v_0^2\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial s^2}+\rho g.\end{cases} \qquad (2)$$

Каждая точка трубы характеризуется координатой s, которой она была отмечена в начальный момент, когда труба находилась в равновесии («лагранжева» координата). При деформации трубы точка смещается как по вертикали (меняет свою координату y), так и по горизонтали (изменяется координата x). Решается та же задача равновесия трубопровода, то есть «зануляются» все производные по времени в системе (2). Решение этой задачи сводится к решению системы алгебраических нелинейных уравнений, для которой предлагается оригинальный метод решения.

Для нестационарных уравнений (1) и системы (2) получен ряд точных решений, позволяющих судить о характере деформации трубопровода.

Список литературы

1. Ткаченко О.П. Движение подземного трубопровода с учетом конечности его перемещений // Труды Междунар. конф. RDAMM – 2001. Т. 6. Ч. 2. Спец. вып. Хабаровск, ВЦ ДВО РАН. 2001.

2. Пчелинцев М.В., Скоркин Н.А. Геометрический смысл метода Ньютона // Вестник Южно-Уральск. гос. ун-та. Серия Математика, механика, физика. 2009. Вып. 1, № 22 (159). С. 4–11.

DYNAMICS AND STATICS OF A PIPELINE IN A GRAVITY FIELD

V.V. Bashurov, A.I. Kropotov, M.V. Pchelintsev, N.A. Scorkin, N.A. Vaganova, M.Yu. Filimonov

Two models of pipeline oscillations in a gravity field are considered. The first model is based on the assumption that the horizontal displacements are absent, or they are small, as well as the first derivatives are small too. This assumption allows one to formulate the equilibrium problem in the form of a second-order differential equation. In the second model these assumptions are not available, and this leads to a system of two nonlinear ordinary second-order differential equations. The single equation and the system have the first integrals, and the corresponding boundary problem is reduced to a system of nonlinear algebraic equations. To solve it, a new method is proposed. Also dynamics of the pipeline with fluid moving inside is considered and a series of exact solutions are obtained.

Keywords: pipeline, equilibrium, strain, exact solution.

УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ ВРАЩЕНИЯ РОТОРА ПРИ ОТКАЗЕ РЕЗЕРВНЫХ ПОДШИПНИКОВ

© 2011 г. ***С.Е. Белов, Н.Г. Кодочигов, В.Л. Патрушев, А.А. Руин, С.А. Соловьев***

ОАО «ОКБМ Африкантов», Нижний Новгород

kocay@okbm.nnov.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Представлены результаты аналитических исследований динамики вращения вертикального ротора при отказе резервных подшипников. Изложены подходы к моделированию роторной системы и устройства безаварийного останова, приведены основные расчетные данные. В результате оптимизации параметров элементов в устройстве безаварийного останова получены исходные данные по нагрузкам для обоснования прочности конструкции стенда.

Ключевые слова: динамика, моделирование, отказ, подшипник, прецессия, ротор, трение, устройство.

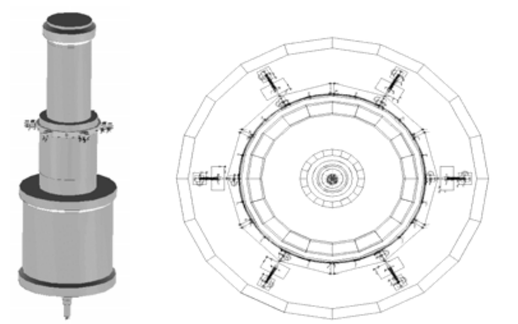
Введение

Для обеспечения безопасного выбега ротора в ситуациях выхода из строя электромагнитного подвеса ротора (ЭМП) в роторной системе турбомашины (ТМ) реакторной установки предусматриваются радиальные и осевые резервные подшипники (РП). Разработанные для штатной роторной системы варианты конструкций РП требуют экспериментальной отработки в стендовых условиях. В составе стенда для испытаний макетов РП предусматривается устройство безаварийного останова (далее – устройство), назначением которого является останов ротора стенда в случае аварийного разрушения испытываемых радиальных резервных подшипников и потери магнитной поддержки со стороны радиальных ЭМП. Целью проведенной работы является подбор характеристик элементов устройства при разработке конструкции для обеспечения безопасного выбега ротора.

Значительное число степеней свободы, проявление нелинейностей, обусловленных большим монтажным зазором, трением, переменной жесткостью и существенным демпфированием элементов устройства безаварийного останова потребовало проведения аналитических исследований, т.е. решения задачи взаимодействия ротора стенда и элементов устройства с использованием компьютерного моделирования.

Моделирование динамики системы «ротор – страховочный подшипник»

Ротор стенда для испытаний макетов РП установлен вертикально и в исходном состоянии вверху вывешивается осевым и радиальным ЭМП. Нижняя радиальная опора ротора – стандартный шариковый подшипник качения. В режиме отключения ЭМП ротор взаимодействует с испытываемым РП, а в случае его отказа – с устройством. Моделирование ротора проведено в 3D постановке с учетом его жесткостных и инерционных характеристик. На рис. 1 представлены расчетная схема ротора (*а*) и вариант устройства (*б*).



а) *б*)

Рис. 1

Основным фактором нагружения ротора являются центробежные силы от дисбаланса, обусловленного остаточной неуравновешенностью после балансировки.

Для оценки предельного состояния ротора от воздействия неуравновешенных инерционных сил принимается распределение дисбаланса по формам колебаний цилиндрической и конической прецессии.

Гашение энергии ударного взаимодействия ротора предусмотрено за счет упруго-демпфирующих элементов устройства, нелинейные нагрузочные характеристики которых получены экспериментальным путем. Между ротором и внутренней контактирующей поверхностью устройства предусмотрен радиальный зазор Δ_1. Дополнительное радиальное перемещение упруго-демпфирующих элементов устройства ограничено величиной Δ_2. В зоне контакта ротора и устройства моделируется сила трения. Нижняя опора ротора – шариковый подшипник качения моделируется сферическим шарниром. Под действием сил трения и неуравновешенных центробежных сил возможно увеличение скорости прецессии вращающегося ротора, сопровождающейся значительными силами контактного взаимодействия ротора с устройством.

Наличие гистерезиса в характеристике упруго-демпфирующего элемента учитывается силой $f(C_0, x)$, приложенной к устройству наряду с упругой силой. Жесткость C_0 подобрана из условия обеспечения необходимой площади петли гистерезиса на рабочем ходе x.

Результаты расчетного моделирования

В результате расчетного моделирования получены основные параметры, характеризующие движение ротора и нагрузки на элементы устройства. На рис. 2 изображена траектория центра ротора в районе СП. Проведен анализ влияния изменения зазора Δ_1 и коэффициента трения между материалами пар трения ротора и устройства на уменьшение нагрузок.

При анализе результатов расчета выделены две фазы взаимодействия ротора с устройством:

– фаза ударов. Фаза характеризуется периодическими ударами ротора по контактной поверхности элементов устройства, развитию обратной прецессии на высокой частоте вращения;

– фаза постоянного контакта. Фаза характеризуется безотрывным движением ротора по контактирующей поверхности устройства. В этой фазе происходит постоянное нарастание поступательной скорости центра тяжести ротора и, как следствие, постоянное нарастание контактных сил.

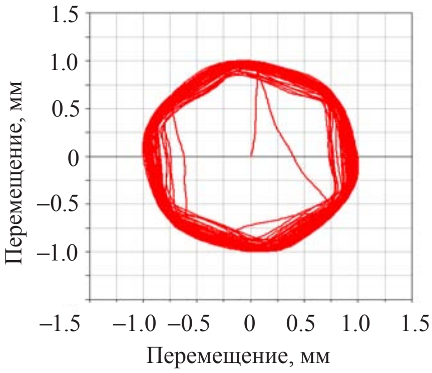


Рис. 2

Заключение

В результате аналитических исследований процесса выбега ротора при отказе РП определены требуемые параметры упруго-демпфирующего элемента устройства безаварийного останова, определены исходные данные по нагрузкам, необходимые для обоснования почности конструкций.

ANALYTICAL RESEARCH OF THE ROTOR DYNAMICS IN THE EVENT OF FAILURE OF CATCHER BEARINGS

S.E. Belov, N.G. Kodochigov, V.L. Patrushev, A.A. Ruin, S.A. Solovyov

The article presents the results of analytical research of the vertical rotor dynamics in the event of failure of catcher bearings. The main approaches for modelling the rotor system and safety stop device are introduced, and the main results of calculation are presented. For the problem of parameter optimization of the safety stop device, the initial conditions for loading are obtained, which are necessary for the bench validation of the strength of the construction.

Keywords: dynamics, modelling, failure, bearing, precession, rotor, friction, device.

УДК 531.3+534

ОБЩИЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ – ОСЦИЛЛЯЦИОННАЯ СТРОБОДИНАМИКА

И.И. Блехман[1,2]

[1]Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург
[2]Научно-производственная корпорация «Механобр-Техника», Санкт-Петербург

iliya.i.blekhman@gmail.com

Поступила в редакцию 16.05.2011

Излагается общий подход к решению задач о высокочастотных воздействиях на динамические системы, рассматриваются его приложения как к фундаментальным, так и к частным моделям динамических систем различных наук. Наряду с обзором известных, приводится ряд новых результатов. Дается определение осцилляционной стрободинамики как междисциплинарной области знания, изучающей динамику медленных процессов, происходящих при высокочастотных воздействиях на динамические системы.

Ключевые слова: динамические системы, высокочастотные воздействия, медленные движения, общий подход, управление.

К настоящему времени накоплен ряд экспериментальных и теоретических результатов, относящихся к проблеме высокочастотных воздействий на динамические системы механики, физики, химии, биологии, физиологии, экономики и социологии. Теоретические исследования при этом выполнены различными методами, и их результаты трактуются индивидуально. Многие фундаментальные и прикладные задачи этого класса еще ждут своего решения и осмысления. Трудно указать динамическую задачу из любой перечисленной области, для которой вопрос о влиянии колебательных воздействий не представлял бы интереса.

Все упомянутые задачи допускают общий математический подход и общую трактовку. Поэтому представляется целесообразным отнести соответствующие исследования к междисциплинарной области знания, которую предлагается назвать осцилляционной стрободинамикой. Эту область можно рассматривать как один из разделов теории колебаний и нелинейной динамики. Одно из направлений осцилляционной стрободинамики – вибрационное управление физическими процессами – входит в так называемую кибернетическую физику.

Сущность подхода осцилляционной стрободинамики схематически можно представить следующим образом. Пусть эволюция системы или процесса описывается соотношением

$$Z(x,a,t)=0, \qquad (1)$$

где x – вектор состояния системы, a – вектор параметров, t – время, а Z – оператор, который может представлять конечные, дифференциальные, интегральные или другие уравнения. То же соотношение при наличии быстро осциллирующих воздействий будет

$$Z(x+\psi_x(\omega t), a+\psi_a(\omega t), t)=F(\omega t), \qquad (2)$$

где ψ_x, ψ_a и F – некоторые периодические функции «быстрого времени» $\tau=\omega t$, $\omega >> 1$. (Понятия «быстрые», «медленные», «высокочастотные», «низкочастотные» допускают формализацию, на которой здесь не останавливаемся.)

Практически во всех случаях изменение вектора $x(t)$, описывающего процесс при высокочастотном воздействии, можно представить в виде

$$x(t)=X(t)+\psi(t,\omega t), \qquad (3)$$

где X – медленная; а ψ – быстрая периодическая составляющая с нулевым средним за период по τ. При этом основной интерес представляет именно составляющая X. Оказывается, что посредством той или иной математической процедуры (наиболее подходящей нам представляется метод прямого разделения движений [1, 2]) удается получить соотношение, содержащее только медленную составляющую X:

$$Z^*(x,a^*,t)=0. \qquad (4)$$

Естественно, что как оператор Z^*, так и значения параметров a^* могут существенно отличаться от оператора Z и параметров a, описывающих изменение исходной переменной x. Обычно соотношение (4) гораздо проще исходного соотношения (1), в частности, оно может иметь значительно меньшую размерность.

Назовем соотношение (4) уравнением осцилляционной стрободинамики, а собственно осцилляционную стрободинамику определим как динамику, описывающую эволюцию медленной составляющей движения при высокочастотном воздействии на систему или процесс.

Можно сказать, что составляющая X – это результат наблюдения за исходной величиной x в стробоскопическом освещении с частотой, близкой или несколько превышающей частоту воздействия ω (и частоту быстрой составляющей ω). Поэтому осцилляционная стрободинамика – это динамика для наблюдателя, следящего за системой, подверженной высокочастотному воздействию, в стробоскопическом освещении или наблюдающего ее сквозь грубые очки, через которые не видны быстрые движения. Естественно, что мир такого наблюдателя значительно проще, чем мир наблюдателя, следящего за процессом x непосредственно.

Приводится общая схема получения уравнения (4), являющаяся обобщением метода прямого разделения движений в задачах механики [1, 2]. Рассматривается применение подхода к фундаментальным моделям и соотношениям механики, электродинамики, теплопроводности, к междисциплинарным проблемам – самосинхронизации как одной из проблем самоорганизации, вибрационного перемещения и создания динамических материалов. Затем рассматривается влияние высокочастотного воздействия (в частности, параметрического) на различные осцилляторы – линейные и нелинейные; особое внимание уделяется проблеме возбуждения и подавления детерминированных и хаотических режимов колебаний посредством такого воздействия.

Отмечается, что изложенное может быть распространено на случаи квазипериодического и случайного воздействий.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 10-08-00201 и 09-08-00620).

Список литературы

1. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Наука, 1994. 319 с.

2. Selected Topics in Vibrational Mechanics / Ed. by I.I. Blekhman. Singapore: World Scientific, 2004. 452 p.

A GENERAL APPROACH TO THE ANALYSIS OF HIGH FREQUENCY ACTION ON DYNAMICAL SYSTEMS – OSCILLATORY STROBODYNAMICS

I.I. Blekhman

A general approach to the solution of problems of high frequency action on dynamical systems is formulated. Its applications to generic and specific models of dynamical systems employed in different sciences are considered. A brief review of known results and a number of new results are given. The definition of the oscillatory strobodynamics is given as an interdisciplinary field of knowledge, which explores the slow component of dynamics of a system in the presence of a high-frequency excitation.

Keywords: dynamical systems, high frequency action, slow motions, general approach, control.

УДК 62-50

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛОКОМОЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ С ПОДВИЖНЫМИ ВНУТРЕННИМИ ТЕЛАМИ

Н.Н. Болотник, Т.Ю. Фигурина

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

bolotnik@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматриваются локомоционные системы, состоящие из корпуса, взаимодействующего с внешней сопротивляющейся средой, и подвижных внутренних тел, которые взаимодействуют с корпусом, но не взаимодействуют со средой. Для этих систем строятся оптимальные периодические движения внутренних тел, при которых корпус движется с периодически изменяющейся скоростью с максимальным перемещением за период.

Ключевые слова: локомоционные системы, мобильные роботы, периодические движения, виброперемещение, оптимальное управление.

1. Оптимальное управление системой с одним внутренним телом

Рассматривается механическая система, состоящая из корпуса и внутреннего тела. Оба тела движутся поступательно вдоль горизонтальной прямой. Обозначим: x – смещение корпуса относительно среды, ξ – смещение внутреннего тела относительно корпуса, M – масса корпуса, m – масса внутреннего тела, $R(\dot{x})$ – сила сопротивления внешней среды движению корпуса. Предполагается, что функция $R(\dot{x})$ монотонно убывает и $R(0) = 0$. Движение корпуса подчиняется дифференциальному уравнению $(M+m)\ddot{x} = -m\ddot{\xi} + R(\dot{x})$. Будем искать T-периодическое относительное движение внутреннего тела $x(t)$, удовлетворяющее ограничению $|\ddot{\xi}| \le A$, и соответствующее ему движение корпуса $x(t)$ такое, что $\dot{x}(t)$ – T-периодична, а смещение за период – максимально. Период T задан.

Введем безразмерные переменные

$$v = \frac{M+m}{mAT}\dot{x}, \quad w = \frac{\dot{\xi}}{AT}, \quad u = \frac{\ddot{\xi}}{A}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{T},$$

$$r(v) = -\frac{1}{mA} R\left(\frac{mAT}{M+m} v\right)$$

и представим задачу оптимального управления следующим образом.

Задача. Для системы $\dot{v} = -u - r(v)$, $\dot{w} = u$ найти управление $u(t)$, которое удовлетворяет ограничению $|u| \le 1$ и максимизирует функционал $J = \int_0^1 v(\tau)d\tau$ при условиях $v(0) = v(1)$, $w(0) = w(1)$. Здесь точка обозначает производную по безразмерному времени $\tilde{t}$ (в дальнейшем тильда опускается). Функция $r(v)$ монотонно возрастает и $r(0) = 0$. В данной работе поставленная задача решена на основе принципа максимума для некоторых классов законов сопротивления $r(v)$.

Пусть $r(v)$ – нечетная функции, удовлетворяющая неравенству $r''(v)\operatorname{sign} v > 0$ или $r''(v)\times$ $\times\operatorname{sign} v < 0$, в частности $r(v) = k|v|^{\alpha}\operatorname{sign} v$, где $k > 0$ и $\alpha > 0$. Если $r''(v)\operatorname{sign} v > 0$, оптимальное управление на периоде $[0, 1]$ имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < t_1, \\ -1, & t_1 \le t < t_2, \\ -r(v_*), & t_2 \le t < 1, \end{cases}$$

скорость корпуса изменяется от $v_*(> 0)$ до $v_1(> 0)$ и обратно, причем $|v_*| < |v_1|$, и $v \equiv v_*$ на особом участке $[t_2, 1]$. Параметры t_1, t_2, v_* и v_1 определяются системой уравнений

$$r(v_1) - r(v_*) - r'(v_*)(v_1 - v_*) = 0,$$

$$2\int_{v_1}^{v_*} \frac{r(v_*) - r(v)}{1 - r^2(v)} dv = r(v_*),$$

$$t_1 = \int_{v_1}^{v_*} \frac{dv}{1 + r(v)}, \quad t_2 = 2\int_{v_1}^{v_*} \frac{dv}{1 - r^2(v)}.$$

Аналогичную структуру имеет оптимальное управление и в случае, когда $r''(v)\operatorname{sign} v < 0$.

2. Оптимальное управление системой с двумя внутренними телами

Рассматривается локомоционная система, состоящая из корпуса и двух внутренних тел.

Предполагается, что корпус движется вдоль прямой по шероховатой горизонтальной плоскости. Между плоскостью и корпусом действует сухое трение, подчиняющееся закону Кулона. Сухое трение является единственной внешней силой, действующей на систему, поэтому для управления движением системы надо уметь управлять силой сухого трения. Это можно сделать и с помощью только одного внутреннего тела, движущегося горизонтально. Однако при этом невозможно управлять нормальным давлением корпуса на плоскость, которое существенно виляет на величину силы сухого трения. Введение внутреннего тела, движущегося по вертикали, позволяет управлять нормальным давлением. Для описанной механической системы решается задача оптимального управления. В качестве управляющих переменных выступают ускорения внутренних тел относительно корпуса. На абсолютные величины этих ускорения налагаются ограничения. Предполагается, что в процессе движения не происходит отрыва корпуса от плоскости опоры. Это налагает дополнительные ограничения на абсолютную величину ускорения внутреннего тела, движущегося по вертикали, когда это ускорение направлено вниз. Строятся периодические движения внутренних тел, которые порождают периодическое по скорости движение корпуса и максимизируют перемещение корпуса за период, который считается фиксированным.

Доказано, что движение на периоде можно представить состоящим из двух интервалов. На первом интервале корпус движется вперед в желаемом направлении, а на втором – покоится. Движения корпуса назад при оптимальном управлении не происходит. На первом интервале каждое из управлений релейно (переключается между минимально допустимом и максимально допустимым значениями) и имеет не более одной точки переключения. На втором интервале оба управления постоянны. Задача оптимального управления сводится к максимизации квадратичной функции при линейных ограничениях на ее аргументы. Искомыми параметрами здесь являются длина интервала, на котором корпус движется вперед, и моменты переключения управлений. Данная постановка задачи не налагает ограничений на амплитуду колебаний внутренних тел относительно корпуса. Эти ограничения можно учесть, варьируя период движения внутренних тел в оптимальном управлении, построенном для фиксированного периода. Однако оптимальность модифицированного управления при этом не гарантируется. Детальные решения задачи приведены для двух предельных случаев, когда движения внутренней массы по вертикали не происходит и когда на движение внутренней массы по вертикали наложено только ограничение, препятствующее отрыву корпуса от плоскости опоры. В последнем случае движение внутреннего тела по вертикали позволяет более чем в четыре раза увеличить смешение корпуса за период по сравнению со случаем, когда движения внутреннего тела по вертикали не происходит. Это подтверждает целесообразность введения внутренних тел, движущихся по вертикали, в конструкцию локомоционных систем, приводимых в движение внутренними телами и движущихся по жестким сухим шероховатым поверхностям. Результаты раздела 2 опубликованы [1].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 11-01-00513.

Список литературы

1. Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю. Оптимальное управление прямолинейным движением твердого тела по шероховатой плоскости посредством перемещения двух внутренних масс // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 216–229.

OPTIMAL CONTROL OF LOCOMOTION SYSTEMS WITH MOVABLE INTERNAL BODIES

N.N. Bolotnik, T.Yu. Figurina

Locomotion systems that consist of a main body and internal bodies are considered. The main body interacts with a resistive external environment; the internal bodies interact with the main body but do not interact with the environment. For such systems, optimal periodic motions of the internal bodies are constructed to provide a velocity-periodic motion of the main body with a maximum displacement for the period.

Keywords: locomotion systems, mobile robots, periodic motion, vibration-driven motion, optimal control.

УДК 621.83

ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЦИКЛОВЫХ МЕХАНИЗМОВ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

 Е.С. Брискин, Я.В. Калинин, В.В. Чернышев

Волгоградский государственный технический университетг

dtm@vstu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Обсуждается задача повышения энергетической эффективности исполнительных цикловых механизмов робототехнических систем.

Рассматриваются одностепенные цикловые механизмы, движение которых описывается угловой координатой входного звена. На выходное звено механизма действует полезная сила сопротивления, которой соответствует обобщенная сила, зависящая от положения выходного звена. Режим работы двигателя – с постоянной угловой скоростью, что отвечает его энергетически оптимальной работе. Между приводом и цикловым механизмом устанавливается дополнительный механизм-корректор с переменным передаточным отношением, причем одному обороту выходного вала привода соответствует один оборот ведущего звена исходного механизма. Трением в системе механизмов пренебрегается.

Для повышения энергетической эффективности цикловых механизмов определяются условия, при которых механизм-корректор, не меняя траекторию и период движения рабочего органа исходного механизма, изменяет закон его движения в течение цикла и обеспечивает оптимальный, с точки зрения энергозатрат, режим работы механизма.

Дифференциальные уравнения движения рассматриваемой механической системы составляются с помощью уравнений Лагранжа с неопределенными множителями, а уравнения движения и параметры механизма, обеспечивающего минимальные потери в двигателе, определяются в результате решения оптимизационной задачи, в которой оптимизируемым функционалом является рассеяние энергии в двигателе. Составляются уравнения Эйлера с привлечением дополнительных изопериметрических условий.

Проведенный анализ показывает, что возможна постановка задачи о создании энергосберегающих цикловых механизмов. Структура и параметры энергосберегающего механизма обеспечиваются совокупным учетом трех факторов: характером изменения его кинетической энергии в пределах цикла, изменением полезной нагрузки в пределах цикла и характером движения его ведущего звена, а основной закон оптимального режима движения записывается в форме равенства подведенной к механизму мощности и мощности, затраченной на совершение полезной работы и на преодоление сил инерции.

Оценка потерь в электроприводе шагающего робототехнического комплекса «Восьминог-М» с движителями на базе цикловых механизмов, проведенная в соответствии с полученными соотношениями, показывает, что оптимальный режим обеспечивает уменьшение необратимых потерь в асинхронных электродвигателях робота на 15–20%.

Ключевые слова: энергетическая эффективность, цикловые механизмы шагания, уравнения Эйлера, неопределённый множитель Лагранжа.

Рассматривается одностепенной цикловой механизм, движение которого описывается координатой входного звена θ. На выходное звено механизма действует полезная сила сопротивления, зависящая от его положения, которой соответствует обобщенная сила $Q = Q(\theta)$. Режим работы двигателя – с постоянной угловой скоростью $\omega = \dot{\varphi}$, что отвечает его энергетически оптимальной работе.

Между приводом и цикловым механизмом устанавливается дополнительный механизм-корректор с переменным передаточным отношением $\theta = \theta(\varphi)$, причем одному обороту выходного вала привода соответствует один оборот ведущего звена исходного механизма. Трением в системе механизмов пренебрегается.

Определяются условия, при которых механизм-корректор, не меняя траекторию и период движения рабочего органа исходного механизма, изменяет закон его движения в течение цикла и обеспечивает оптимальный, с точки зрения энергозатрат, режим работы механизма.

Дифференциальные уравнения движения рассматриваемой механической системы составляются с помощью уравнений Лагранжа с неопределенными множителями

$$\begin{cases} J(\theta)\ddot{\theta}+\dfrac{1}{2}\dot{\theta}^2\dfrac{\partial J(\theta)}{\partial\theta}=\lambda-Q(\theta), \\ M-\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial\varphi}=0, \end{cases} \tag{1}$$

где $J(\theta)$ – переменный момент инерции исходного и дополнительного механизма; M – момент, развиваемый двигателем, λ – неопределенный множитель Лагранжа.

Для исключения зависимости инерционного коэффициента J от θ, вводится новая обобщенная координата ψ, удовлетворяющая уравнению $d\psi/d\theta=\sqrt{J(\theta)/J_0}$, где J_0 может быть произвольным. При J_0, выбранном из условия

$$2\pi\sqrt{J_0}=\int_0^{2\pi}\sqrt{J(\theta)}d\theta,$$

из (1) получаем

$$M\dot{\varphi}=J_0\ddot{\psi}\dot{\psi}+\overline{Q}(\psi)\dot{\psi}=\dot{T}+\overline{Q}(\psi)\dot{\psi}, \tag{2}$$

где $T=J_0\dot{\psi}^2/2$; $\overline{Q}(\psi)=Q(\theta(\psi))\sqrt{J_0/J(\theta(\psi))}$; $\overline{Q}(\psi)d\psi=Q(\theta)d\theta$.

Необратимые (тепловые) потери мощности W для различных типов двигателей по разному зависят от момента M. В общем случае $W = \alpha_0 + M\alpha_1 + M^2\alpha_2 + ... + M^n\alpha_n$, где α_n – постоянные, определяемые типом двигателя (n = 0, 1,…, N). Для решения поставленной задачи необходимо минимизировать функционал

$$A=\int_0^{\tau}\sum_{n=0}^{N}\alpha_n M^n dt$$

при дополнительном изопериметрическом условии $\int_0^{\tau}\dot{\psi}dt=2\pi$, где τ – период движения механизма. В результате из уравнения (2) находим уравнение оптимального с точки зрения энергетической эффективности режима движения механизма

$$\dot{T}+\overline{Q}(\psi)\dot{\psi}=Q_{\text{ср}}\omega \tag{3}$$

или, возвращаясь к прежним координатам,

$$\dot{T}+Q(\theta)\dot{\theta}=Q_{\text{ср}}\omega, \tag{4}$$

где $Q_{\text{ср}}=1/(2\pi)\int_0^{2\pi}Q(\theta)d\theta$.

Важно отметить, что полученные условия не зависят от характера зависимости тепловых потерь W от момента M, требуемого для осуществления полезной работы.

Абсолютная величина потерь зависит от параметров двигателя. Для оптимального режима

$$A_{\text{опт}}=\int_0^t\sum_{n=0}^{N}\alpha_n M^n dt=\int_0^t\sum_{n=0}^{N}\alpha_n Q_{\text{ср}}^n dt=$$
$$=\frac{2\pi}{\omega}\sum_{n=0}^{N}\alpha_n Q_{\text{ср}}^n. \tag{5}$$

Без коррекции закона движения ведущего звена исходного механизма $\omega=\dot{\varphi}$, тогда

$$A_{\text{опт}}=\sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha_n}{\omega}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial J}{\partial\theta}\omega^2+Q(\theta)\right]^n d\theta. \tag{6}$$

Анализ показывает, например, при $N=2$, что характерно для асинхронных электродвигателей, величина потерь (6) превышает потери (5) на

$$\Delta A=\frac{\alpha_2}{\omega^2}\left[\omega^4\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial J}{\partial\theta}\right)^2 d\theta+\int_0^{2\pi}(Q(\theta)-Q_{\text{ср}})^2 d\theta\right]. \tag{7}$$

Оценка потерь в электроприводе шагающего робототехнического комплекса «Восьминог-М» с движителями на базе цикловых механизмов, проведенная в соответствии с (7), показывает, что оптимальный режим обеспечивает уменьшение необратимых потерь в асинхронных электродвигателях робота на 15–20%.

Таким образом, проведенный анализ показывает, что возможна постановка задачи о создании энергосберегающих цикловых механизмов. Структура и параметры энергосберегающего механизма обеспечивается совокупным учетом трех факторов: характером изменения его кинетической энергии в пределах цикла, изменением полезной нагрузки в пределах цикла и характером движения его ведущего звена, а основной закон оптимального режима движения записывается в форме (4).

Работа выполнена при поддержке РФФИ и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы.

ENERGY EFFICIENCY OF CYCLIC MECHANISMS OF ROBOTIC SYSTEMS

E.S. Briskin, Ya.V. Kalinin, V.V. Chernyshev

The problem of improving the energy efficiency of the executive cyclic mechanisms of robotic systems is under consideration.
Cyclic mechanisms with one degree of freedom, whose motion is described by the angular coordinate of the leading link are considered. The output link of mechanism is acted upon by a useful resistance force, which corresponds to the generalized force, depending on the position of the output link. The engine works with a constant angular velocity. It corresponds to the energetically optimal performance. Between the drive and the cycle mechanism, an additional mechanism-corrector with variable transmission

ratio is installed, where one turn off the drive shaft corresponds to one turn of the driving link source mechanism. Friction in the system mechanisms is neglected.

To improve the energy efficiency of cyclic mechanisms, we determine the conditions under which a mechanism-corrector, without changing the trajectory and during the movement of the executive body of the original mechanism, changes the law of its motion during the cycle and provides the optimum in terms of energy consumption, operation mechanism.

Differential equations of motion of the considered mechanical system composed by the Lagrange equations with indefinite multipliers, and the equations of motion and parameters of a mechanism to ensure minimum loss of the engine are determined by solving an optimization problem in which optimizing functional is the energy dissipation in the engine. Euler equations are derived, involving additional isoperimetric conditions.

The analysis shows a possible formulation of the problem of creating energy-saving cycle mechanisms. Structure and parameters of energy-saving mechanism are provided by the combination of three factors: the nature of the change of its kinetic energy within a cycle, change of the payload within the cycle and the nature of the motion of its leading executive links, and the fundamental law of the optimum mode of motion is written in the form of equality of the input to the mechanism of power and the power consumed to perform useful work and to overcome the forces of inertia.

Evaluation of losses in the electric drive of walking robotic complex of «Vosminog-M» with propellers on the basis of cyclic mechanisms delineated in accordance with the relations obtained shows that the optimal mode provides a decrease of irreversible losses in induction motors of the robot by 15–20%.

Keywords: energy efficiency, cyclic walking mechanism, Euler's equation, uncertain Lagrange multiplier.

УДК 621.752.2

ВОЗМОЖНОСТИ СИСТЕМ ВИБРОЗАЩИТЫ НА БАЗЕ ИНЕРЦИОННОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЩЕЛЕВЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

А.Н. Брысин, А.Е. Шохин, А.В. Синев

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва

brysin@rambler.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Предложена модифицированная методика исследований виброизоляционных систем с инерционными преобразователями движения. Показаны возможности инерционных преобразователей. Определены условия работы инерционного канала в безкавитационном режиме.

Ключевые слова: анализ, виброизоляция, экспериментальные исследования, инерционный преобразователь, демпфирование.

Работа любой силовой установки характеризуется вибрациями, передающимися по элементам конструкции. Уровень вибраций зависит от конструктивных особенностей и энергетических характеристик установки. Модернизация существующих систем осуществляется за счет установки проверенных серийных систем на новые, более эргономичные и мобильные шасси, либо установкой более производительных силовых установок на существующие шасси с размещенным на них оборудованием. При этом возникает задача снижения передачи колебаний от вновь установленных агрегатов на элементы конструкции. Как правило, эти паразитные воздействия проявляются на рабочей частоте и кратных ей гармониках. Размещение на путях распространения вибраций виброизоляторов позволяет уменьшить амплитуды передаваемых воздействий и приводит к увеличению перемещений объектов относительно друг друга. Использование резиновых виброизоляторов в диапазоне от 5 до 300 Гц без специальных блоков преобразования незначительно снижает передачу энергии. Дальнейшее увеличение эффективности требует уменьшения жесткости системы. В свою очередь, снижение жесткости приводит к увеличению перемещений. Решением проблемы является применение систем преобразования движения. Идея применения гидравлических преобразователей заключается в использовании дополнительной пружины и массы на гидравлическом рычаге, которые включаются в работу на определенной частоте и снижают общую динамическую жесткость. На всех остальных частотах система ведет себя как система с гидравлическим демпфером и дополнительной жесткостью.

Создание дополнительной инерции ограничено только возможностью запирания канала и скоростями, при которых возможен переход в турбулентный режим. Представляет интерес исследование системы с инерционным каналом. Устройство с инерционным преобразователем должно обладать возможностью снижать передачу воздействия на резонансной частоте и обеспечивать возможность уменьшения воздействий на низких частотах в диапазоне рабочих частот системы. Решение проблемы турбулентных течений сводится к снижению скоростей течения за счет увеличения диаметра инерционных каналов СВИП (системы виброизоляции с инерционным преобразователем). Наиболее подходящим вариантом является применение систем с инерционными преобразователями, настраиваемыми на область рабочих частот. Для повышения инерционного эффекта необходимо снизить демпфирующие свойства системы. Возникает противоречивое требование увеличить диаметр канала и уменьшить его длину. Решением является применение больших соотношений между диаметром камеры и диаметром канала в сочетании с переносом функции демпфирования в специальные поршневые элементы с щелевыми демпфирующими каналами.

В ходе экспериментальных исследований были проведены испытания комбинированной системы, состоящей из резиновой обечайки и камеры с поршневыми демпфирующими элементами. На рис. 1 представлена блок-схема лабораторной установки, специально разработанной для проведения исследований, где *1* – контроллер, *2* – ПО

VibrationVIEW, *3* – ПО LabView 8.2, *4* – плата сбора данных NI DAQCard-6024E, *5* – блок коннекторов NI BNC-2110, *6* – ВЭДС-400, *7* – усилитель заряда РШ2734Э, *8* – акселерометры АР39, *9* – подвижный стол вибростенда. Объект испытаний жестко закреплен на подвижном столе вибростенда ВЭДС-400. Для измерения вибрации используются два пьезоакселерометра АР39. Для согласования сигналов акселерометров с измерительной аппаратурой применяется усилитель заряда РШ2734Э.

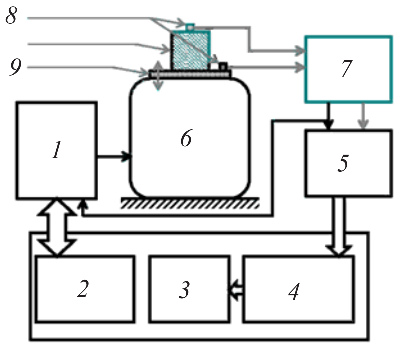


Рис. 1

В процессе исследований ускорение на стенде варьировалось в диапазоне 0.25–0.75 Гц.

Передаточные функции системы виброзащиты представлены на рис. 2: кривая *1* – передаточная функция резинового виброизолятора без инерционного преобразователя, *2* – передаточная функция резинового виброизолятора с инерционным преобразователем.

При увеличении массы собственная частота сместится в более низкую область частот и будут иметь место повышенные перемещения. Чтобы избежать этого, в физическую экспериментальную модель вводится дополнительная инерционность. Добавляется дополнительная камера, инерционный канал, образуемые объемы заполняются жидкостью.

В дополнительной камере применяется система, состоящая из плавающих поршней, через упругую связь соединяемых с корпусом второй дополнительной камеры. Поскольку основное демпфирование осуществляется в системе сдвоенных плавающих поршней, удается снизить общее демпфирование системы. Разделение в физической модели диссипативных и инерционных свойств и включение диссипативных блоков только при работе в зоне настройки СВИП позволяет повысить визуализацию экспериментальных исследований. Разделение диссипативных кольцевых щелей и инерционных свойств в канале позволяет использовать инерционные каналы большого диаметра и длины, настраивать систему на дорезонансный режим и использовать пружины с жесткостями выше жесткости виброизолятора. Увеличение жесткости в 7 раз позволяет использовать систему с объектами массой 60 кг при тех же перемещениях 5 мм. Кривая *2* демонстрирует возможность снижения передачи на частотном диапазоне от 150 до 235 Гц (полоса гашения 85 Гц). За счет применения гидравлического преобразователя достигается уменьшение передачи на 8 дБ

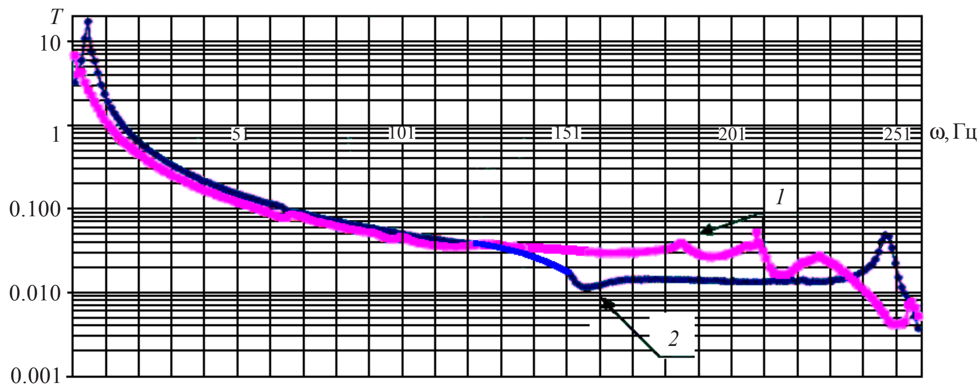


Рис. 2

Передаточная функция резинового изолятора характеризуется невысоким уровнем собственных резонансов, которые проявляются на частотах 170, 210, 220 Гц и выше.

При начальной жесткости 10^5 Н/м, позволяющей обеспечить перемещения 5 мм, на частоте 10 Гц для объекта массой 10 кг виброизолятор обеспечивает эффективное гашение вибраций.

на широкой полосе частот по сравнению с резиновым виброизолятором. Это достигнуто за счет использования дополнительного демпфирования, включаемого в работу только на требуемом диапазоне частот. Мощность вибраций, передаваемая в настраиваемом диапазоне частот, будет снижена в 6 раз.

Применение жидкости позволяет уменьшить

амплитуды механических резонансов, обусловленных конструкцией резинового виброизолятора. Ниша их использования – виброзащита в диапазоне частот от 1 до 500 Гц.

Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 11-08-00470-а.

POSSIBILITIES OF THE VIBRO-PROTECTION SYSTEMS BASED ON THE INERTIAL CONVERTER WITH AN ADDITIONAL SLOT-HOLE DAMPING

A.N.Brysin, A.E. Shohin, A.V. Siniov

The modified technique of investigating vibro-prortection systems with inertial converters of motion isp resented. Possibilities of inertial converters are shown. Working conditions of the inertial channel in a non-cavitation mode are defined.

Keywords: the analysis, vibration insulation, experimental researches, the inertial converter, damping.

УДК 517.977

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИКИ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Н.Н. Бутенина

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

n.n.butenina@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Исследование решений неавтономных динамических систем с успехом проводится, как известно [1], численно-аналитическим способом с использованием математического аппарата метода точечных отображений и качественной теории дифференциальных уравнений. В результате разработаны подходы для отыскания периодических и стохастических решений дифференциальных уравнений, описывающих работу различных механизмов и приборов, а также указаны различные типы бифуркаций, происходящих в динамических системах. Для исследования указанных выше неавтономных динамических систем применяются качественные методы теории управляемых динамических систем [2].

Ключевые слова: управляемая динамическая система, контактная кривая, область управляемости, область достижимости.

Рассматривается неавтономная динамическая система вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_0(x, y) + f(t)P_1(x, y), \\ \dot{y} &= Q_0(x, y) + f(t)Q_1(x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

где $a \le f(t) \le b$.

Точку (x^*, y^*, t^*) назовем особой точкой системы (1), если в этой точке правые части системы (1) обращаются в ноль. Траектории системы (1), заканчивающиеся (начинающиеся) в особой точке, назовем особыми траекториями. Если в (1) положить $f(t) = \mu \equiv \text{const}$, получим вспомогательную автономную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_0(x, y) + \mu P_1(x, y), \\ \dot{y} &= Q_0(x, y) + \mu Q_1(x, y). \end{aligned} \tag{2}$$

Известно [2], что все особые точки системы (2) расположены на контактной кривой $F = P_0Q_1 - P_1Q_0 = 0$. При увеличении μ особая точка с индексом Пуанкаре, равным $+1(-1)$, сдвигается по контактной кривой вправо (влево) по отношению к $\operatorname{grad} F$ в рассматриваемой точке. Векторное поле системы (2) в точке, где $F \ne 0$, вращается при увеличении μ в положительном (отрицательном) направлении, если $F > 0$ $(F < 0)$ [3]. Именно эти свойства используются при исследовании структуры окрестности особых точек.

Поведение решений системы (1) изучается с помощью соответствующих вспомогательных автономных систем (2), а структура окрестности особой точки – методом сравнения различных семейств управляемых динамических систем (УДС) [4]. Особые точки и особые траектории изучены в системах с ударными взаимодействиями вида, приведенного в [5]:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = f(t), \ x < x_0, \\ \dot{x}^+ = -R\dot{x}^-, \ x = x_0, \ \dot{x} > 0, \end{cases} \tag{3}$$

$$0 < R < 1, \ \alpha > 0.$$

Из вида системы уравнений (3) следует, что все особые точки этой системы лежат на контактной кривой $y = 0$ УДС:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x + u(t), \end{cases} \tag{4}$$

где значения управления $u(t)$ принадлежат отрезку $[a, b]$. Особые точки неавтономной системы (3) принадлежат отрезку $y = 0$, $\beta \le x \le b/\beta$. Очевидно, что какую бы точку x^+ особого интервала ($y = 0$, $\beta < x < b/\beta$) системы (4) мы не взяли, всегда можно указать точку (x^0, y^0, t^0) такую, что решение системы (3) с начальными условиями (x^0, y^0, t^0) в момент времени t^+ приходит в особую точку $(x^+, 0)$ плоскости (x, y).

Прохождение фазовой траектории через особую точку неавтономной системы резко изменяет характер решения и может привести к хаосу.

Рассмотрим пример [6] конкретной неавтономной системы – системы (3) при $f(t) = A\sin t$. Вспомогательная автономная система

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x + \mu, \\ \alpha, \beta > 0, \end{cases} \tag{5}$$

имеет единственное состояние равновесия ($x = \mu/\beta$, $y = 0$), которое является устойчивым фокусом, если $\alpha < 2\sqrt{\beta}$, устойчивым узлом, если $\alpha > 2\sqrt{\beta}$, и вырожденным узлом при $\alpha = 2\sqrt{\beta}$. При фиксированном $t = t^{+}$, получаем вспомогательную автономную систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\alpha y - \beta x + f(t^{+}), \\ \alpha, \beta > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Областью управляемости [2] системы (4) на особый интервал является вся плоскость. Областью достижимости [2] с особого интервала является некоторая ограниченная область, границей которой является замкнутая траектория *nm*-системы. Область достижимости с особого интервала рассматриваемой управляемой системы является непокидаемой зоной для системы (6). Особая точка неавтономной системы, не совпадающая с границей особого интервала соответствующего параметрического семейства, будет иметь на плоскости (x, y) вид точки возврата (рис. 1).

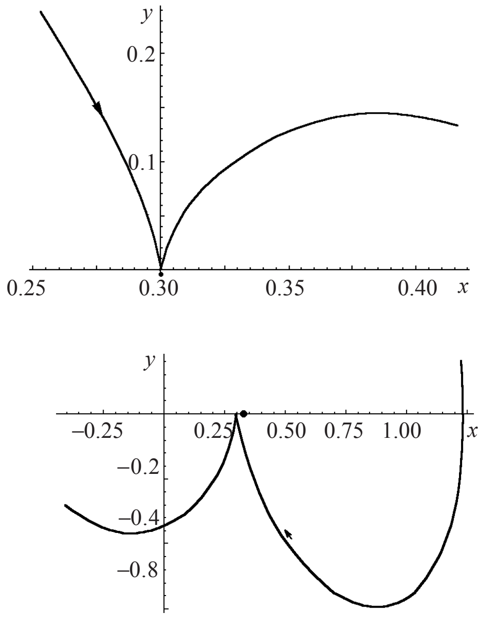


Рис. 1

Список литературы

1. Фейгин М.И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994. 286 с.

2. Байтман М.М // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14, №4. С. 579–593.

3. Бутенина Н.Н., Сизова Н.А. Особые интервалы управляемых динамических систем второго порядка // Вестник ННГУ. Серия Математическое моделирование и оптимальное управление. Н. Новгород, 1997. С. 108–115.

4. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.-Ижевск, 2002. 448 с.

5. Беспалова Л.В. К теории виброударного механизма // Изв. АНСССР. ОТН. №5. 1957. С. 3–14.

6. Бутенина Н.Н., Альтшуллер А.И. Исследование неавтономной динамической системы с ударом // Модели, методы и программные средства: Тр. Итоговой науч. конф. Нижний Новгород, 2007. С. 57–60.

APPLICATION OF THE THEORY OF CONTROLLED DYNAMICAL SYSTEMS TO THE INVESTIGATION OF THE DYNAMICS OF NON-AUTONOMOUS SYSTEMS

N.N. Butenina

The qualitative methods of the theory of controlled dynamical systems (CDS) are applied to investigate nonlinear dynamical systems of the second order. The investigation is carried out by means of a hybrid method that comprises the analytical and numerical approaches. The approaches are developed for finding the periodic and more complex solutions of the dynamical systems, which describe the mechanics of engineering mechanisms. Various types of bifurcations taking place in the CDS under consideration are discussed.

Keywords: controlled dynamical system, contact curve, controllability domain, approachability domain.

УДК 521.1;523.2;523.4

О РАЗВИТИИ РАБОТ ПРОФЕССОРА М.Л. ЛИДОВА ПО ЭВОЛЮЦИИ СПУТНИКОВЫХ ОРБИТ В ПРИМЕНЕНИИ К ДАЛЕКИМ СПУТНИКАМ ПЛАНЕТ-ГИГАНТОВ (к 85-летию со дня рождения)

М.А. Вашковьяк

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

vashkov@keldysh.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Посвящается памяти выдающегося ученого-механика, лауреата Ленинской премии, профессора Михаила Львовича Лидова. Его работы по эволюции спутниковых орбит получили свое развитие в связи с исследованиями орбитальной динамики относительно недавно открытых многочисленных далеких спутников планет-гигантов. В числе других обнаружено заметное количество так называемых апсидально-либрационных орбит, находящихся в условиях резонанса Лидова – Козаи. Для анализа эволюции спутниковых орбит под действием гравитационных возмущений внешних тел М.Л. Лидовым была детально изучена модель двукратно осредненной задачи Хилла. Автором выполнено ее уточнение путем построения решений третьего и четвертого порядков относительно малого параметра – отношения средних движений планеты и спутника. Построенные решения дали возможность более точно и на большем временном интервале аналитически описать эволюцию спутниковых орбит с большими апоцентрическими расстояниями, сравнимыми с радиусом сферы Хилла планеты относительно Солнца.

Ключевые слова: эволюция орбит, далекие спутники, резонанс Лидова – Козаи.

Начиная с 1997 года, с помощью наземных наблюдений были открыты более ста внешних спутников планет-гигантов. Для выявления основных особенностей эволюции необычных орбит этих спутников оказалось возможным использовать известную модель ограниченной круговой задачи трех тел (Солнце – планета – спутник). В первом (главном) приближении долгопериодическая эволюция спутниковой орбиты определяется возмущающей функцией задачи, осредненной независимым образом по наиболее быстрым переменным – средним долготам спутника и возмущающего тела (Солнца). Исследование двукратно осредненной задачи в приближении Хилла, выполненное М.Л. Лидовым в 1961 году [1], позволило свести проблему к изучению поведения фазовых траекторий в плоскости (аргумент перицентра – эксцентриситет) в зависимости от параметров задачи (констант первых интегралов). Стационарная особая точка в этой плоскости и либрационное изменение аргумента перицентра в специальной небесно-механической литературе получило название «резонанс Козаи» по имени японского ученого Y. Kozai, исследовавшего астероидный вариант задачи, но годом позже [2]. Поскольку в астероидном случае качественные особенности, выявленные М.Л. Лидовым, полностью сохраняются, было бы справедливым, как предложил профессор А.И. Нейштадт, использовать название «резонанс Лидова – Козаи». В последнее время этот термин уже нередко можно встретить в статьях, связанных с исследованием эволюции орбит внешних спутников планет-гигантов. Как оказалось, в спутниковых системах либрационным характером изменения аргументов перицентров обладают орбиты целого ряда внешних спутников, хотя подобное свойство является достаточно редким даже для многотысячного ансамбля астероидных орбит. Анализом двукратно осредненной задачи Хилла выявлены апсидально-либрационные орбиты внешних спутников J46, S22, S24, U23, N11, N13. Все они служат яркими примерами природной реализации резонанса Лидова – Козаи.

В статьях [3, 4] модель двукратно осредненной задачи Хилла была уточнена путем учета в вековой части возмущающей функции слагаемых соответственно третьего и четвертого порядков относительно малого параметра – отношения средних движений планеты и спутника. Полученный в форме Лидова один из первых интегралов эволюционной задачи позволил, в частности, наглядно представить в фазовой плоскости [ω – аргумент перицентра, e – эксцентриситет] (рис. 1) области, соответствующие траекториям соударения спутника с планетой конечного радиуса.

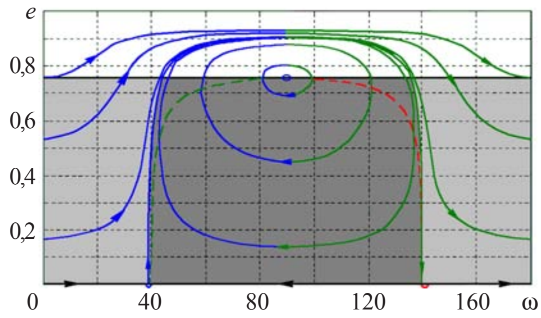


Рис. 1

Горизонтальная прямая, проходящая через особую точку – линия критического эксцентриситета циркуляционных (светлая тонировка) и либрационных (темная тонировка) орбит.

Решение 4-го порядка дало возможность уточнить аналитические зависимости от времени элементов эволюционирующих орбит спутников по сравнению с известными ранее шениями. Для орбиты спутника Нептуна N13 (рис. 2) решение второго порядка или двукратно осредненной задачи Хилла ω(2) (жирная линия) даже качественно отличается от результатов численного интегрирования строгих уравнений движения (тонкая линия).

В то же время решение 4-го порядка ω(4) (жирная линия на нижнем фрагменте), кроме качественного, дает и хорошее количественное совпадение на длительном интервале времени 5 тыс. лет.

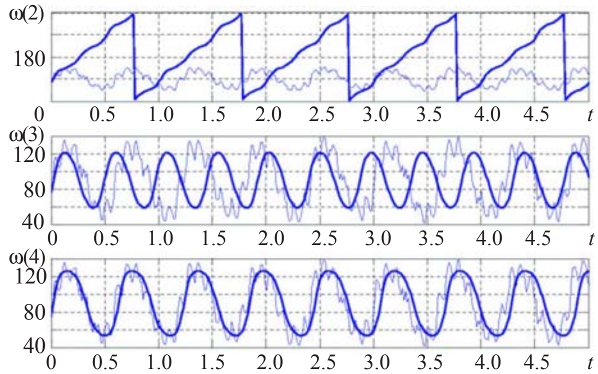


Рис. 2

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках международного гранта № 07-02-92169-НЦНИ_а и гранта научной школы № НШ-6700.2010.1.

Список литературы

1. Лидов М.Л. // Искусственные спутники Земли. 1961. Вып. 8. С. 5–45.

2. Kozai Y. // Astronomical Journal. 1962. V. 67. P. 591–598.

3. Вашковьяк М.А., Тесленко Н.М. // Письма в Астрономический журнал. 2009. Т. 35. С. 934-950.

4. Вашковьяк М.А. // Астрономический вестник. 2010. Т. 44. С. 560–573.

ON THE DEVELOPMENT OF PROFESSOR M.L. LIDOV'S WORKS ON THE EVOLUTION OF SATELLITE ORBITS TOWARD DISTANT SATELLITES OF THE GIANT-PLANETS. (COMMEMORATING THE 85TH BIRTHDAY ANNIVERSARY)

M.A. Vashkov'yak

This paper is devoted to the memory of prominent scientist-mechanician, laureate of Lenin reward, Professor M.L. Lidov. His works on the evolution of satellite orbits which were carried out fifty years ago have not lost significance up to day. They were developed after the recent discoveries of numerous distant satellites of the giant-planets. Among them few so called apsidal-librating orbits which evaluate in the conditions of known Lidov – Kozai resonance are discovered. In 1961 the model of a double-averaged Hill problem was studied by M.L. Lidov in details for the investigation of the evolution of satellite orbits under the influence of gravitational perturbations of external bodies. Later his improvement was carried out by constructing the solutions of 3rd order in regard to small parameter – the relation of mean motions of the planet and the satellite. One of the first integrals is received in Lidov's form and on its basis the qualitative analysis of evolutionary equations and the intersect conditions satellite orbits with the surface of spherical planet having finite radii was carried out. Then the new constructive-analytic solution of the evolutionary problem was proposed. In contrast to previous solutions it takes into account approximately the set of 4th power additive in the secular part of perturbing function. With the help of constructed solution it is possible to describe analytically (more precisely and on longer time interval) the evolution of satellite orbits which have great apocentric distance comparable with the radii of planetary Hill sphere with regard to the Sun.

Keywords: orbital evolution, distant satellites, Lidov–Kozai resonance.

УДК 531/534, 531.3, 534.1

ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ПОДВОДНОГО ВЕРТИКАЛЬНОГО ГИДРОТРАНСПОРТА

***С.Н. Веричев*[1], *А.В. Метрикин*[2], *H. Hendrikse*[2], *R.G. van de Ketterij*[3]**

[1]Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
[2]Delft University of Tehnology (Holland)
[3]MTI Holland B.V.

s_veritchev@front.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Подводные месторождения морей и океанов богаты залежами серебра, золота, меди, цинка, свинца, газовых гидратов и других полезных ископаемых. Наиболее ценные минералы находятся на больших глубинах, начиная от 1000 метров и более. Таким образом, ведущие оффшорные компании в настоящее время занимаются проектированием систем для освоения глубоководных месторождений полезных ископаемых дна мирового океана. Глубоководная добыча минералов является в целом сложной задачей и, несмотря на ряд относительно успешных научно-исследовательских проектов, она никогда еще не была реализована в коммерческих масштабах. Одна из ключевых проблем проектирования заключается в понимании и предотвращении проблем, связанных с динамикой системы подводного вертикального гидротранспорта (СПВГ), осуществляющей транспортировку шлама (смеси воды и твердой фракции) с морского дна на добычное судно. СПВГ состоит из вертикального погружного трубопровода, через который шлам транспортируется наверх, и некоторого числа погружных грунтонасосных станций, которые создают необходимый профиль давления в трубопроводе. СПВГ подвержена ряду динамических возмущений, таких как движения судна, поток шлама в трубопроводе, подводные течения, а также корректировка положения нижнего конца вертикального трубопровода. Таким образом, для корректного описания динамики СПВГ необходимо рассмотреть математическую модель, учитывающую влияние всех вышеупомянутых механизмов возбуждения, что и является предметом данного исследования.

Ключевые слова: глубоководная добыча, вихревая вибрация, взаимодействие текучая среда-конструкция, гидроперенос, система вертикального переноса.

Истощение континентальных запасов полезных ископаемых вынуждает промышленность рассматривать возможность освоения подводных месторождений, которые, как известно, богаты такими полезными ископаемыми, как цинк, медь, серебро, свинец, марганец, фосфаты, алмазы и др. (рис. 1).

Рис. 1. Типы полезных ископаемых дна мирового океана

Так как цены и спрос на природные ресурсы непрерывно растут, то становится экономически целесообразно разрабатывать глубоководные месторождения. В конце XX века интерес проявлялся к разработкам месторождений железомарганцевых конкреций и кобальтомарганцевых корок, в настоящее же время в свете последних технологических разработок основное внимание уделяется гидротермальным сульфидным рудам, богатым цинком и медью, которые в большинстве случаев могут быть найдены на дне Атлантического и Тихого океанов. Эксплуатация этих месторождений тормозится, в основном, в силу технических сложностей, связанных непосредственно с разработкой и доставкой на поверхность этих полезных ископаемых. В большинстве случаев комплекс для глубоководной добычи полезных ископаемых из трех основных компонентов: донного краулера, осуществляющего разработку и/или сбор материала, системы подводного вертикального гидротранспорта (СПВГ) и добычного судна, одной из функций которого является обогащение руд и отделение хвостов (рис. 2).

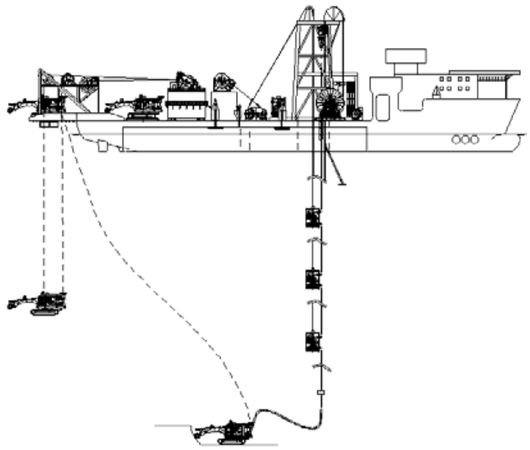


Рис. 2. Комплекс для глубоководной добычи полезных ископаемых

В зависимости от особенностей подводного месторождения, а также свойств добываемого материала возможны качественно различные технические реализации СПВГ. Один из наиболее перспективных вариантов СПВГ представляет собой вертикальный трубопровод с некоторым числом установленных на нем погружных грунтонасосных станций. В реальных условиях, динамика СПВГ и, как следствие, ее усталостный ресурс существенным образом зависят от следующих источников возмущений:

– колебаний, вызванных течением шлама в трубопроводе;

– колебаний, вызванных вихреобразованием (КВВ), как следствие подводных течений;

– динамических возмущений, вызываемых погружными грунтонасосными (бустерными) станциями;

– динамических возмущений, вызываемых системой позиционирования СПВГ, корректирующей, в частности, положение ее конца;

– гидродинамического сопротивления жидкости, окружающей СПВГ;

– движения судна;

– прямого и непрямого действия поверхностных волн;

– профиля давления в трубопроводе и его временных флуктуаций.

Хорошо известно, что колебания консольно закрепленных трубопроводов со свободным концом, всасывающих жидкость, могут быть неустойчивыми в случае, если скорость прокачки достаточно велика. Наиболее ярким практическим примером таких колебаний являются неустойчивые колебания труб системы охлаждения судна, осуществляющего добычу и сжижение природного газа. В случае СПВГ ситуация усугубляется большей плотностью прокачиваемой смеси, ее пространственно-временной неоднородностью, существенно большим соотношением длины к радиусу трубопровода, а также наличием погружных грунтонасосных станций, существенно влияющих на два основных параметра, определяющих устойчивость всей системы: натяжение трубопровода и профиль внутреннего давления. Кроме того, флуктуации плотности прокачиваемого шлама, а также концентрации твердой фракции в смеси вызывают соответствующие флуктуации давления, производимого бустерными станциями. В случае достаточно сильных подводных течений имеют также место КВВ. Для снижения КВВ на внешнюю сторону трубопровода обычно устанавливаются спиралевидные ребра. В то же время, присутствие данных гасителей также приводит к существенному увеличению гидродинамического сопротивления. Адекватное моделирование КВВ уже само по себе представляет собой весьма сложную задачу.

С точки зрения моделирования основной трудностью является, безусловно, интегральное описание динамического поведения СПВГ как следствие воздействия всех вышеуказанных источников возмущений (рис. 3).

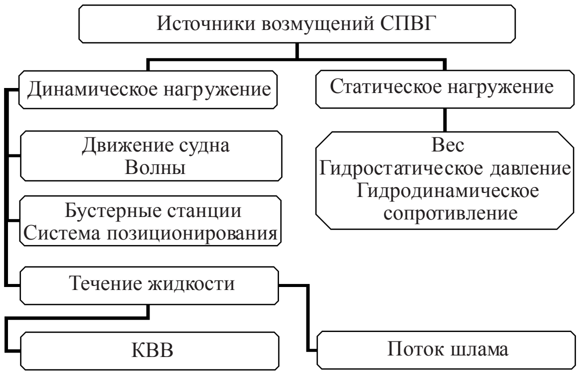


Рис. 3. Схемы зависимости СПВГ от источников возмущений

Интегральное описание является ключевым элементом, так как динамический отклик СПВГ не является просто суперпозицией динамических откликов различного типа. Наоборот, отклик на один источник возмущений может существенно влиять на другой. Например, неоднородный поток шлама ведет к изменению собственных частот системы, тем самым изменяя условия, способствующие возникновению КВВ. Таким образом, для того чтобы разработать надежную СПВГ, совершенно необходимо уметь адекватно моделировать ее динамику.

DYNAMICS OF THE SUBSEA VERTICAL HYDRAULIC TRANSPORT SYSTEM

S.N. Verichev, A.V. Metrikine, H. Hendrikse, R.G. van de Ketterij

Extractable deposits of silver, gold, copper, zinc, lead, gas hydrates and other valuable materials can be found at the ocean floor. The most valuable minerals are found at large depths, starting from 1000 m and deeper. Therefore, the leading offshore companies are currently designing systems and tools for deep sea mining. The mining at the desired depth of a few kilometers is a great challenge though as it has never been attempted before at the commercial scale. One of the fundamental design challenges lays in the understanding of and preventing from the problems associated with the dynamics of a subsea Vertical Transport System (VTS). The function of the VTS is to transport slurry (a thin mixture of water and finely divided minerals) from the seafloor to the mining support vessel. The VTS consists of a vertically hanging submerged pipe through which the slurry is transported upwards and a number of booster stations which maintain the pressure in the pipe that enables the desired slurry flow. The VTS system is subject to a number of the dynamic excitations such as the vessel motion, the slurry flow in the pipe, the sea current and a propulsion device that is envisaged to control the position of the lower end of the pipe at the desired location. To design a reliable VTS system the effect of all the above-mentioned excitation mechanisms has to be accounted for.

Keywords: deep sea mining, vortex induced vibrations, fluid-structure interaction, hydraulic transport, vertical transport system.

УДК 621.31

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К СНИЖЕНИЮ УРОВНЯ ВИБРАЦИЙ ПОГРУЖНЫХ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ НАСОСОВ ДЛЯ НЕФТЕДОБЫЧИ

О.А. Волоховская

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва

OlgaAVol@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Предложен и обоснован подход к снижению уровня вибрации скважинных электрических центробежных насосов (ЭЦН) от их неуравновешенных вращающихся деталей как основного фактора, определяющего виброактивность ЭЦН. Подход базируется на принципе селективной сборки (определении последовательности расположения рабочих колес на оси вала, возможно более близкой к оптимальной по уровню вибраций конструкции).

Ключевые слова: уровень вибраций, центробежные насосы, силы неуравновешенности, многоступенчатая конструкция, селективная сборка.

Скважинные электрические центробежные насосы (ЭЦН) являются многосекционными и многоступенчатыми машинами. Рабочим органом ЭЦН служит насосная ступень, состоящая из рабочего колеса и направляющего аппарата. Каждая секция содержит до ста ступеней, а система в сборке – три секции и более. Вибрационная активность насосов представляет собой один из основных факторов, влияющих на их надежность и ресурс. Анализ ЭЦН как динамической системы показал, что основным видом колебаний в системе являются колебания под воздействием сил от неуравновешенности рабочих колес, имеющие частоту, равную частоте вращения вала.

Предложен подход к снижению уровня вибрации ЭЦН от неуравновешенных вращающихся деталей насоса, базирующийся на принципе оптимального с точки зрения виброактивности конструкции расположения колес на оси вала (принципе селективной сборки).

Предлагаемый подход к снижению виброактивности насосов

Суть предлагаемого подхода поясним на модельном примере. В [1] было показано, что как динамические системы секция ЭЦН, а также ее ротор и статор близки к схематизации их стержнями постоянной жесткости и плотности. Это позволяет оценить собственные частоты и формы колебаний ротора по стержневой теории. Для секции насоса ДВС5-50, состоящей из трех пролетов, каждый из которых опирается на две шарнирные опоры, имеем следующие значения параметров: погонная масса $v = 8$ кг/м; диаметр вала d =17 мм; длина пролета l = 1 м; модуль упругости материала вала (сталь) $E = 10^{11}$ Па. Для первых трех собственные частот f_k и соответствующих им форм колебаний $\varphi_k = \sin(\pi kz/l)$ $(k = 1, 2, 3)$ получим значения: $f_1 = 15.9$ Гц, $f_2 =$ $= 63.6$ Гц, $f_3 = 143.1$ Гц. Поскольку частота возбуждения (оборотная частота электродвигателя равна $f_в = 48$ Гц) лежит между 1-й и 2-й собственными частотами, то ею будут возбуждаться в основном 1-я и 2-я главные формы колебаний (то есть вал относится к категории гибких валов).

Для того чтобы эти формы не возбуждались, необходимо, чтобы возбуждающая нагрузка от неуравновешенности была распределена по оси вала по закону одной из высших форм колебаний, начиная с третьей формы. Это обстоятельство и положено в основу предлагаемого подхода.

Постановка задачи об оптимальном размещении колес на валу

Будем считать, что у комплекта колес секции насоса измерены эксцентриситеты $\mathbf{e}^{(i)}$ для каждого колеса с номером i и определены их проекции $e_1^{(i)} = e^{(i)}\cos\gamma_i$, $e_2^{(i)} = e^{(i)}\sin\gamma_i$ на ось x_1^i, направленную в плоскости середины шпоночного паза, и x_2^i в перпендикулярном направлении, где γ_i – угол между вектором $\mathbf{e}^{(i)}$ и осью x_1^i. Величина J пропорциональна разности работ возбуждающих сил неуравновешенности по осям x_1^i и x_2^i и равна:

$$J = |A_1 - A_2|, \quad A_1 = \left| \sum_{i=1}^{m} e_1^{(i)} \sin(\pi k z_i / l) \right|;$$

$$A_2 = \left| \sum_{i=1}^{m} e_2^{(i)} \sin(\pi k z_i / l) \right|,$$

где z_i – координата центра тяжести i-го колеса. Не останавливаясь подробно на энергетическом обосновании, заметим, что оптимальное расположение колес на валу должно соответствовать минимуму J.

Алгоритм определения оптимальной последовательности колес

Решение задачи о выборе первого приближения для оптимального распределения колес вдоль оси вала рассмотрим на примере ротора упомянутой выше секции насоса ДВС5-50, имеющей 96 рабочих колес (по 32 колеса в каждом пролете). Пусть гистограммы распределения параметров **e** и γ имеют вид, представленный на рис. 1 и рис. 2 соответственно. При этом в первую группу колес входят 6 колес с наименьшими эксцентриситетами, остальные 90 колес разбиты на 5 групп по 18 колес в каждой.

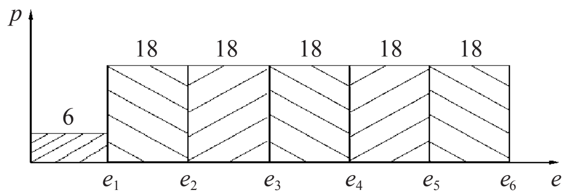


Рис. 1

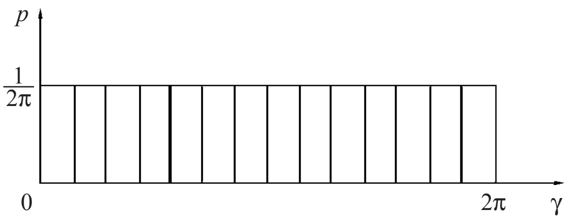


Рис. 2

На рис. 3 изображена 3-я форма колебаний ротора с нумерацией колес и указаны точки расположения их центров масс. В соответствии с гистограммой эксцентриситетов (см. рис. 1), размещение на оси вала 6 колес из первой группы (с наименьшими эксцентриситетами) следует осуществить в узлах формы на рис. 3, исключая узлы, совпадающие с центром подшипников. Первым шести колесам с минимальной неуравновешенностью при этом должны быть присвоены номера: i = 11; 22; 43; 54; 75; 86 (см. рис. 3). Колеса шестой группы, имеющие наибольшую неуравновешенность, следует расположить в зонах максимальных абсолютных значений формы колебаний.

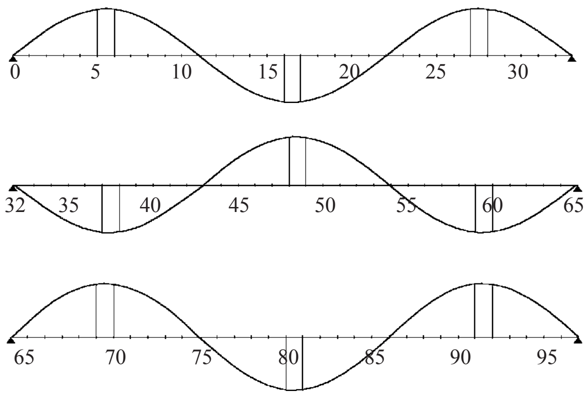


Рис. 3

На рис. 4 изображены предположительные направления векторов-эксцентриситетов этой группы колес. Для того чтобы обеспечить уравновешивание ротора по обеим осям, рабочие колеса в зоне максимальных смещений следует располагать попарно, с тем чтобы в каждой паре находились приблизительно ортогональные вектора эксцентриситетов. Например, колесо с неуравновешенностью по оси x_1' (рис. 4) следует расположить на 5-й позиции (рис. 3), а рядом с ним на позиции 6 должно быть расположено колесо, у которого вектор-эксцентриситет направлен по оси x_2'. Соответственно на позиции 16 (рис. 3) следует расположить колесо с эксцентриситетом, направленным по оси x_1' в отрицательном направлении, а рядом с ним на позиции 17 – колесо с эксцентриситетом, ориентированным по отрицательному направлению оси x_2' (рис. 4).

Рис. 4

Таким расположением колес с наибольшими неуравновешенностями будет обеспечена уравновешенность вала на участке первой волны от точки *1* до точки *21*. Аналогично выбирается расположение колес для уравновешивания остальных участков вала. Это должны быть колеса 27, 28, 37, 38, 48, 49, 59, 60, 69, 70, 80, 81, 91, 92 с эксцентриситетами, указанными на рис. 4.

По тому же принципу должны быть размещены колеса с неуравновешенностями, попадающие в 2, 3, 4 и 5 группы гистограммы (рис. 1). Так, колеса из 2-й и 3-й группы должны быть размещены вблизи узлов 3-й формы собственных колебаний вала (точки 1, 2, 9, 10 и т.д.), а колеса 4-й и 5-й группы – ближе к максимуму смещений (точки 3, 4, 7, 8 и т.д.). Тогда распределение колес по углам γ во 2-й группе будет соответствовать номерам, обозначенным на внешней окружности схемы на рис. 4.

Предложенный подход позволяет получить расположение всех колес по оси вала, обеспечивающее первое приближение по оптимизации размещения неуравновешенностей. Эффективность селективной сборки была проверена путем расчета вибрации секции ЭЦН по методике [1] для двух вариантов распределения эксцентриситетов колес. В первом случае исходная реализация эксцентриситетов, лежащих в одной плоскости, была такова, что после оптимизации размещения колес она в точности совпадала с третьей формой колебаний ротора. Во втором случае величины углов γ_i задавались в виде выборки равномерного распределения, а величины эксцентриситетов $e^{(i)}$ – аналогично первому случаю. В первом случае было получено практически полное отсутствие вибраций секции на рабочей частоте, а во втором – значительное их снижение.

Список литературы

1. Волоховская О.А. // Нелинейные колебания механических систем: Труды VIII Всерос. науч. конф. Н. Новгород, 22–26 сент. 2008 г. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2008. Т. 2. С. 72–78.

AN APPROACH TO THE VIBRATION LEVEL DECREASE OF CENTRIFUGAL DOWNHOLE PUMPS FOR OIL PRODUCTION

O.A. Volokhovskaya

The paper presents and justifies the approach to decreasing the vibration level of downhole electric centrifugal pumps (ECP) from their disbalanced rotating parts as the main factor determining the vibration activity of the ECP. The approach is based on the principle of selective assembly (that consists in determining the sequence of the working wheels arrangement on the shaft axis, closest to the optimum one on the structure vibration level).

Keywords: vibration level, centrifugal pumps, forces of disbalance, multi-stage structure, selective assembly.

УДК 621.01:534.1

К ТЕОРИИ РЕГУЛЯРНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ЦИКЛОВЫХ МАШИН

И.И. Вульфсон

Санкт-Петербургский госуниверситет технологии и дизайна

vujo@rambler.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Исследуются особенности регулярных колебательных систем цикловых машин, образованных последовательным соединением повторяющихся блоков сложной динамической структуры. Применительно к подобным системам, обладающим периодической пространственной структурой, развивается теория цепочек при учете нестационарности связей и нелинейных факторов. Предложены методы снижения виброактивности и устранения пространственной локализации колебаний, нарушающей синфазное движение исполнительных органов.

Ключевые слова: динамика, цикловая машина, регулярная колебательная система, пространственная локализация, виброактивность.

Теория регулярных колебательных систем базируется на анализе цепочек осцилляторов и восходит к работам Борна и Кармана, посвященным исследованию теплоемкости кристаллов [1, 2]. Эти работы легли в основу так называемой теории цепочек, с помощью которой удается осуществить аналитическое описание динамических характеристик моделей с большим числом степеней свободы, базируясь на анализе одного структурного элемента системы. Основные направления дальнейшего развития этой теории нашли отражение в монографиях [3, 4]. В машинах циклового действия и автоматических линиях приходится сталкиваться с регулярными колебательными системами в связи с широким распространением динамически идентичных модулей, используемых для реализации однотипных технологических и транспортных операций [5–8]. В подобных случаях ввиду естественного стремления к унификации и взаимозаменяемости отдельных узлов машины возникает определенная повторяемость блоков динамической модели приводов. Такая ситуация, в частности, встречается в машинах текстильной, легкой, пищевой, полиграфической и ряда других отраслей промышленности при повышенной протяженности зоны технологической обработки.

Применительно к машинам с цикловыми механизмами теория регулярных колебательных систем нуждается в дополнительной разработке. Во-первых, динамические модели приводов имеют более сложную внутреннюю структуру каждого повторяющегося модуля, которые образуют не только односвязные цепочки, но и разветвленные, кольцевые и разветвленно-кольцевые колебательные системы. Кроме того, такая необходимость связана со специфическими особенностями цикловых механических систем, среди которых отметим нелинейность функции перемещения, нестационарность динамических связей, возможность нарушения кинематического контакта в зазорах и др.

Динамическая модель

Рассмотрим обобщенную динамическую модель, состоящую из n блоков (модулей), образующую K-связную колебательную систему с периодической пространственной структурой. Под связностью будем понимать число реакций при разрыве связей. Каждый модуль в общем случае также может представлять собой k-связную систему (рис. 1).

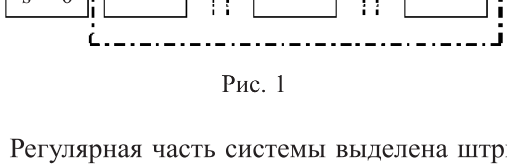


Рис. 1

Регулярная часть системы выделена штрихпунктирной линией. Элемент М соответствует двигателю с приводным механизмом.

При $K = 1$, $k = 2$ модель отвечает случаю, когда от общего главного вала ответвляется *n* крутильных подсистем, каждая из которых имеет вид решетки, образованной главным валом, исполнительным органом и связывающими их цикловыми механизмами. Эти механизмы предопределяют реономный характер колебательной системы, которая представляет собой цепочку, в которой вместо традиционных масс фигурируют модули со многими степенями свободы.

Частотный анализ

При использовании аппарата теории регулярных систем формальное частотное уравнение может быть представлено как

$$w_{43}(\nu)[w_{21}(\nu)+w_{22}(\nu)\xi(\nu)]-$$
$$-w_{23}(\nu)[w_{41}(\nu)+w_{42}(\nu)\xi(\nu)]=0,$$

где w_{ik} – элементы матрицы $\mathbf{\Gamma}^n$; $\mathbf{\Gamma}$ – матрица перехода модуля, $\xi(\nu)$ – отношение коэффициента жесткости главного вала для одного модуля к динамической жесткости на «входе», $\nu = p/p_1$, p – медленно меняющаяся «собственная» частота, p_1 – парциальная частота механизма.

На рис. 2 приведены типовые графики изменения безразмерной частоты $\nu_r(\varphi)$ ($\varphi = \omega t$). На графиках четко выявились перескоки с кривых *1*, *2*, *3* на одноименные кривые, помеченные звездочками.

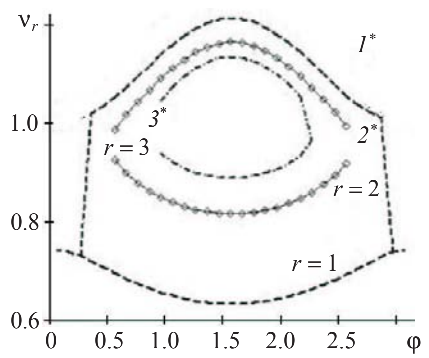


Рис. 2

Таким образом, даже при медленном изменении параметров возникают скачкообразные изменения доминирующей «собственной» частоты и происходит вырождение некоторых форм колебаний. С этим эффектом связана возможность пространственной локализации колебаний [4, 7, 8]. Как показал анализ колебаний, зарождение подобного режима вызвано в числе прочих факторов накоплением фазовых сдвигов колебаний входных звеньев механизмов по мере их удаления от начала цепи. Определяющую роль в нарушении синфазных колебаний играют фазовые сдвиги функции положения механизма $\Pi(\varphi)$, которые при повышенной плотности частотного спектра и переменности параметров создают предпосылки для периодической перекачки энергии из одной формы в другую. С увеличением числа механизмов *n* возрастают нарушения синфазности колебаний исполнительного органа. Определенную роль при пространственной локализации колебаний также играет уменьшение эффективных значений псевдодиссипативных факторов из-за влияния переменности параметров [5–8].

Список литературы

1. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.
2. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: Изд.-во иностр. лит., 1959.
3. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука. Физматлит, 1997.
4. Индейцев Д.А. и др. Локализация линейных волн. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007.
5. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. Л.: Машиностроение, 1990.
6. Vulfson I. Vibroactivity of branched and ring structured mechanical drives. New-York, London: Hemisphere publishing corporation, 1988.
7. Вульфсон И.И. Исследование колебаний многосекционных приводов цикловых машин разветвленно-кольцевой структуры // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. №2. С. 22–29.
8. Вульфсон И.И. Синфазность и пространственная локализация колебаний рабочих органов с симметричной динамической структурой // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. №1. С. 12–18.

TO THE THEORY OF REGULAR VIBRATORY SYSTEMS OF CYCLIC MACHINES

I.I. Vulfson

Specific characteristics of regular vibratory systems of the cyclic machines formed by consecutive connection of repeating blocks with a complex dynamic structure are investigated. With reference to the similar systems possessing a periodic spatial structure, the theory of chains is developed, accounting for variable parameters and nonlinear factors. The conditions of spatial localization wherein the synchronism of movement of the actuator is broken and the vibroactivity of the drive is growing are established. The ways of elimination of undesirable dynamic effects are offered.

Keywords: dynamics, cyclic machine, regular vibratory system, spatial localization, vibroactivity.

УДК 532.591:534.6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАНУЛИРОВАННОЙ СРЕДЫ, ПРОПИТАННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

А.А. Гавриков

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

gavrikov@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Построена механическая модель гранулированных сред, пропитанных жидкостью. Поставлена задача определения ее динамических характеристик: плотности, диссипации, упругости и др. На основе адекватной математической модели аналитически вычисляются собственные частоты главной и более высоких мод гидроупругой системы и находятся их сдвиги по отношению к частотам невозмущенной системы (без наличия среды). Резонансные кривые и величины сдвигов, определяемые высокоточными экспериментальными измерениями, позволяют найти динамическую плотность, коэффициент диссипации и скорость звука (упругость) в среде с относительно малой погрешностью. В качестве гидроакустических установок использовались резонаторы на основе прямоугольных сосудов с акустически мягкими стенками и дном. Сосуды заполнены жидкостью с открытой поверхностью (водой, керосином, нефтью и т.д.) и содержат образцы исследуемых гранулированных сред.

Ключевые слова: гранулированные среды, резонансный метод, собственные частоты, динамические характеристики.

Теория резонансного метода, использующего жесткие гидроакустические трубы, разработана и применена для определения динамических свойств различных материалов [1, 2]. Эти свойства гранулированных и пористых сред, пропитанных жидкостью, в естественных условиях удобнее исследовать с помощью резонаторов в форме прямоугольных сосудов.

Для определения динамической плотности и диссипации среды использован сосуд с акустически мягкими стенками и дном. В сосуд с размерами $a\times b$ помещается на горизонтальное дно слой среды толщины h, динамические свойства (плотность, вязкость, упругость и др.) которой неизвестны. Сверху среды находится слой жидкости высоты H (H много больше h), для которой известны (измерены или взяты из справочников) скорость звука в жидкости c_1 и ее плотность ρ_1. Для определения искомых величин применим резонансный метод [1, 2]. На первом этапе исследуются теоретически элементарная задача о собственных колебаниях жидкости без учета подстилающего слоя $h = 0$, результаты сопоставляются с табличными. Для звукового потенциала методом разделения переменных из линейных уравнений акустики находятся собственные формы φ и частоты $\omega = \omega_{mkn}$. На втором этапе решается задача на собственные частоты и формы с учетом слоя среды $h > 0$, находятся собственные формы $\tilde{\varphi}$ и методом возмущений в предположении, что h/H и $(\omega-\tilde{\omega})/\omega$ – малые величины одного порядка, собственные частоты $\tilde{\omega}=\tilde{\omega}_{mkn}$. С квадратической погрешностью по h/H разность частот представляется в виде [3]:

$$-\Delta\omega = -c_1^2\left(\frac{\pi n}{H}\right)^2\frac{\rho_2 h}{\omega\rho_1 H}. \qquad (1)$$

В выражении (1) неизвестными являются величины $\tilde{\omega}$ и ρ_2 остальные параметры заданы (здесь n – номер моды собственных вертикальных колебаний). Наличие среды приводит к уменьшению собственных частот. Смысл резонансного метода заключается в измерении резонансных частот $\tilde{\omega}$, практически совпадающих с собственными соответствующих мод колебаний ω.

Выражение для динамической плотности среды [3]

$$\rho_2 = \left(\frac{2}{n}\right)^2\left(\frac{c_H}{c_1}\right)^2\frac{\Delta\omega}{\omega}\frac{H}{h}, \quad c_H = \frac{\omega H}{2\pi} \qquad (2)$$

содержит отношение малых величин h/H, $\Delta\omega/\omega$, что требует высокоточных измерений. Согласно формуле (2) происходит «динамическое взвешивание» среды, пропитанной жидкостью. Как установлено [1, 2], динамическая плотность является комплексной функцией частоты $\tilde{\omega}$ воздействия вследствие взаимодействия между гранулами и вязкой жидкостью, выражение (2) определяет вещественную часть динамической плотности. Скорость звука c_2 в гранулированной среде отсутствует в формулах (1), (2) первого приближения по параметру h/H. Для рассматриваемой постановки задачи тонкий слой среды находится в пучности скорости, т.е. в узле давления. Экспериментальные результаты убедительно подтверждаются адекватностью модели акустически мягкого резонатора. Проведены измерения динамической плотности различных образцов гранулированной среды, пропитанной жидкостью [3].

Аналогичным образом при помещении образца среды в пучность акустического давления находится скорость звука в гранулированной среде, пропитанной жидкостью

$$c_2=\left(\frac{1}{\omega^2}\left(\left(\frac{\pi l}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2\right)-\frac{\Delta\omega}{\omega}\frac{H}{h}\frac{\rho_2}{c_1^2\rho_1}\right)^{-1/2}, \quad (3)$$

где ρ_2 – статическая плотность гранулированной среды, измеряемая взвешиванием; l, m – номера мод собственных волновых движений в горизонтальной плоскости. Модуль объемной упругости по найденной скорости звука определяется как $K_2=\rho_2 c_2^2$.

Полученные теоретические результаты сопоставляются с экспериментальными данными, найденными для определения динамической плотности, и результатами, полученными на других лабораторных установках (гидродинамических трубах) [4].

Основные результаты работы получены совместно с С.В. Нестеровым и Л.Д. Акуленко.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-00180-а) и по Программе поддержки ведущих научных школ НШ-64817.2010.1.

Список литературы

1. Нестеров В.С. // Акуст. журнал. 1959. Т. 5. Вып. 3. С. 337–344.

2. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 5. С. 145–156.

3. Нестеров С.В., Акуленко Л.Д., Гавриков А.А. // Докл. РАН. 2011. Т. 436, № 6. (В печати).

4. Нестеров С.В. // Теоретические и экспериментальные исследования волновых процессов в океане: Сб. науч. трудов. Севастополь: Морской гидрофизический институт АН УССР. 1991. С. 140–147.

DETERMINATION OF DYNAMIC DENSITY OF A GRANULATED MEDIUM IMPREGNATED WITH A LIQUID

A.A. Gavrikov

A mechanical model of a granulated media impregnated with liquid is constructed. The problem of determining dynamic characteristics (density, dissipation, elasticity, etc.) is formulated. On the basis of an adequate mathematical model, we analytically calculated the eigenfrequencies of the principal and higher modes of the hydroelastic system and found their shifts with respect to the frequencies of the unperturbed system (without the presence of the medium). The resonance curves and values of shifts determined in precision experimental measurements make it possible to find the dynamic density, the dissipation coefficient, and the speed of sound (the elasticity) in the medium with a relatively small error. As the hydroacoustic installations, we used the resonators on the basis of acoustically rigid metal tubes and rectangular vessels with acoustically soft walls and with a soft or rigid bottom. The vessels are filled with liquid (water, kerosene, oil, etc.) with an open surface and contain samples of the granulated media under investigation.

Keywords: granulated media, resonance method, eigenfrequencies, dynamic characteristics.

УДК 629.5:681.5.03

СВЯЗЬ КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОДВИЖНОГО УПРАВЛЯЕМОГО ОБЪЕКТА С ЕГО СТАТИКО-ДИНАМИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Т.И. Гаврилова

Волжская государственная академия водного транспорта, Нижний Новгород

iapp@aqua.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается взаимосвязь геометрических параметров корпуса подвижного управляемого объекта (водоизмещающего судна) с его статическими характеристиками по управлению и особенностями динамического поведения. Показано влияние ширины судна по ватерлинии на форму его диаграммы управляемости. Отмечена возможность усложнения динамики судов, различающихся только значениями ширины корпуса по ватерлинии, при реакции на одно и то же управление.

Ключевые слова: управляемость, статическая характеристика управляемости, переходный процесс, ширина корпуса судна по ватерлинии, неустойчивость на курсе.

Известно, что водоизмещающее судно как объект управления обладает особенностями, некоторые из которых отражены в диаграмме управляемости – статической характеристике по управлению $\omega(\alpha)$, где ω – угловая скорость поворота. Диаграмма управляемости имеет нелинейный «S-образный» вид, что отражает неоднозначность реакции судна на управления, меньшие $\alpha_{кр}$ (рис. 1). Изменение формы диаграммы управляемости ведет к тому, что реакция на прежние управляющие сигналы меняется. Качество управления ухудшается и, как следствие, понижаются экономические показатели и безопасность движения.

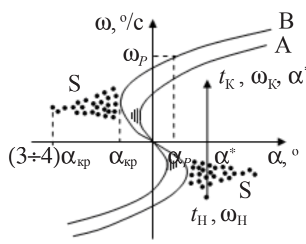


Рис. 1. Общий вид статической характеристики водоизмещающего судна

Кроме особенностей вида статической характеристики неустойчивые на курсе суда на плоскости α–ω имеют области пониженной управляемости, где проявляются свойства уменьшения чувствительности судна к управлению, так называемые области фазового пятна [1]. Эффект ухудшения управляемости проявляется при некоторых начальных значениях угловой скорости поворота $\omega_н$, угла дрейфа $\beta_н$ и величин управления $\alpha^* > > \alpha_{кр}$, когда $\operatorname{sgn}\omega_н = -\operatorname{sgn}\alpha^*$. В области пониженной управляемости (область S на рис. 1) существенно замедляется время перехода объекта из состояния с $\omega_н < 0$ в состояние $\omega_н > 0$. Однозначная и быстрая реакция судна на управление наблюдается лишь при перекладках, больших значения $3\div4\ \alpha_{кр}$.

Возможный подход к решению проблемы улучшения управляемости судов – проектировать суда с улучшенной статической характеристикой, то есть уменьшенной зоной нелинейности, где реакция объекта на управление неоднозначна.

Предположим, что ширина зоны неоднозначной реакции судна на управление зависит от геометрических характеристик корпуса. Рассмотрим связь статической характеристики судна по управлению с таким конструктивным параметром, как ширина судна по ватерлинии (рис. 2).

Рис. 2. Статические характеристики управляемости для судов

В качестве базового рассмотрим судно, описанное в [2]. Ширина базового судна (B) по ватерлинии равна 17 м. Рассмотрим других два судна, все параметры которых идентичны параметрам базового судна, но ширина варьируется в пределах 10% от базовой и составляет 18.7 м (А) и 15.3 м (С) соответственно.

Статические характеристики управляемости, построенные для этих судов, показали, что ширина зоны неоднозначной реакции на управление уменьшается с увеличением ширины корпуса по ватерлинии (см. рис. 2). Для судна А $\alpha_{кр} = 1.5°$, для судна С $\alpha_{кр} = 3.5°$.

Рассмотрим переходные процессы судов с различной шириной корпуса для одних и тех же значений управления при разных начальных координатах состояния ω и β. Пусть управление (угол перекладки руля) $\alpha = 2°$. Очевидно, что на данное управление судно А реагирует однозначно (рис. 3).

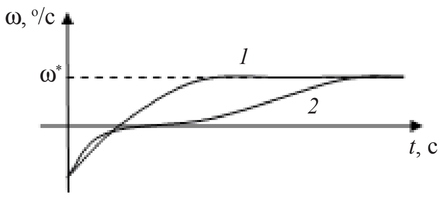


Рис. 3. Переходные процессы судна шириной 18.7 м при управлении $\alpha = 2°$: *1* – при начальных $\omega = -1°/с$, $\beta = -1°$ ($t_{пп} \approx 450$ с); *2* – при начальных $\omega = -1°/с$, $\beta = 1°$ ($t_{пп} \approx 200$ с)

При определенных начальных условиях длительность переходного процесса ($t_{пп}$) заметно увеличивается, так как сказывается влияние области замедленной реакции на управление. Судно меньшей ширины С при разных начальных условиях может выйти как на лево-, так и на правосторонний поворот (рис. 4).

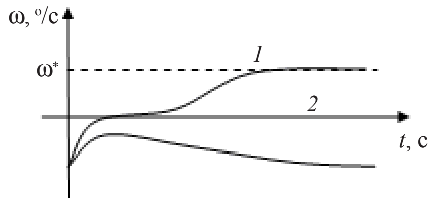


Рис. 4. Переходные процессы судна шириной 15.3 м при управлении $\alpha = 2°$: *1* – при начальных $\omega = -1°/с$, $\beta = -1°$ ($t_{пп} \approx 500$ с); *2* – при условиях $\omega = -1°/с$, $\beta = 1°$ ($t_{пп} \approx 300$ с)

На управление $\alpha = 4°$, что выше критической величины, судно А также реагирует однозначно, причем длительность переходного процесса при разных начальных условиях практически одинакова (рис. 5).

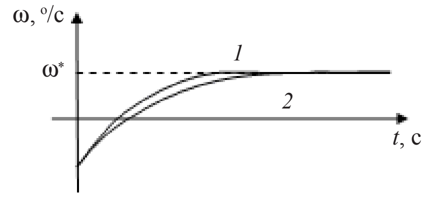


Рис. 5. Переходные процессы судна шириной 18.7 м при управлении $\alpha = 4°$: *1* – при начальных $\omega = -1°/с$, $\beta = -1°$ ($t_{пп} \approx 200$ с); *2* – при начальных $\omega = -1°/с$, $\beta = 1°$ ($t_{пп} \approx 220$ с)

Судно С также однозначно реагирует на это управление, но при попадании в зону замедленной реакции длительность переходного процесса заметно увеличивается (рис. 6).

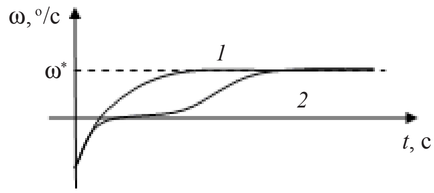


Рис. 6. Переходные процессы судна шириной 15.3 м при управлении $\alpha = 4°$: *1* – при начальных $\omega = -1°/с$, $\beta = -1°$ ($t_{пп} \approx 400$ с); *2* – при начальных $\omega = -1°/с$, $\beta = 1°$ ($t_{пп} \approx 200$ с)

Выявленные зависимости статико-динамических особенностей судов от ширины корпуса по ватерлинии необходимо учитывать при их проектировании.

Список литературы

1. Фейгин М.И., Чиркова М.М. О существовании области пониженной управляемости для судов, неустойчивых на прямом курсе // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. №2. С. 73–78.

2. Войткунский Я.И., Першиц Р.Я., Титов И.А. Справочник по теории корабля: Судовые движители и управляемость. Л.: Судостроение, 1973. 321 с.

THE EFFECT OF THE CONSTRUCTIVE PARAMETERS OF A MOVING CONTROLLED OBJECT ON ITS STATIC-DYNAMIC RESPONSES

T.I. Gavrilova

Correlation of the geometrical parameters of the hull of movable controlled object (displacement vessel) with its steady-state response to controllability and features of the dynamic behavior is analyzed. The effect of the ship's width at the waterline on the shape of its controllability response is shown. The possibility of complicating the dynamics of ships, differing only in values of the width of the hull at the waterline, in response to the same control is noted.

Keywords: controllability, steady-state response of controllability, transient, width of the vessel hull at the waterline, instability of course.

УДК 621.01

МАНИПУЛЯТОР ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С ЧЕТЫРЬМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В.А. Глазунов[1], С.В. Хейло[2], М.А. Ширинкин[2], П.А. Ларюшкин[2], А.В. Ковальчук[2]

[1]Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва
[2]Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина

sheilo@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассмотрена структура механизма с четырьмя степенями свободы с использованием аппарата групп винтов. Такой метод исследования позволяет избегать сложных уравнений, получаемых при традиционном подходе. Реализация метода основана на исследовании замкнутых групп винтов, содержащих винтовые произведения ее членов.

Ключевые слова: пространственный механизм, манипулятор параллельной структуры, винтовое исчисление, кинематический винт, силовой винт.

Особенности применения теории винтов

Рассматриваются манипуляторы параллельной структуры с четырьмя степенями свободы (рис. 1), методика их синтеза и анализа на основе анализа замкнутых групп винтов, сопоставляемых кинематическим цепям механизма [1].

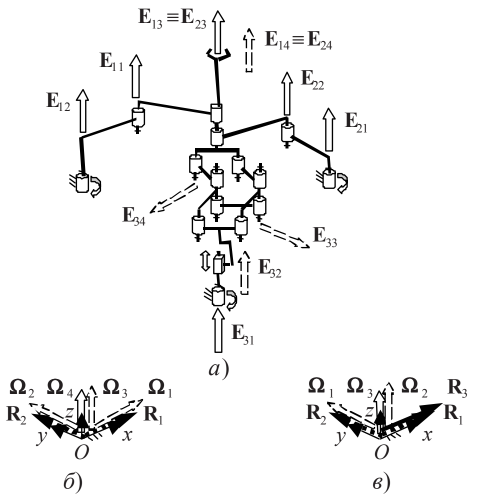


Рис. 1

Рассмотрим манипулятор параллельной структуры (рис. 1*а*) с тремя поступательными перемещениями и вращением вокруг параллельных осей. Первая и вторая кинематические цепи состоят из одной приводной поступательной пары, расположенной на основании, двух поступательных пар и вращательной пары. Третья кинематическая цепь содержит вращательную приводную пару, установленную на основании.

Единичные винты, характеризующие положения осей пар, имеют следующие плюккеровы координаты: $\mathbf{E}_{11}(0, 0, 1, e^{o}_{11x}, e^{o}_{11y}, 0)$, $\mathbf{E}_{12}(0, 0, 1, e^{o}_{12x}, e^{o}_{12y}, 0)$, $\mathbf{E}_{13}(0, 0, 1, e^{o}_{13x}, e^{o}_{13y}, 0)$, $\mathbf{E}_{14}(0, 0, 0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{E}_{21}(0, 0, 1, e^{o}_{21x}, e^{o}_{21y}, 0)$, $\mathbf{E}_{22}(0, 0, 1, e^{o}_{22x}, e^{o}_{22y}, 0)$, $\mathbf{E}_{23}(0, 0, 1, e^{o}_{23x}, e^{o}_{23y}, 0) = \mathbf{E}_{13}(0, 0, 1, e^{o}_{13x}, e^{o}_{13y}, 0)$, $\mathbf{E}_{24}(0, 0, 0, 0, 0, 1) = \mathbf{E}_{14}(0, 0, 0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{E}_{31}(0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{E}_{32}(0, 0, 0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{E}_{33}(0, 0, 0, e^{o}_{33x}, e^{o}_{33y}, 0)$, $\mathbf{E}_{34}(0, 0, 0, e^{o}_{34x}, e^{o}_{34y}, 0)$.

Силовые винты, действующие в данном механизме, имеют плюккеровы координаты (рис. 1*б*): $\mathbf{R}_1(0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{R}_2(0, 0, 0, 0, 1, 0)$. Кинематические винты движения выходного звена, взаимные силовым (рис. 1*в*): $\mathbf{\Omega}_1(0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{\Omega}_2(0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{\Omega}_3(0, 0, 0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{\Omega}_4(0, 0, 1, 0, 0, 0)$. Особые положения возможны, если кинематические винты, соответствующие ортам (единичным винтам) $\mathbf{E}_{i1}$, $\mathbf{E}_{i2}$ и $\mathbf{E}_{i3}$ ($i = 1, 2$) линейно зависимы, или три силовых винта: $\mathbf{R}_1(0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{R}_2(0, 0, 0, 0, 1, 0)$ и $\mathbf{R}_3(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ взаимны трем кинематическим винтам: $\mathbf{\Omega}_1(0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{\Omega}_2(0, 0, 0, 0, 0, 1)$ и $\mathbf{\Omega}_3(0, 0, 1, 0, 0, 0)$. Этот механизм обладает свойством частичной развязки. Каждый линейный двигатель перемещает выходное звено лишь вдоль одной координаты. В третьей кинематической цепи начальное звено первого параллелограмма и конечное звено второго параллелограмма связаны с вращательным приводом, а конечное звено первого параллелограмма совпадает с начальным звеном второго параллелограмма. Линейные двигатели обеспечивают положение выходного звена, а вращательный двигатель обеспечивает его ориентацию.

Пример исследуемого механизма

Рассмотрим механизм с тремя кинематическими цепями [2]. Один двигатель в этом механизме предназначен для вертикального перемещения выходного звена, три других двигателя – для перемещения выходного звена в плоскости (рис. 2).

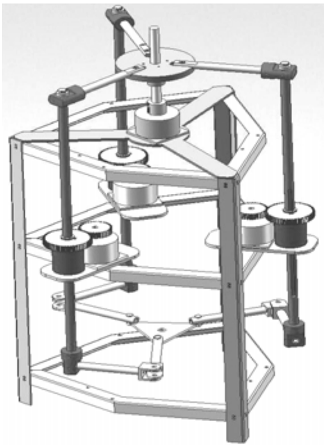


Рис. 2

Все двигатели жестко закреплены на рамеосновании, основную нагрузку принимает на себя двигатель вертикального перемещения.

При решении задач о положениях, скоростях и сингулярностях целесообразно осуществить кинематическую развязку (вертикальные линейные перемещения подвижной платформы не зависимы от движений в горизонтальной плоскости). Это означает, что при структурном синтезе и последующем анализе необходимо рассмотреть только плоский механизм с тремя степенями свободы. Все точки пространства внутри рабочего объема манипулятора, соответствующие особым положениям, а также особенности кинематики будут определяться именно архитектурой плоского механизма. При этом структурный синтез и последующий анализ целесообразно проводить с применением замкнутых групп винтов.

Список литературы

1. Глазунов В.А. Структура пространственных механизмов. Группа винтов и структурные группы: Справочник // Инженерный журнал. 2010. Прилож. №3. 24 с.

2. Патент №88601 РФ, МПК B25J 1/00. Пространственный механизм с четырьмя степенями свободы / В.А. Глазунов, М.А. Ширинкин, С.В. Палочкин. №2009121390; Заявл. 05.06.2009; Опубл. 20.11.2009, Бюл. № 32. 2 с.

A MANIPULATOR OF A PARALLEL STRUCTURE WITH FOUR DEGREES OF FREEDOM

V.A. Glazunov, S.V. Kheilo, M.A. Shirinkin, P.A. Laryushkin, A.V. Kovalchuk

This paper presents specifics of synthesis and analysis of manipulator of a parallel structure with four degrees of freedom using the theory of screws. This method allows to obtain simple equations. It is based on the analysis of closed groups of screw groups.

Keywords: spatial mechanism, parallel mechanism, the theory of screws, twist, wrench.

Общая и прикладная механика
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (2), с. 94–95

УДК 531.1

БРАХИСТОХРОНА С КУЛОНОВСКИМ И ВЯЗКИМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Ю.Ф. Голубев

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

golubev@keldysh.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Найдено множество экстремалей в задаче о брахистохроне при действии сухого и произвольного вязкого трения. Решение задачи достигается поиском оптимальной по быстродействию нормальной составляющей (управление) реакции плоской кривой, форма которой подлежит определению. Исследование дифференциала функционала выполнено по методу Охоцимского – Понтрягина. Для оптимальной реакции брахистохроны указано аналитическое выражение через фазовые координаты, которое при отсутствии трения дает решение классической задачи о брахистохроне, а при наличии трения – соответствующие оптимальные кривые. Даны параметрические формулы для брахистохроны при действии сухого и вязкого трения, исследованы их свойства.

Ключевые слова: брахистохрона, кулоновское трение, вязкое трение, оптимальное управление.

Постановка задачи

Плоскопараллельное движение материальной точки массы m по кривой в вертикальной плоскости под действием силы тяжести, вязкого и сухого трения описывается системой дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} = -\left(\mu(\gamma) + k\frac{|N|}{m\sqrt{\gamma}}\right)\dot{x} - \dot{z}\frac{N}{m\sqrt{\gamma}},$$

$$\ddot{z} = -g - \left(\mu(\gamma) + k\frac{|N|}{m\sqrt{\gamma}}\right)\dot{z} + \dot{x}\frac{N}{m\sqrt{\gamma}}, \quad \gamma = \dot{x}^2 + \dot{z}^2,$$

где x – горизонтальная, z – вертикальная координаты точки, $\mu(\gamma) > 0$ – коэффициент вязкого трения, k – коэффициент сухого трения, N – реакция искомой брахистохроны, g – ускорение силы тяжести. Обозначив $u = N/(m\sqrt{\gamma})$, $q_1 = x, q_2 = \dot{x}$, $q_3 = z, q_4 = \dot{z}$, $\gamma = q_2^2 + q_4^2$, приведем уравнения движения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{q}_1 = q_2, \quad \dot{q}_2 = -q_2[\mu(\gamma) + k|u|] - q_4 u,$$
$$\dot{q}_3 = q_4, \quad \dot{q}_4 = -g - q_4[\mu(\gamma) + k|u|] + q_2 u. \qquad (1)$$

Обозначим t – время. Зададим при $t = 0$ начальные, а при $t = T$ – конечные условия:

$$q_1(0) = 0, \quad q_3(0) = H, \quad q_2(0) = q_4(0) = 0,$$
$$q_1(T) = a, \quad q_3(T) = h < H. \qquad (2)$$

Величины $q_2(T), q_4(T)$ не заданы. В качестве функционала выступает время движения $\Phi = \int_0^T 1dt$. В данной постановке u служит управлением. Требуется найти управление $u(\cdot) \in C^1$, доставляющее минимум функционалу Φ, и соответствующие этому управлению оптимальные траектории.

Необходимые условия оптимальности

Гамильтониан задачи имеет вид

$$\mathrm{H} = 1 + \psi_1 q_2 - \psi_2[q_2(\mu + k|u|) + q_4 u] + \psi_3 q_4 -$$
$$- \psi_4[g + q_4(\mu + k|u|) - q_2 u], \qquad (3)$$

где сопряженные переменные ψ_i, $i = 1,\ldots 4$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\psi}_1 = 0, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \psi_2\left(\mu + 2\frac{d\mu}{d\gamma}q_2^2 + k|u|\right) -$$
$$-\psi_4\left(u - 2\frac{d\mu}{d\gamma}q_4 q_2\right),$$
$$\dot{\psi}_3 = 0, \quad \dot{\psi}_4 = -\psi_3 + \psi_4\left(\mu + 2\frac{d\mu}{d\gamma}q_4^2 + k|u|\right) +$$
$$+\psi_2\left(u + 2\frac{d\mu}{d\gamma}q_4 q_2\right) \qquad (4)$$

и условиям трансверсальности

$$\psi_1(T) = \alpha, \quad \psi_2(T) = 0, \quad \psi_3(T) = \beta,$$
$$\psi_4(T) = 0, \quad 1 + \alpha q_2(T) + \beta q_4(T) = 0. \qquad (5)$$

Здесь α и β – произвольные постоянные и $q_2^2 + q_4^2 \neq 0$. Оптимальная функция $u(\cdot)$ должна обеспечивать минимум гамильтониана (3) в любой момент времени. Существует набор краевых условий, для которых этот минимум достигается при $u(t) \equiv 0$. Тогда оптимальным будет вертикальное падение материальной точки.

Если оптимальное значение $u(t) \neq 0$, то оно должно обеспечивать тождественное равенство

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial u} = \psi_4[q_2 - kq_4(2\sigma(u)-1)] - -\psi_2[q_4 + kq_2(2\sigma(u)-1)] \equiv 0,$$

$$\sigma(u) = \begin{cases} 1, & u \ge 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$

Соответствующая оптимальная функция $u(\cdot)$ выражается формулой

$$u = \frac{2gq_2}{\gamma} - \frac{2k\gamma}{1+k^2}\frac{d\mu}{d\gamma}\operatorname{sign}(u). \qquad (6)$$

Видно, что если $u = 0$, то $q_2 = 0$, и реализуется вертикальное падение. Если $2gq_2(0)/\gamma(0) = u_0 \neq \neq 0$, то при $\gamma(t) \neq 0$ изменение знака функции $u(t)$ невозможно. Семейство оптимальных траекторий получается посредством подстановки значения (6) в правые части уравнений движения с последующим их интегрированием при различных значениях параметра u_0. Условие $u_0 \neq 0$ означает, что в начальной точке оптимальная траектория имеет вертикальную касательную.

Случай $d\mu/d\gamma = 0$ подробно изучен в [1]. Аналогично исследуется случай, когда $d\mu/d\gamma \neq 0$, но $k = 0$. Тогда $u = 2gq_2/\gamma$ и подчиняется уравнению $\dot{u} = \mu(\gamma)u$. После замены независимой переменной

$$t \to \tau : \frac{d\tau}{dt} = \exp\left(\int_0^t \mu(\gamma)dt\right)$$

получаются уравнения

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{gu_0[1-\cos(u_0\tau)]}{u^2}, \quad \frac{dz}{d\tau} = \frac{gu_0\sin(u_0\tau)}{u^2},$$

$$\frac{du}{d\tau} = u_0\mu(\gamma), \quad \gamma = \frac{4g^2}{u^2}\sin^2\frac{u_0\tau}{2}, \qquad (7)$$

которые при отсутствии сухого трения и конкретном задании зависимости $\mu(\gamma)$ определяют брахистохрону в параметрическом виде.

Соотношения (7) справедливы при $\gamma > 0$. Из-за этого $0 \le \tau \le 2\pi/u_0$. При $\tau = 2\pi/u_0$ получается конечная точка брахистохроны. В этой точке брахистохрона имеет вертикальную касательную, и каждая такая точка может служить началом нового семейства брахистохрон.

Пусть, например $\mu = \mu_j\gamma^{1/2}$, где μ_j – постоянная. Тогда при $j \ge 1$ справедливо

$$u^{j+1} = u_0\left[u_0^j + \mu_j(2g)^j(j+1)\left(-\frac{2}{u_0 j}\sin^{j-1}\frac{u_0\tau}{2}\times \times\cos\frac{u_0\tau}{2}\bigg|_0^\tau + \frac{j-1}{j}\int_0^\tau \sin^{j-2}\frac{u_0\tau}{2}d\tau\right)\right]. \qquad (8)$$

Формула (8) является рекуррентной. В случае квадратичного по скорости закона вязкого сопротивления имеем $j = 1$ и

$$u^2 = u_0^2 + 8\mu_1 g\left(1 - \cos\frac{u_0\tau}{2}\right).$$

Видим, что функция $u(\tau)$, а вместе с ней и реакция опоры, ни в одной точке диапазона $0 \le \tau \le 2\pi/u_0$ не обращается в нуль. После подстановки найденного выражения в левую часть уравнений (7) задача поиска брахистихрон сводится к квадратурам.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-01-00160).

Список литературы

1. Голубев Ю.Ф. Брахистохрона с трением // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. №5. С. 41–52.

A BRACHISTOCHRONE CURVE WITH COULOMB AND VISCOUS RESISTANCE

Yu.F. Golubev

A set of extremals was found for the brachistochrone problem with taking into account dry and random viscous friction. The problem is solved by searching the speed-optimal normal component of the reaction (control) of a plane curve, whose shape is to be determined. The investigation of a differential of the functional was done by Okhotsimsky–Pontryagin method. An analytical expression in terms of phase coordinates for the optimal reaction of the brachistochrone curve is given. This expression gives the solution of a classical brachistochrone problem in the absence of any friction and in the presence of friction – corresponding optimal curves. Parametrical formulas are presented for a brachistochrone curve under influence of dry and viscous friction. Properties of brachistochrone curves are investigated.

Keywords: brachistochrone curve, Coulomb friction, viscous friction, optimal control.

УДК 531.8

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО МНОЖЕСТВА ОДНОЙ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ

С.П. Горбиков, А.В. Меньшенина

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

alya112@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

На примере динамической системы, описывающей движение виброударного механизма, численно изучается бифуркация, которая связана с приходом периодического движения на границу области существования бесконечноударных движений. После бифуркации в рассматриваемой системе возникает предельное множество, в окрестности которого существуют хаотические движения. Проведен расчет корней характеристического уравнения соответствующих отображений, действующих в окрестности этого предельного множества. Оказалось, что эти отображения являются седловыми.

Ключевые слова: виброударные системы, бифуркации динамических систем с ударными взаимодействиями, точечные отображения, хаотические движения.

Численно исследуется бифуркация [1], приводящая к возникновению хаотических движений динамических систем с ударными взаимодействиями. Бифуркация связана с приходом периодического движения с участком бесконечноударных движений [2] на границу области существования бесконечноударных движений.

Изучение бифуркации проводится на примере динамической системы, описывающей движение виброударного механизма, используемого, например, для виброзабивки свай. Движение виброударника с зазором описывается следующей системой:

$$\begin{aligned} &\ddot{q}+\lambda^2 q = V\sin t+1, \quad &\text{при } q>0,\\ &\dot{q}^{+} = -R\dot{q}^{-}, \quad &\text{при } q=0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\ddot{q}=d^2q/dt^2$, $\dot{q}^-$ и $\dot{q}^+$ – соответственно доударные и послеударные значения скорости, $V > 1$, $\lambda > 0$, R – коэффициент восстановления нормальной скорости при ударе, $0 < R < 1$. Фазовое пространство системы (1) составляют точки $(q, \dot{q}, t)$, координаты которых удовлетворяют следующим неравенствам: $q \geq 0$, $-\infty \leq \dot{q} \leq +\infty$, $0 \leq t \leq 2\pi$, а точки $(q, \dot{q}, 0)$ и $(q, \dot{q}, 2\pi)$ предполагаются отождествленными.

Поведение траекторий системы (1) изучается с помощью метода точечных отображений [3], а именно, с помощью отображения $T = T_2T_1$ части многообразия $q = 0$, $\dot{q} > 0$ в себя. Отображение T_1 переводит точку $(0, \dot{q} \geq 0, t_1)$ в точку $(0, \dot{q}^- \leq 0, t_2)$ по траекториям первого уравнения системы (1); T_2 – отображение, задаваемое формулой ударных взаимодействий (второе уравнение системы (1)).

В системе (1) в результате бифуркации образуются подковы Смейла и кратные подковы Смейла [4], наличие которых объясняет существование хаотических движений, возникающих в системе после бифуркации. Под хаотическими здесь понимаются движения без видимой регулярности в течение $5\cdot10^4$ итераций отображения T, а также обладающие свойством существенной зависимости от начальных условий. Как показывают численные исследования [5, 6], после бифуркации в системе (1) возникает необычное предельное множество. По результатам расчетов, оно обладает следующими свойствами:

– в его окрестности существуют хаотические движения;

– из точек предельного множества выходят траектории, которые также являются хаотическими;

– траектории, попадая в малую окрестность предельного множества, не выходят из нее и совершают хаотические движения в этой окрестности в течение всего наблюдавшегося времени;

– в окрестности предельного множества среднее по времени совпадает со средним по ансамблю.

Приводятся результаты расчета корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения отображения T^i в окрестности предельного множества. Значение i определяется в зависимости от положения начальной точки на части многообразии $q = 0$, $\dot{q} > 0$, это количество итераций отображения T, после действия которых образ начальной точки снова попадает в эту часть многообразия.

При расчетах окрестность предельного множества покрывалась сеткой, в каждом узле которой вычислялись значения λ_1, λ_2. Оказалось, что отображения T^i являются седловыми в каждой рассмотренной точке окрестности предельного множества: $\lambda_1 > 1$, $0 < \lambda_2 < 1$. При этом в большинстве рассмотренных точек λ_1 значительно превышает 1, λ_2 при этом близко к 0.

Также проводилось исследование траекторий, выходящих из узлов сетки, которой была покрыта окрестность предельного множества. Поведение этих траекторий изучалось с помощью следующих отображений: T^i, T^{2i}, ..., T^{ki}, $k = 10^3$, для каждого из которых также были вычислены корни характеристического уравнения. Расчеты показали, что эти отображения являются седловыми в окрестности предельного множества: $\lambda_1 > 1$, $0 < \lambda_2 < 1$. При этом в большинстве рассмотренных точек λ_1 значительно превышает 1, λ_2 при этом близко к 0.

Список литературы

1. Горбиков С.П., Меньшенина А.В // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1046–1052.

2. Нагаев Р.Ф. Механические процессы с повторными затухающими соударениями. 1985. 200 с.

3. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. 1972. 471 с.

4. Горбиков С.П., Меньшенина А.В. // Вестник ННГУ. Матем. моделир. и оптим. управл. 2004. Вып. 1(27). С. 14–24.

5. Горбиков С.П., Меньшенина А.В. // Вестник ННГУ. Матем. моделир. и оптим. управл. 2004. Вып. 1(27). С. 25–29.

6. Горбиков С.П., Меньшенина А.В. // Нелинейные колебания механических систем: Тезисы VI научн. конф. Н.Новгород, 2005. С. 65–67.

STATISTIC RESEARCH OF THE LIMITING SET OF A VIBROIMPACT SYSTEM

S.P. Gorbikov, A.V. Menshenina

A model of a vibroimpact device is computationally investigated in the report. A bifurcation, leading to the chaotic motions, occurs in the researched dynamical system. The bifurcation is followed by the appearance of a limiting set for chaotic motions. Characteristic equation roots of corresponding mappings in the neighborhood of the limiting set are determined using computer simulation of the researched vibroimpact system. It is found that considered mappings are of the saddle type.

Keywords: vibroimpact systems, bifurcations of dynamical systems with impact interactions, point mapping, chaotic motions.

УДК 534.1+532.595.2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ КЛАПАНА, УПРАВЛЯЕМОГО ПОТОКОМ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А.А. Горбунова, Л.В. Смирнов

НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

labdin@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Представлено теоретическое обоснование методики и демонстрация результатов исследования динамики процессов взаимодействия одномерного потока сжимаемой жидкости в трубопроводе и управляемого этим потоком клапана. Исследование проведено с помощью численного эксперимента при заданных и варьируемых параметрах.

Ключевые слова: трубопровод, клапан, сжимаемая жидкость, гидравлический удар, автоколебания, жесткое возбуждение.

Рассматривается участок гидросистемы в виде трубопровода с потоком сжимаемой жидкости, установленным в некотором сечении клапаном и фиксированными на концах давлениями. Математическая модель рассматриваемой системы получена с использованием вариационного принципа Гамильтона–Остроградского. Обусловленные потоком через концы трубопровода изменения массы и состава жидкости учтены с помощью соответствующего обобщения используемой формулировки принципа [1]:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-K)dt+\int_{t_1}^{t_2}(\delta A_1+\delta A_2)dt=0. \qquad (1)$$

Здесь t – время; T, K – кинетическая и потенциальная энергия системы; δA_1 – работа непотенциальных сил; δA_2 – работа дополнительных сил, обусловленных потоком через границы. Выражение для δA_2 получено в результате необходимых формальных преобразований общего уравнения динамики рассматриваемого участка гидросистемы с учетом задаваемого уравнением Мещерского потока массы через границы. Математическая модель представляет собой описывающую волновой процесс, типичную для теории гидравлического удара [2] систему уравнений в частных производных и уравнения движения клапана под действием сил тяжести, трения и приближенно представляемой гидродинамической силы.

В качестве примера ниже представлена упрощенная схема (рис. 1) и математическая модель, качественно описывающая указанные процессы для участка гидросистемы с установленным в некотором сечении обратным клапаном и заданными на концах постоянными давлениями P_1 и P_2 $(P_1 > P_2)$:

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{gS}\frac{\partial Q}{\partial t}+J(Q)=0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{c^2}{gS}\frac{\partial Q}{\partial x},\quad P(0,t)=P_1,\ P(L,t)=P_2, \qquad (2)$$

$$I\ddot{\varphi}=mgR\sin(\varphi-\varphi_1)-h\dot{\varphi}|\dot{\varphi}|-RS\Delta P_k(Q,l),$$

$$\Delta P_k(Q,l)=\frac{\rho}{\varphi}\frac{Q(l,t)\,|Q(l,t)|}{2S^2}.$$

Здесь $Q(x,t), P(x,t)$ – расход и давление жидкости; $S=\pi R^2$ – площадь прохода трубопровода; $J(Q)$ – характеризующий потери на трение в трубопроводе гидравлический уклон [2, 3]; x – координата вдоль оси трубопровода; h – коэффициент трения, $\varphi(t)$ $(0\le\varphi\le\pi/2)$ – угол открытия клапана; $\Delta P_k(Q,\varphi)=P^- - P^+$ – гидравлическая характеристика клапана как гидравлического сопротивления [3]; φ_1 – отличный от нуля определяющийся специальным распределением массы клапана угол его открытия при $P_1=P_2$, $Q=0$, $\dot{Q}=0$, $\ddot{Q}=0$, $\dot{\varphi}=0$, $\ddot{\varphi}=0$.

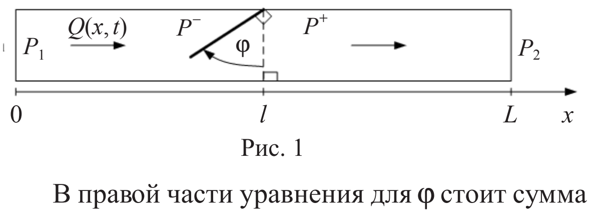


Рис. 1

В правой части уравнения для φ стоит сумма моментов силы тяжести, силы трения и гидродинамической силы.

Взаимодействие гидродинамических и механических процессов является самосогласованным. Воздействие потока на клапан происходит за счет момента гидродинамической силы, а возникающее при этом перемещение клапана приводит к изменению давлений перед клапаном и после него (P^- и P^+).

Из-за сложности, хотя и значительно упрощенной модели, исключающей аналитический подход, исследования проведены методом численного эксперимента при задаваемых и варьируемых параметрах. Результаты расчетов имеют качественный характер. Проведены расчеты переходных процессов, возникающих после освобождения закрепленного в некотором положении клапана. Начальные условия соответствовали установившемуся стационарному состоянию, при $P_1 - P_2 > 0$; $Q = Q^0 = \text{const}$ и $\varphi(0) = \text{const}$. В результате переходного процесса в зависимости от параметров и начальных условий устанавливается равновесный режим в виде состояния равновесия или предельного цикла.

возникающие автоколебания имеют быструю и медленную фазу. При некоторых параметрах возможны автоколебания без гидравлического удара, когда жидкость ведет себя как несжимаемая, а удары клапана об ограничитель отсутствуют.

Результаты исследований имеют простое качественное объяснение. Кроме того, подобные автоколебания, наблюдавшиеся в системе циркуляции теплоносителя ядерного реактора [4], можно считать экспериментальным подтверждением описанных выше результатов [4].

Системы, подобные рассматриваемой, могут быть, в частности, использованы для выработки электроэнергии нетрадиционным для гидроэнергетики способом.

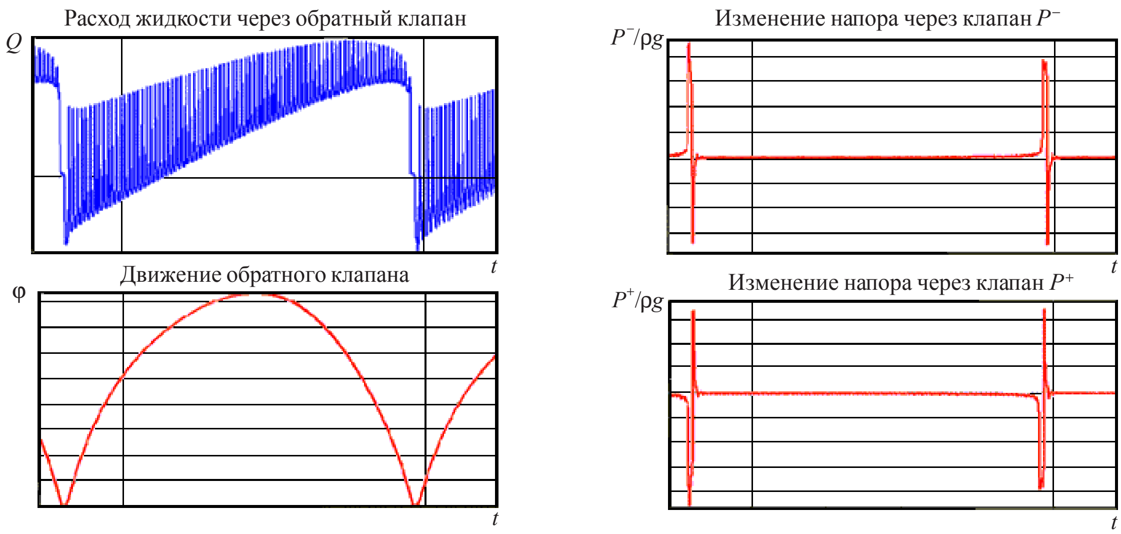


Рис. 2

Рисунок 2 демонстрирует характер установившегося изменения переменных в случае предельного цикла, когда при каждой остановке клапана при его закрытии возникает затухающий волновой процесс в потоке жидкости.

Клапан расположен в среднем поперечном сечении трубопровода ($l = L/2$). Под действием потока он сначала закрывается, а после прихода отраженных волн от концов трубопровода открывается, в дальнейшем из-за своей инерционности отслеживает только изменение осредненного по высокой частоте расхода и снова закрывается.

Режим возбуждения является жестким, а

Список литературы

1. Смирнов Л.В., Данилова Н.В. Основы прикладной аналитической гидромеханики напорного течения несжимаемой жидкости: Учеб. пособие. Н. Новгород: ННГУ, 2009. 65 с.

2. Аронович Г.В., Картвелишвили Н.А., Любимцев Я.К. Гидравлический удар и уравнительные резервуары. М.: Наука, 1968. 248 с.

3. Чугаев Р.Р. Гидравлика: Учебник для вузов. 4-е изд., доп. и перераб. Л.: Энергоиздат, 1982. 672 с.

4. Фролов К.В. и др. Динамика конструкций гидроаэроупругих систем / Отв. ред. С.М. Каплунов, Л.В. Смирнов. М.: Наука, 2002. 397 с.

MATHEMATICAL MODELING OF SELF-OSCILLATION OF A VALVE CONTROLLED BY A FLOW OF COMPRESSIBLE FLUID

A.A. Gorbunova, L.V. Smirnov

The report presents the results of theoretical justification of methodology and the demonstration of the results on the investigation of the dynamics of interaction processes of one-dimensional flow of a compressible fluid in a pipeline and the flow-driven valve. The research was conducted using a numerical experiment with preset and variable parameters.

Keywords: pipeline, valve, compressible fluid, water hammer, self-oscillation, hard excitation.

УДК 621.01

ИЗМЕРЕНИЕ ДИСБАЛАНСА ШНЕКОВЫХ ВАЛОВ

***Б.А. Гордеев*[1], *К.В. Голубева*[2]**

[1]Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН
[2]Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

kupycuk@bk.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Экспериментальные исследования процессов движения с использованием в качестве первичных измерительных преобразователей бесконтактных ультразвуковых преобразователей выявили дополнительные возможности их применения: при измерении низкочастотных колебаний строительных конструкций, исследовании дисбалансов вращающихся роторов и шнековых валов. Рассмотрены возможности использования акустических методов при измерениях вибрации шнековых механизмов.

Ключевые слова: дисбаланс, шнек, эффект Доплера, вибрация, модуляция, фаза.

Ультразвуковые вибропреобразователи находят применение в задачах экспресс-анализа виброакустических сигналов зубчатых передач, исследовании дисбалансов роторов, а также при измерениях торсионных моментов, калибровке контакных пьезоэлектрических преобразователей. В настоящее время ультразвуковые фазовые преобразователи движения находят широкое применение при исследовании распределения вибрационных полей в гидрофонах, акустических диффузорах и применяются при поверке и аттестации контактных вибропреобразователей.

Применение бесконтактных виброакустических преобразователей связано с рядом особенностей. Одна из важнейших – оценка квазистатического приближения, когда время распространения фронта зондирующей волны имеет один порядок с периодом вибрационного воздействия. При этом возникает задача разработки специальных алгоритмов для выделения информационных сигналов на основе фазовой модуляции отраженного акустического сигнала. Для решения этой проблемы рассмотрена краевая задача, описывающая взаимодействие заданной излучаемой источником волны, имеющей плоский фронт, с движущейся идеально отражающей плоской границей раздела сред. Информативными признаками будут девиация частоты за счет эффекта Доплера и модуляция фазы.

Проведенный анализ показал, что ошибка измерения фазы, а следовательно, и виброперемещения, обусловлена соотношением скоростей зондирующего сигнала и исследуемого объекта. Предложены соответствующие алгоритмы обработки принимаемого сигнала с целью получения более достоверной информации о параметрах движения границы раздела сред.

Учитывая изменение параметров исследуемого процесса, можно выбирать оптимальный способ обработки полученной информации с минимизацией погрешностей. Преимущества изложенного метода измерений параметров вибрации перед другими акустическими методами заключаются в том, что не вносится искажений в исследуемый процесс, исключаются электромагнитные помехи, не требуется специально подготовленной поверхности исследуемого объекта. Разработанный метод и устройства на его основе находят применение в машиностроении, судостроении, медицине. Показано его применение при исследованиях виброактивности вращающихся валов.

Однако при измерении дисбаланса шнековых механизмов возникают дополнительные трудности, так как поверхность шнека представляет собой винтовую поверхность, где высота спирали может быть одного порядка с диаметром шнека. Тогда выходной сигнал насыщается дополнительными гармониками, так как спираль шнека, попадая в зону действия зондирующего акустического сигнала, вызывает модуляцию отраженного сигнала не только по фазе, но и по частоте. Поэтому выделение информационной составляющей по фазе связано с возрастающими ошибками. Ошибки увеличиваются при возрастании угловой скорости вращения шнека.

На рис. 1 изображена структурная схема одного из вариантов ультразвукового фазового измерителя микроперемещений, используемого при балансировке шнековых механизмов, а также при вибродиагностике лопаток турбин. Работа представленного ультразвукового измерителя дисбаланса шнекового механизма осуществляется следующим образом.

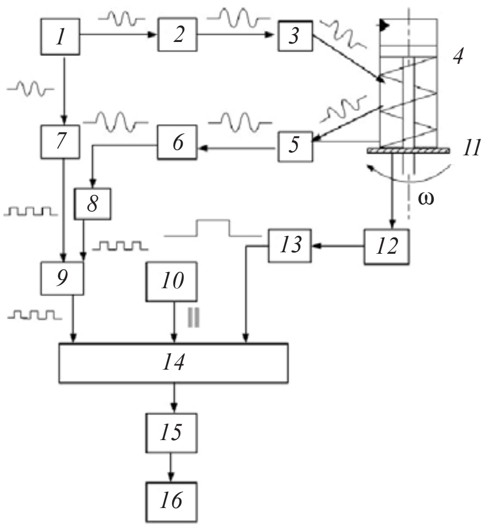


Рис. 1

Прежде всего на валу шнекового механизма закрепляется кодовый диск в том положении, чтобы при вращении вала поле действия ультразвукового зондирующего сигнала не входило в область шнекового выступа, иначе при вращении вала зондирующий луч, попадая на шнековый выступ, отражается от него, наполняясь неинформативными гармоническими составляющими. Эти составляющие значительно затрудняют обработку сигнала и вносят ошибку, достигающую 100% и более.

Сигнал генератора *1* ультразвуковой частоты 100–300 кГц подается на усилитель мощности *2*, а затем на излучающий преобразователь *3*. Меняя частоту задающего генератора *1*, добиваются наиболее эффективного излучения ультразвукового сигнала преобразователем *3* путем его настройки на частоту электромагнитного резонанса. При медленном вращении ротора *4* фаза отраженного ультразвукового сигнала меняется на некоторую величину, которая зависит от величины эксцентриситета вала. Если эксцентриситет отсутствует, то изменения фазы не происходит. Модулированный по фазе ультразвуковой сигнал поступает на приемный преобразователь *5*, настроенный на частоту механического резонанса. Преобразователь *5* преобразует сигнал акустической природы в сигнал электромагнитный со всеми индексами частотной и фазовой модуляции. Затем электромагнитный сигнал через согласующий усилитель *6* поступает на формирователь меандра *8*, где из синусоидального преобразуется в последовательность однополярных прямоугольных импульсов той же частоты. На формирователь *7* поступает опорный сигнал с выхода задающего генератора *1*. Выходной сигнал формирователя *7* также имеет вид меандра, но в отличие от выходного сигнала формирователя *8*, может иметь некоторое рассогласование по фазе и частоте. Изменение фазы линейно связано с изменением расстояния отражающей поверхности вала до излучающего и приемного преобразователей, а изменение частоты характеризует скорость вращения вала. В данном случае фаза является информативным параметром. Оба сигнала прямоугольной формы поступают на входы первого блока умножения *9*, на выходе которого формируется последовательность прямоугольных импульсов различной длительности. Длительность импульсов характеризует изменение фазы и, следовательно, расстояния до исследуемого объекта. Эта последовательность прямоугольных импульсов поступает на первый вход второго блока умножения *14*, на второй вход которого поступают тактовые импульсы высокой, порядка 1 ГГц, частоты с генератора 10-тактовых импульсов. Меняющееся число тактовых импульсов в выходном сигнале блока *14* соответствует изменению фазы между отраженным и опорным сигналами. На третий вход блока *14* поступает сигнал формирователя *13*, имеющего два устойчивых состояния. В качестве формирователя *13* может использоваться триггер, включенный по счетному входу. Триггер *13* меняет свое состояние каждый раз с приходом импульса с датчика *12* угла поворота вала. Кодовый диск *11* закрепляется на валу таким образом, чтобы триггер *13* находился в единичном состоянии только тогда, когда поле действия ультразвукового зондирующего сигнала свободно от шнекового выступа. Только в этом случае срабатывает схема умножения *14*. Блок анализа *15* предназначен для представления реализации исследуемого процесса в частотной или во временной областях. Выходной сигнал этого блока через цифроаналоговый преобразователь (ЦАП) *16* может поступать на осциллограф или непосредственно в компьютер, где в зависимости от программного обеспечения может анализироваться автокорреляционная функция, спектральный состав, гистограмма распределений информативных параметров.

Работа выполняется при частичной поддержке РФФИ, проект № 08-08-97057 - Р_Поволжье.

Список литературы

1. А.С. №823824 (СССР). Ультразвуковой фазовый измеритель виброперемещений / Гордеев Б.А., Кондратьев В.В. Заявлено 29.03.79, опубл.23.04.81. Бюл. №15.

2. А.С. № 1254334 (СССР). Ультразвуковой фазовый измеритель виброперемещений / Гордеев Б.А. Заявлено 04.10.84. № 3851154/25-28, опубл. 30.08.86. Бюл. № 32.

MISBALANCE MEASUREMENT OF SCREW SHAFST

B.A. Gordeyev, K.V. Golubeva

Experimental research of motion processes, using contactless ultrasonic converters as primary measuring converters have revealed additional possibilities of their application: in particular, for measuring low-frequency fluctuations of structures of civil construction, in researching the misbal-ance of rotating rotors and screw shafts. The article discusses the potential applications of acoustic methods for measuring vibration in screw mechanisms.

Keywords: imbalance, screw, Doppler effect, vibration, modulation, phase.

УДК 62-50

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В МИНИАТЮРНЫХ МОБИЛЬНЫХ РОБОТАХ С ВАККУМНЫМ КОНТАКТОМ К ПОВЕРХНОСТЯМ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

В.Г. Градецкий

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

gradet@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматриваются динамические процессы, происходящие в миниатюрных роботах с регулируемым вакуумным контактом к поверхностям, по которым происходит движение. Особенностью таких роботов является противоречивость сил трения на контактных поверхностях скользящего уплотнения и колес приводной системы. Для таких систем получены условия гарантированного сцепления колес и уплотнения для обеспечения движения робота. Установлено, что силы скольжения могут существенно влиять на параметры адаптивного управляемого движения робота. Приводятся оценки критических параметров движений.

Ключевые слова: мобильные роботы, миниатюризация, скользящее уплотнение, параметры движения, адаптация, условия сцепления, управляемое движение.

Исследование происходящих процессов в миниатюрных и микророботах с вакуумным методом контактирования, обеспечивающим движение по сложным поверхностям посредством миниатюрных электромеханических двигателей с возможностью перехода с одной поверхности на другую, привлекает все большее внимание исследователей Японии, США, Франции, Китая и других стран. Повышенный интерес к подобным фундаментальным исследованиям и разработкам связан с необходимостью создания многофункциональных мобильных систем для действий в экстремальных условиях и с выполнением технологических операций в связи с развитием микро- и нанотехнологий. Предыдущие исследования в основном были направлены на развитие конструкций отдельных узлов и изучение процессов в статике или в установившихся режимах. Однако процессы динамики в интегральной системе «робот–скользящее уплотнение» недостаточно изучены, тем более в миниатюрных роботах с микровакуумными системами, к исследованию и созданию которых приступают в настоящее время.

В данной работе приводятся результаты исследований динамических процессов, происходящих в миниатюрных роботах с регулируемым вакуумным контактом к поверхностям, по которым происходит движение. Управляемая генерация вакуума, в том числе в микродозах, осуществляется за счет регулирования оборотов миниатюрного двигателя вентилятора, установленного на роботе.

Особенностью таких роботов является противоречивость сил трения на контактных поверхностях скользящего уплотнения и колес приводной системы. Сила сцепления колес с поверхностью должна быть такой, чтобы обеспечить движение без проскальзывания и в то же время не увеличивать до определенных границ прижим к поверхности скользящего уплотнения, что увеличивает силу сопротивления движению. Одновременно требуется минимизировать зазор между поверхностью и уплотнением для обеспечения надежного прижима к поверхности. Для увеличения сцепления колес и минимизации зазора прижим необходимо увеличивать, а для уменьшения вредного трения скользящего уплотнения прижим нужно уменьшать. Получены условия гарантированного сцепления колес и уплотнения для обеспечения движения робота в результате вакуумирования.

Как было установлено, несмотря на малые величины скольжения, силы скольжения могут существенно влиять на параметры движения робота, даже привести к отсутствию работоспособности. Оценки критических значений этих величин подтверждаются экспериментально.

Построена математическая модель, учитывающая особенности движения миниатюрного мобильного робота с вакуумным контактом к поверхностям перемещения в сложных условиях управляемого движения. Модель учитывает особенности управления посредством электромеханических микродвижителей при изменении баланса сил, вызванном внешними возмущениями, и наличии сил трения, адгезии, поверхностного натяжения. Робот обладает свойствами адаптации к изменению видов поверхностей и режимов движения. Адаптация может быть достигнута за счет образования цепи управления с обратной связью по величине вакуума и подключения датчика вакуума на выходе полости вакуумирования.

Приводятся результаты исследования процесса вакуумирования в сочетании с поступательным движением робота посредством электромеханического миниатюрного движителя. Определены зависимости характеристик движения от функциональных, рабочих и конструктивных параметров. Рассмотрены процессы при трогании и торможении на вертикальной стене. Приводятся данные параметрического анализа, в результате которого выявлены управляемые параметры – зазор между поверхностью колес и уплотнением; степень вакуума внутри камеры корпуса робота в зависимости от свойств поверхности; скорость движения вдоль поверхности; скорость изменения вакуума, определяемая характеристиками генератора; сила отрыва от поверхности в зависимости от уровня разрежения.

Экспериментальные исследования выполнялись на макетах миниатюрных мобильных роботов с вакумным контактом к поверхности, полости скользящего уплотнения которых имеют различные геометрические размеры.

Сравнение экспериментальных и расчетных характеристик показывает удовлетворительное совпадение.

DYNAMICAL PROCESSES IN MINIATURE MOBILE ROBOTS WITH VACUUM CONTACT TO SURFACES OF TRANSLATION

V.G. Gradetsky

Dynamical processes in miniature mobile robots with vacuum contact to surfaces are considered. Discrepancy of the friction forces action on the contact surfaces of sliding seal and drive system wheels is a main feature of such robots. Conditions of guaranteed coupling for the seal and the wheels are determined. It was found that sliding forces can significantly affect the parameters of the motion of an adaptively-controlled robot. Estimations of ultimate motion parameters are given.

Keywords: mobile robots, miniaturization, sliding seal, motion parameters, adaptation, coupling conditions, control motion.

УДК 519.61

ГОМОГРАФИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА – НОВЫЙ РАЗДЕЛ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Е.А. Гребеников, Н.И. Земцова

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва

e-greben@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Обсуждается проблема существования точных решений гамильтоновых систем, описывающих новые математические модели космической динамики.

Ключевые слова: гамильтоновы системы, дифференциальные уравнения, стационарные решения, устойчивость, центральные конфигурации, канонические преобразования.

При исследовании нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений практически всегда возникает вопрос о существовании таких частных решений, которые обладают какой-либо симметрией, сохраняемой в процессе изменения независимой переменной.

А. Винтнер в монографии [1] показал, что дифференциальные уравнения ньютоновой проблемы многих тел допускают решения, сохраняющие с течением времени углы в конфигурации и пропорциональное подобие между всеми взаимными расстояниями в ней. Такие решения принято называть гомографическими решениями.

Примером таких конфигураций являются знаменитые частные решения диффренциальных уравнений ньютоновой проблемы трех тел, найденные Эйлером в 1766 году и Лагранжем в 1772 году. Это так называемые коллинеарные решения Эйлера и треугольник Лагранжа [2].

Б. Эльмабсут [3] и Е.А. Гребеников [4] доказали существование новых гомографических решений общей проблемы n тел в неинерциальной системе декартовых координат с началом в одном из притягивающих тел. Решения Б. Эльмабсута инвариантны относительно группы вращений с постоянной угловой скоростью и образуют однопараметрическое семейство. Решения Е.А. Гребеникова топологически эквивалентны относительно специальной группы вращений и образуют трехмерное семейство решений. Эти решения геометрически изображаются правильными плоскими многоугольниками, вращающимися около одной из притягивающих масс. В первом случае угловая скорость вращения постоянна и линейные размеры вращающегося многоугольника инвариантны, во втором случае и угловая скорость, и линейные размеры конфигурации переменны.

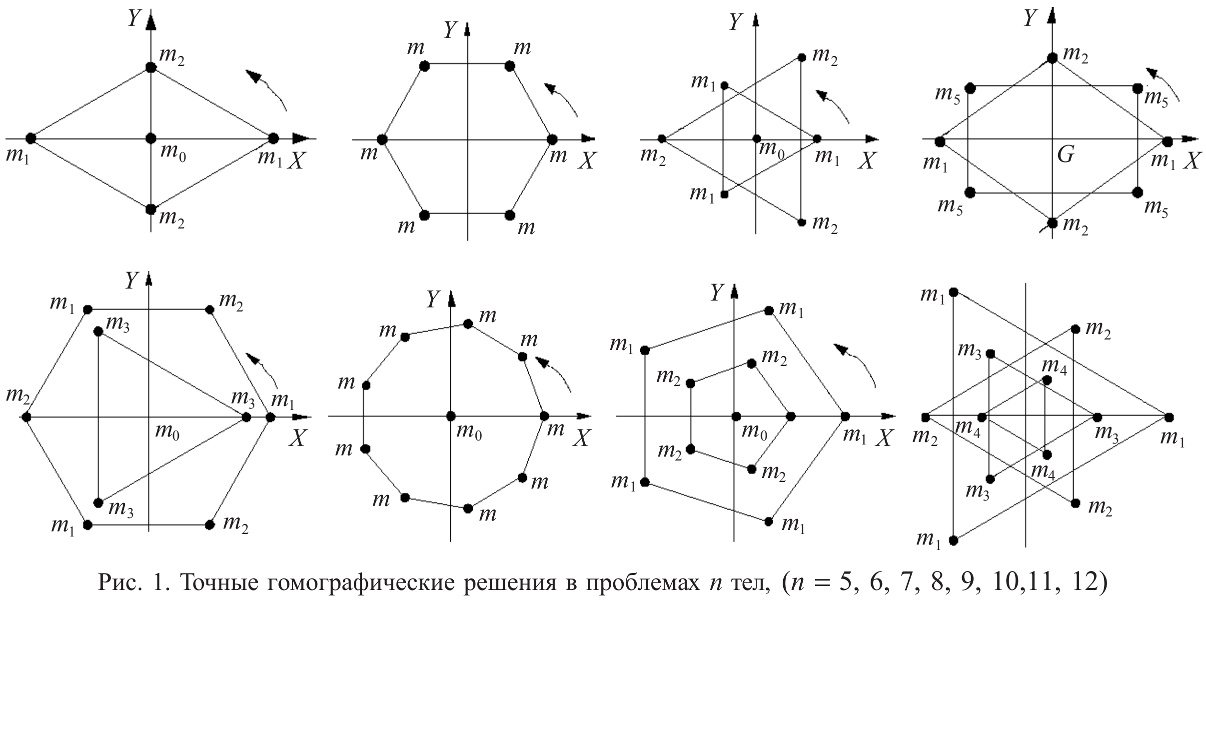


Рис. 1. Точные гомографические решения в проблемах n тел, (n = 5, 6, 7, 8, 9, 10,11, 12)

Появление систем компьютерной алгебры, какой, например, является система «Mathematica» [5], послужили началом многочисленных исследований новых гомографических решений. В результате этого найдены новые центральные конфигурации в ньютоновых задачах $n \geq 4$ тел и исследованы их геометрические и динамические свойства. На рис. 1 представлены некоторые найденные центральные конфигурации, геометрически изображающие новые гомографические решения.

Всякое гомографическое решение ньютоновой проблемы n тел порождает новую динамическую модель – ограниченную проблему $n + 1$ тел, состоящую в исследовании всевозможных движений бесконечно малой массы в поле притяжения n гравитирующих масс, при условии, что последние движутся в соответствии с известным частным решением (например, гомографическим) дифференциальных уравнений общей проблемы n тел:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m_0 x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \sum_{s=1}^{n}{}' m_s\left(\frac{x-x_s}{\Delta_s^3} - \frac{x_s}{(x_s^2+y_s^2+z_s^2)^{3/2}}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{m_0 y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \sum_{s=1}^{n}{}' m_s\left(\frac{y-y_s}{\Delta_s^3} - \frac{y_s}{(x_s^2+y_s^2+z_s^2)^{3/2}}\right),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{m_0 z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \sum_{s=1}^{n}{}' m_s\left(\frac{z-z_s}{\Delta_s^3} - \frac{z_s}{(x_s^2+y_s^2+z_s^2)^{3/2}}\right),$$

$$\Delta_s^2 = (x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + (y-y_s)^2. \qquad (1)$$

В системе (1) координаты x_s, y_s, z_s являются заданными функциями времени, поэтому она является неавтономной, неинтегрируемой и не имеет частных решений типа положений равновесия.

Только во вращающейся вокруг оси P_0 с постоянной определенной угловой скоростью ω [8] система становится автономной и может иметь точные частные решения типа стационарных, которые определяются из следующей системы алгебраических уравнений:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

$$\omega^2 x + 2\omega v - \frac{m_0 x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{x-x_k}{\Delta_k^3} = 0,$$

$$\omega^2 y - 2\omega u - \frac{m_0 y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{y-y_k}{\Delta_k^3} = 0,$$

$$\frac{m_0 z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{z-z_k}{\Delta_k^3} = 0. \qquad (2)$$

Уравнения (2) содержат нелинейные, иррациональные выражения относительно искомых величин x, y, поэтому для их решения используются графические и итерационные методы, реализованные в ССВ «Mathematica» [5].

На основе теоремы Арнольда – Мозера о ляпуновской устойчивости стационарных решений гамильтоновой системы с двумя степенями свободы [9] исследуется устойчивость в смысле Ляпунова положений равновесия системы (1). Предварительно выполняется цепочка канонических преобразований Пуанкаре – Биркгофа [11], приводящих гамильтониан системы (1) к виду, требуемому в формулировке теоремы.

Рассмотрены указанные динамические проблемы для некоторых законов гравитации, отличных от ньютоновского закона гравитации.

Список литературы

1. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. М.: Наука, 1967.

2. Абалакин В.К., Аксенов В.П., Гребеников Е.А. и др. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976.

3. Elmabsout B. Sur l'existence de certaines configurations d'equilibre relatif dans le probleme des n corps // J. Celaestial Mech. And Dynamical Astr. 1988. V. 4, №1. P. 131–151.

4. Гребеников Е.А. Существование точных симметричных решений в плоской ньютоновой проблеме многих тел // Мат. модел. 1998. Т. 10, №8. С. 75–80.

5. Дьяконов В.П. Mathematica 4.1/4.2/5.0 в математических и научно-технических расчетах. М.: Солон, 2004.

6. Гребеников Е.А. Математические проблемы гомографической динамики. М.: МАКС Пресс, 2010.

7. Гребеников Е.А., Ихсанов Е.В. Общий алгоритм генерации дифференциальных уравнений ограниченных задач космической динамики // Applications of the «Mathematica» System to Social Processes and Mathematical Physic: Proceedings of the international workshop. Brest. 3–6 June, 2003. P. 27–33.

8. Гребеников Е.А., Козак Д., Якубяк М. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел. М.: РУДН, 2001, 2002.

9. Арнольд В.И. Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае. М.: Наука, 1961. Т. 137, №2. С. 255–257.

10. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973.

11. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. Ижевск: ИД Удмуртский университет, 1999.

HOMOGRAPHIC DYNAMICS – NEW SECTION OF CELESTIAL MECHANICS

E.A. Grebenikov, N.I. Zemtsova

The problem of existence of exact solutions of the Hamilton systems describing new mathematical models of space dynamics is considered.

Keywords: Hamilton systems, differential equations, stationary solutions, stability, central configurations, canonical transformations.

УДК 534.1;621.9

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ОБРАБОТКЕ ДЛИННЫХ СТУПЕНЧАТЫХ ВАЛОВ

А.В. Грезина, В.Н. Комаров

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

kovn@uic.nnov.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

В качестве объекта исследования рассмотрен закрепленный в центрах длинный ступенчатый вал, при обработке которого на токарном станке при определенных режимах резания наблюдаются нелинейные эффекты (мягкий и жесткий режимы возбуждения автоколебаний). Для исследования этих эффектов и выявления причин их возникновения построена математическая модель упругой системы вала с замыканием на динамику процесса резания, которая описывается с помощью динамических характеристик резания, полученных экспериментально. С помощью метода энергетического баланса получены выражения для амплитуд автоколебаний и условия, определяющие возможность возникновения мягкого и жесткого режимов возбуждения автоколебаний.

Ключевые слова: математическая модель, упругость, динамические характеристики резания, автоколебания, мягкий и жесткий режимы возбуждения, устойчивость.

Известно, что при обработке длинных валов на токарных станках на наиболее производительных режимах резания возникают вибрации, приводящие к снижению качества и точности обрабатываемой поверхности, повышенному уровню шума на рабочем месте. Из трех видов колебаний – вынужденных, типа параметрического резонанса и автоколебаний – основная роль в возбуждении вибраций при резании металлов принадлежит автоколебаниям. Способы борьбы с вынужденными колебаниями хорошо известны. Значительно труднее бороться с автоколебаниями, которые могут возникнуть совершенно внезапно при отсутствии внешних периодических сил. Успех в решении проблемы гашения автоколебаний при резании металлов и создании новых, более виброустойчивых конструкций металлорежущих станков в значительной степени зависит от понимания природы и характера возникновения автоколебаний и физической сущности динамики процесса резания, степени разработки методик построения автоколебательных моделей, адекватных в своем описании поведению реальной конструкции станка, и наличия эффективных методов расчета этих моделей на устойчивость и автоколебания.

Ранее экспериментально был обнаружен жесткий режим возбуждения автоколебаний при точении ступенчатого вала [1]. Методика экспериментальных исследований жесткого характера возбуждений основывалась на известных положениях теории нелинейных колебаний.

Жесткий режим возбуждения автоколебаний, в отличие от мягкого, характеризуется двумя особенностями: принципиально различным поведением нелинейной динамической системы в зависимости от начальных условий и неоднозначностью бифуркационных значений параметров, при которых происходит возбуждение и гашение автоколебаний.

Следует заметить, что жесткий режим возбуждения автоколебаний приводил к резкому снижению качества обрабатываемой поверхности, а иногда – к поломке инструмента.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что анализ характера возбуждения автоколебаний в реальных механических системах имеет важное значение для правильной постановки задачи их исследования. В случае мягкого режима возбуждения автоколебаний для исследования поведения нелинейной системы, согласно известной теореме Ляпунова, можно использовать линеаризованные уравнения. В этом случае вопрос об устойчивости сводится к анализу корней соответствующего характеристического уравнения. При жестком режиме возбуждения автоколебаний исследования устойчивости, вообще говоря, недостаточно и требуется рассмотрение задачи в нелинейной постановке.

Для исследования нелинейных явлений строится математическая модель замкнутой динамической системы вала, описывающая взаимосвязь колебаний упругой системы вала с динамикой процесса резания. При написании математической модели упругой системы вала предполагается, что материал вала обладает свойством однородности и изотропности и для него справедлива гипотеза плоских сечений. Математическая модель упругой системы вала представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями, описывающими на концах вала условия закрепления его в центрах и условия непрерывности и гладкости упругой линии, равенство перерезывающих сил и изгибающих моментов в точках сопряжения ступеней вала. Динамика процесса резания описывается с помощью динамических характеристик резания. Известно, что динамическая характеристика процесса резания металлов в общем случае является нелинейной функцией относительного смещения и относительной скорости резца и детали в зоне резания, а также технологических параметров резания, таких как геометрия инструмента, глубина, подача, скорость резания и др. [2, 3].

Наибольшее число видов обработки на металлорежущих станках происходит по следу, т.е. в условиях, когда изменение толщины срезаемого слоя зависит не только от характера колебаний в данный момент, но и от следа, оставленного резцом при колебаниях на предыдущем обороте детали. Возбуждение автоколебаний в таких условиях происходит при одновременном образовании и срезании волны.

Для упрощения задачи используется проекционный метод Бубнова – Галеркина. В качестве координатной функции берется первая собственная форма поперечных колебаний вала, так как из практики обработки длинных валов известно [1, 4], что возбуждение автоколебаний обычно происходит на частотах, близких к низшей собственной частоте свободных поперечных колебаний вала.

В результате получается модальное уравнение вида

$$\alpha\ddot{q}(t)+\beta\dot{q}(t)+\gamma q(t)=-\Delta F V(x_0),$$

где

$$\Delta F=\alpha_1 V(x_0)(q(t)-\mu q(t-\tau))+\alpha_3 V^3(x_0)(q(t)-\mu q(t-\tau))^3+\alpha_5 V^5(x_0)(q(t)-\mu q(t-\tau))^5+\beta_1 V(x_0)\dot{q}(t)+\beta_3 V^3(x_0)\dot{q}^3(t)+\beta_5 V^5(x_0)\dot{q}^5(t)$$

– приращение динамической силы резания,

$$\alpha=\sum_{i=0}^{5}\rho S_{i+1}\int_{l_i}^{l_{i+1}}V^2(x)dx+m_1V^2(0)+m_2V^2(l),$$

$$\gamma=\sum_{i=0}^{5}EJ_{z_{i+1}}\int_{l_i}^{l_{i+1}}(V''(x))^2dx+c_1V^2(0)+c_2V^2(l),$$

$$\beta=\sum_{i=0}^{5}EJ_{z_{i+1}}h\int_{l_i}^{l_{i+1}}(V''(x))^2dx+h_1V^2(0)+h_2V^2(l)$$

– сумма энергетических произведений по кинетической, потенциальной энергиям и работе диссипативных сил; m_1, m_2, c_1, c_2, h_1, h_2 – массы, жесткости и коэффициенты рассеивания энергии в центрах слева и справа; $V(x)$ – низшая собственная форма поперечных колебаний вала, x_0 – координата точки приложения резца.

Поиск амплитуд автоколебаний осуществляется с помощью метода энергетического баланса, в основу которого положено условие равенства рассеиваемой и поступающей в систему энергии. Для применения этого метода выполним ряд преобразований: $q(t)=a\sin\omega t$, $q(t-\tau)=q(t)\times\cos\omega\tau-\dot{q}(t)\sin\omega\tau/\omega$.

Такое преобразование возможно при достаточно большом времени t, когда изображающая точка на фазовой плоскости находится вблизи предельного цикла.

Найдем мощность всех сил за период колебаний T:

$$\frac{1}{T}\int_0^T d(K+\Pi)=-\frac{\beta+V^2(x_0)\beta_1}{T}\int_0^T\dot{q}^2(t)dt-\frac{1}{T}\int_0^T\Delta F_1V(x_0)\dot{q}(t)dt=0,$$

$$\Delta F_1=\Delta F-\beta_1V(x_0)\dot{q}(t).$$

Корни получаемого в результате интегрирования биквадратного уравнения представляют собой аналитические выражения для амплитуд автоколебаний при жестком режиме:

$$a_{1,2}=0,\quad a_{3,4}=\pm\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-2c_3(c_2-\sqrt{c_2^2-4c_3c_1})}}{c_3},$$

$$a_{5,6}=\pm\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-2c_3(c_2+\sqrt{c_2^2-4c_3c_1})}}{c_3},$$

где

$$c_1=\pi(\beta\omega+\beta_1\omega V^2(x_0)+\alpha_1V^2(x_0)\mu\sin\omega\tau),$$

$$c_2=\frac{3}{4}\pi V^4(x_0)(\alpha_3(1-\mu\cos\omega\tau)^2\mu\sin\omega\tau+\alpha_3\mu^3(\sin\omega\tau)^3+\beta_3\omega^3),$$

$$c_3=\frac{5}{8}\alpha_5V^6(x_0)(1-\mu\cos\omega\tau)^4\mu\pi\sin\omega\tau+\frac{5}{8}\alpha_5V^6(x_0)\mu^5\pi\sin^5\omega\tau+\frac{5}{4}\alpha_5V^6(x_0)\times(1-\mu\cos\omega\tau)^2\mu^3\pi\sin^3\omega\tau+\frac{5}{8}\beta_5V^6(x_0)\pi\omega^5.$$

Как показывают проведенные исследования, жесткий режим возбуждения автоколебаний и его характеристики в большой степени зависят от конструктивных параметров обрабатываемого вала, внутреннего трения, от технологических параметров резания, времени полного оборота детали и периода свободных колебаний вала.

Список литературы

1. Городецкий Ю.И. Создание математических моделей сложных автоколебательных систем в станкостроении // Автоматизация проектирования. М.: Машиностроение, 1986. Вып. 1. С. 203–220.
2. Тобиас Х.. Теория нелинейной регенерации вибраций . ТАОИМ «КиТМ», 1974.
3. Городецкий Ю.И., Буданков А.С., Комаров В.Н. Об одной системе экспериментального исследования динамики процесса резания металлов // Пробл. машиностр. и надежности машин. 2008. №1. С. 80–86.
4. Городецкий Ю.И., Грезина А.В. Исследование устойчивости точения длинных валов с различными технологическими приспособлениями // Изв. вузов. Машиностроение. 1998. № 7–9. С. 7–11.

NONLINEAR EFFECTS IN THE PROCESSING OF LONG STEPPED SHAFTS

A.V. Grezina, V.N. Komarov

A long stepped shaft fixed at the centers is considered. When processing it at a lathe, nonlinear effects (soft and rigid modes of self-oscillations) can be observed. To investigate these effects and the reasons of their occurrence, a mathematical model is constructed. It considers elastic properties of a shaft and the dynamic characteristics of cutting obtained experimentally, By means of a power balance method, expressions for amplitudes of self-oscillations and conditions, occurrence of soft and rigid modes of excitation of self-oscillations are derived.

Keywords: mathematical model, elasticity, dynamic characteristics of cutting, self-oscillation, soft and rigid modes of excitation, stability.

УДК 534.1.699.841.550.34

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОЦЕНКИ КРИВОЙ ДИНАМИЧНОСТИ

В.Г. Григорян, Дж.К. Карапетян

Институт геофизики и инженерной сейсмологии им. А. Назарова НАН РА, Гюмри (Армения)

jon_iges@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматривается задача о возможности использования интегрального параметра кумулятивной абсолютной скорости для оценки кривой динамичности, применяемая в СНиП при расчетах сейсмических нагрузок. Проведен сравнительный анализ кривых динамичности, полученных по максимальным значениям ускорений колебаний грунтов и методом использования кумулятивной абсолютной скорости. Выявлены и исследованы особенности изменений рассмотренных кривых динамичности.

Ключевые слова: инженерная сейсмология, спектральная кривая динамичности, колебания грунта, кумулятивная скорость, интегральные параметры, длительность процесса.

При периодических усовершенствованиях норм антисейсмического строительства, помимо пересмотра некоторых исходных параметров, возникает необходимость уточнения, корректировки, а также предложения более объективных вариантов динамической кривой $\beta(T)$. В этом направлении в течение последних нескольких десятилетий было выполнено множество работ, сделаны конкретные предложения [1–7].

Так, исследования кривых $\beta(T)$, построенных по инструментальным записям сильных землетрясений, показывают, что уровень максимальных значений последних колеблется в довольно широких пределах. В частности, в последнее время (1989–2005 гг.) широкое использование реальных записей сильных землетрясений и сравнение построенных на их основе кривых $\beta(T)$ показали, что этот параметр характеризуется значительным разбросом.

Как известно, величина $\beta(T)$ представляет собой отношение реакции системы с одной степенью свободы (осциллятора с определенным периодом собственного колебания и затухания) или же спектра ускорения $\max\limits_t |S_A(t,T,n)|$ к максимальному ускорению колебания грунта – $\max\limits_t |a(t)|$, , то есть

$$\beta_A(T,t,n) = \frac{\max\limits_t |S_A(t,T,n)|}{\max\limits_t |a(t)|}, \qquad (1)$$

где $a(t)$ – акселерограмма данного землетрясения, $S_A(t)$ – виброграмма ускорения (реакция системы во времени для фиксированных периодов T), n – коэффициент затухания.

В последнее время, особенно в прикладных задачах инженерной сейсмологии, широко стали применяться интегральные параметры колебаний (среднеквадратичные значения ускорений

$$a_{rms} = \sqrt{\frac{1}{t_1}\int_0^{t_1}[a(t)]^2\,dt};$$

интенсивность по Ариасу

$$I_A = \frac{\pi}{2g}\int_0^{t_1}[a(t)]^2\,dt;$$

кумулятивная абсолютная скорость и/или «импульс» записей (CAV – Cumulative Absolute Velocity)

$$\mathrm{CAV} = \int_0^{t_1}|\,a(t)\,|\,dt;$$

характеристическая интенсивность $I_c = (a_{rms})^{3/2} \times \times\sqrt{t_r}$, которые характеризуются сравнительно меньшими разбросами оцениваемых величин [8]. Важно при этом еще и то, что в большинстве случаев интегральные параметры в отличие от максимальных ускорений, содержат в себе информацию о полном цикле колебательного процесса – показателя, играющего немаловажную роль в разрушающем эффекте землетрясения.

Исходя из поставленной задачи, рассматривается возможность использования параметра CAV с целью получения более информативной величины $\beta(T)$. В данном случае предлагается следующее соотношение:

$$\beta_{\mathrm{CAV}}(T,t) = \frac{\int_0^{t_1}|S_A(t,T,n)|dt}{\int_0^{t_1}|a(t)|dt}, \qquad (2)$$

где t_1 – длительность колебательного процесса.

В сущности, выражение (2) позволяет нам оценить динамическое воздействие, учитывая не только максимальную амплитуду и частоту колебания, но и весь цикл (длительность) колебательного процесса.

Для практической реализации поставленной задачи были использованы акселерограммы сильных землетрясений мирового банка данных (США, Турция, Иран, Грузия, Тайвань, Италия и др.). Расчеты спектров реакции и виброграмм выполнены для 50 значений периодов T свободных колебаний систем с 5% -м затуханием в интервале 0.05÷4.0 с.

На рис. 1 приведены средние кривые $\overline{\beta}_A(T)$ и $\overline{\beta}_{\mathrm{CAV}}(T)$, полученные путем расчета около трех десятков акселерограмм сильных землетрясений. Из сравнения кривых нетрудно заметить, что, несмотря на их общее сходство, наблюдается некоторое различие кривой $\overline{\beta}_{\mathrm{CAV}}(T)$ от $\overline{\beta}_A(T)$. Если средняя кривая $\overline{\beta}_A(T)$, рассчитанная по максимальным ускорениям колебаний грунтов характеризуется одним, ярко выраженым пиком – на периоде 0.2 с, то на кривой $\overline{\beta}_{\mathrm{CAV}}(T)$, полученной с использованием интегрального параметра CAV, выделяются два максимума: соответственно на периодах $T = 0.6$ с и $T = 1.5$ с.

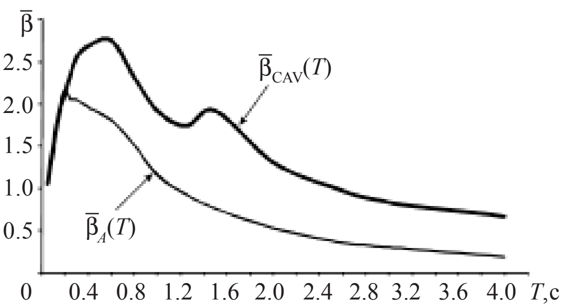


Рис. 1

Очевидно, что наличие второго максимума (на сравнительно больших периодах) указывает на тот факт, что построенная на основе интегрального параметра кривая динамичности является более информативной. В общих чертах средние кривые $\overline{\beta}(T)$ имеют одинаковый характер возрастания и спада, начиная с периодов 0.4÷0.6 с. В пределах периодов $T = 0.05÷0.2$ с по величине (уровню) $\overline{\beta}_A(T)$ и $\overline{\beta}_{\mathrm{CAV}}(T)$ равны. Начиная с $T = 0.3$ с, уровень кривой $\overline{\beta}_{\mathrm{CAV}}(T)$ всегда выше кривой $\overline{\beta}_A(T)$.

Список литературы

1. Дарбинян С.С. Относительно коэффцижента β(*T*) // Тез. докл. XI объединенной сессии научно-исследовательских институтов Закавказских республик по строительству. Тбилиси, 20–21 дек., 1979. С. 121–123.

2. Корчинский И.Л., Жунусов Т.Ж., Малевская О.Я. Количественная оценка параметров ожидаемых землетрясений. Изд-во Казахстан, 1985. 80 с.

3. Медведев С.В. Инженерная сейсмология. М.: Изд-во литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1962. 283 с.

4. Назаров А.Г. Метод инженерного анализа сейсмических сил. Ереван: Изд-во АН АССР, 1959. 284 с.

5. Хачиян Э.Е. Сейсмические воздействия на высотные здания и сооружения. Ереван: Изд-во Айастан, 1973. 327 с.

6. Хачиян Э.Е. Прикладная сейсмология. Ереван: Гитутюн НАН РА, 2008. 491 с.

7. Штейнберг В.В. и др. Методы оценки сейсмических воздействий // Вопросы инженерной сейсмологии. М.: Наука, 1993. Вып. 34. 95 с.

8. Григорян В.Г., Карапетян Дж.К. Комплексный анализ количественных параметров колебаний грунтов и оценка их зависимостей от магнитуд землетрясений // Строительная механика и расчет сооружений. 2008. №3. С. 59–63.

ON A METHOD OF THE ASSESSMENT OF THE CURVE OF DYNAMICITY

V.G. Grigoryan*, *J.K. Karapetyan

The problem on the possibility of the use of an integral parameter of cumulative absolute velocity for the assessment of the curve of dynamicity used in BCS for analyzing seismic loads is considered. A comparative analysis of the dynamicity curve is carried out on the basis of the obtained maximum values of acceleration of ground motion and method of the use of cumulative absolute velocity. Special properties of the changes of the considered dynamicity curves are revealed and studied.

Keywords: earthquake engineering, dynamicity spectrum curve, ground motion, cumulative velocity, duration of process.

УДК 531.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КА ПО ТЕЛЕМЕТРИЧЕСКИМ ДАННЫМ О ТОКЕ СОЛНЕЧНЫХ БАТАРЕЙ

А.А. Давыдов

Государственный космический научно-производственный центр им. М.В. Хруничева, Москва

aleksey_ad@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассмотрена задача определения фактического вращательного движения космического аппарата (КА) по косвенной телеметрической информации об электрическом токе, снимаемом с солнечных батарей. Эта задача решается посредством совместной обработки телеметрических данных, собранных на достаточно продолжительном отрезке времени, методом наименьших квадратов с помощью интегрирования уравнений вращательного движения аппарата. Приведены результаты решения этой задачи для низкоорбитального КА дистанционного зондирования Земли и геостационарного КА связи.

Ключевые слова: космический аппарат, телеметрическая информация, вращательное движение, метод наименьших квадратов.

При возникновении нештатной ситуации, когда получение телеметрической информации об ориентации и угловой скорости КА затруднено или невозможно, определение вращательного движения аппарата по косвенным данным позволяет ответить на ряд вопросов. В частности, понять предысторию нештатной ситуации, спрогнозировать энергобаланс КА на аварийном участке, определить текущее состояние гироскопических исполнительных органов КА и т.д. В качестве таких косвенных данных можно использовать измерения электрического тока, получаемого от солнечных батарей (СБ) КА. Ниже описана интегральная статистическая методика реконструкции фактического вращательного движения КА по этим данным.

Фактическое вращение КА представляется решениями уравнений его вращательного движения, составленными с учетом специфики конкретной задачи. Математическая модель измерений помимо уравнений движения включает соотношения, устанавливающие связь между ориентацией КА и углом между нормалью к рабочей поверхности СБ и направлением на Солнце. Решения уравнений движения выбираются из условия наилучшей аппроксимации с их помощью телеметрических данных о токе, получаемом от СБ, на достаточно продолжительном отрезке времени. Аппроксимация строится методом наименьших квадратов. Применение этого метода в задачах определения вращательного движения спутников по данным измерений бортовых датчиков описано в [1–3]. Минимизируемый функционал имеет вид

$$\Phi = \sum_{n=1}^{N} [I_n - I_0 \eta(t_n)]^2.$$

Здесь I_n – измеренное значение тока в момент времени t_n; I_0 – максимальный ток, вырабатываемый СБ на орбите Земли при перпендикулярном падении солнечных лучей на их плоскость; $\eta(t_n)$ – расчетный косинус угла падения солнечных лучей на светочувствительную поверхность СБ в момент t_n. Минимизация Φ проводится по начальным условиям вращательного движения КА и некоторым параметрам математической модели. В число таких параметров в разных задачах включались кинетические моменты двигателей-маховиков, массово-инерционные характеристики КА, параметры действующего на КА аэродинамического момента и т.п.

На рис. 1 представлены примеры аппроксимации данных измерений тока СБ, полученных на двух КА. На верхнем графике приведена аппроксимация данных, полученных на КА дистанционного зондирования Земли [2]. В этой задаче наряду с начальными условиями движения уточнялись параметры аэродинамического момента и массово-инерционных характеристик КА. На нижнем графике – аналогичная аппроксимация для геостационарного КА связи [3]. Здесь вместе с начальными условиями движения уточнялись кинетические моменты двигателей-маховиков (их значения принимались постоянными на временном интервале обработки данных). На графиках маркерами отображены телеметрические данные, сплошной линией – построенные аппроксимации.

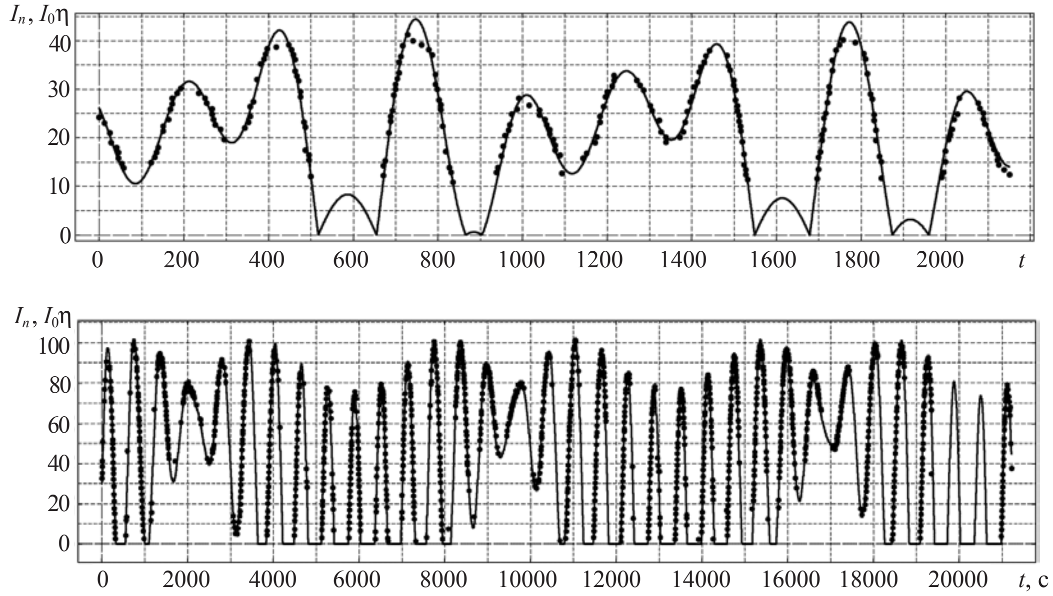


Рис. 1

Определение движения низкоорбитального КА по данным о токе СБ было выполнено на 12 интервалах времени. Начальное угловое положение КА и параметры аэродинамических возмущающих моментов были определены со значительной погрешностью, характеризующейся значениями от 0.5π до 1.5π, причем доминировали значения, близкие к верхним границам. Большая погрешность определения угловых величин вызвана малой информативностью данных о токе СБ, а параметров аэродинамического момента – еще и слабым влиянием сопротивления атмосферы на вращательное движение КА. Анализ показал, что движение КА на многих интервалах было близко к стационарному вращению вокруг одной из осей КА – оси максимального главного центрального момента инерции. Модуль угловой скорости составлял примерно 10 град/с. В целом, движение КА было близко движению Эйлера – Пуансо, полодии которого охватывали ось максимального главного центрального момента инерции. На части интервалов модуль угловой скорости составлял около 1 град/с. Более медленные движения КА были и более сложными. Изменение тока СБ в случае сложного движения оказалось более информативным, поэтому, в целом, оценки уточняемых параметров на этих интервалах получились заметно точнее.

Определение фактического движения геостационарного КА относительно центра масс было выполнено на 10 интервалах времени. Стандартные отклонения начальных углов ориентации не превышали 3.6°. Точность определений угловых скоростей составила от 0.01 град/с до 0.03 град/с. Погрешность определения суммарного приведенного кинетического момента двигателей-маховиков была не более $4.6\cdot10^{-4}$ с$^{-1}$. Модуль угловой скорости КА находился в диапазоне 0.6 ± 0.75 град/с, причем вектор угловой скорости был близок к одной из строительных осей КА. Анализ найденных угловых скоростей КА и суммарного кинетического момента двигателей-маховиков показал, что угловое движение КА можно представить в виде комбинации двух движений: быстрого вращения корпуса КА вокруг практически неизменной оси в связанной с корпусом системе координат (эта ось близка по направлению к вектору кинетического момента двигателей-маховиков) и медленного вращения этой оси вокруг вектора суммарного кинетического момента КА с маховиками. Суммарный кинетический момент системы корпус КА – двигатели-маховики не превышал 2 Н·мс; при этом кинетический момент корпуса КА находился в диапазоне 20 ± 22 Н·мс. На рассмотренных интервалах вращательное движение КА оказалось почти одинаковым. Отличие состояло лишь в изменении ориентации вектора суммарного кинетического момента двигателей-маховиков в строительной системе координат.

Несмотря на относительную простоту математической модели и принятых допущений, а также на значительную погрешность уточнения некоторых параметров, в целом задача идентификации вращательного движения решена успешно. Полученные результаты позволили объяснить ряд эффектов, наблюдавшихся во время неуправляемого движения спутников и определить методику выведения их из нештатной ситуации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-00467).

Список литературы

1. Брюханов Н.А. и др. Экспериментальное исследование режимов неуправляемого вращательного движения КА «Прогресс» // Космические исследования. 2006. Т. 44, № 1. С. 52–61.

2. Давыдов А.А., Сазонов В.В. Определение параметров вращательного движения КА по телеметрическим данным о токе солнечных батарей // Космические исследования. 2009. Т. 47, № 5. С. 434–443.

3. Давыдов А.А., Сазонов В.В. Определение параметров вращательного движения малого спутника связи по данным измерений тока солнечных батарей. Препринт №32 ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2009.

DETERMINATION OF PARAMETERS OF ATTITUDE MOTION OF THE SPACECRAFT FROM THE TELEMETRY DATA ON SOLAR BATTERY CURRENT

A.A. Davydov

The real attitude motion of a spacecraft based on indirect measurement data, i.e. the data of the electric current generated by its solar arrays, is reconstructed. The statistical technique for solving this problem is described. According to the technique, the measurements of the current, collected during a time interval about a few tens minutes, were processed simultaneously by means of the least squares method and integration of the spacecraft attitude motion equations. The estimates of the mathematical model parameters and initial conditions of an attitude motion were obtained as a result of such processing. The results of this reconstruction for low earth orbit and geostationary earth orbit satellite are given.

Keywords: spacecraft, telemetry data, attitude motion, least squares method.

УДК 531

АВТОКОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ МАНТИЯ–ТВЕРДОЕ ЯДРО ЗЕМЛИ И ВЕКОВЫЕ ВАРИАЦИИ ДЛИТЕЛЬНОСТИ СУТОК

Г.Г. Денисов, В.В. Новиков, А.Е. Федоров

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

novikov@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Для объяснения долгопериодических (период порядка 100 лет) вариаций скорости вращения Земли предложена механическая модель, суть которой состоит в учете гравитационного взаимодействия мантии Земли с твердым ядром и в опережающем вращении ядра относительно мантии. Рассматриваемая задача математически сводится к классической задаче о нелинейном осцилляторе, находящемся под действием постоянного момента сил. При значениях параметров, отвечающих известным характеристикам системы «мантия–твердое ядро», на фазовом цилиндре осциллятора имеются два аттрактора: устойчивое состояние равновесия и устойчивый предельный цикл. Первому из них отвечает синхронное вращение мантии и твердого ядра. Долгопериодические колебания длительности суток отсутствуют. Предельный цикл соответствует опережающему вращению ядра относительно мантии. При этом эллипсоидальность гравитационно-взаимодействующих тел приводит к периодическому обмену моментом количества движения между мантией и твердым ядром и, следовательно, к долгопериодическим изменениям длительности суток.

Ключевые слова: мантия Земли, твердое ядро, опережающее вращение, гравитационное взаимодействие, автоколебания

Будем представлять кору и мантию Земли одним однородным твердым телом с трехосным эллипсоидом инерции (далее называем мантией), а твердое ядро – другим телом того же типа, вращающимися вокруг главных осей с наибольшим моментом инерции. Пространство между телами заполнено вязкой несжимаемой жидкостью (жидкое ядро).

Уравнение вращательного движения мантии содержит момент сил, обусловленный деформацией Земли под влиянием Луны и Солнца. Приливной момент вызывает систематическое замедление вращения мантии, увеличивая продолжительность суток на $1.7 \cdot 10^{-7}$ секунд за столетие. Приливные моменты, действующие на внутренние части Земли, ввиду малости не учитываются.

Приливной момент тормозит мантию, а твердое ядро движется по инерции, опережая ее вращение. Это один из очевидных результатов данной модели. Опережающее вращение установлено в результате анализа сейсмических волн и нашло отражение, начиная с 1996 года, в многочисленных публикациях. Однако оценки времени одного оборота твердого ядра в относительном движении весьма различаются и составляют от 180 до 900 лет.

На движение мантии и твердого ядра наряду с моментами вязких сил со стороны жидкого ядра должны влиять моменты гравитационных сил, обусловленные несферичностью взаимодействующих тел. Они зависят от угла относительного поворота тел и их моментов инерции и дважды меняют знак при полном относительном повороте тел.

Имеются не нашедшие до сих пор объяснения долгопериодические изменения скорости вращения мантии, когда в течение нескольких десятков лет наблюдается уменьшение скорости вращения, сменяющееся затем столь же длительным ее увеличением. Эти вариации угловой скорости существенно превосходят величину систематического замедления вращения Земли. Спектральный анализ изменений длительности суток показал, что наибольший вклад в них вносят колебания с периодом ~65 лет и амплитудой 0.8 мс. Следующая по значимости гармоника имеет период ~130 лет и амплитуду 0.4 мс, остальные составляющие представлены существенно меньше.

Наличие внутри Земли мощного маховика – твердого ядра, вращающегося относительно мантии, открывает возможность объяснения длиннопериодических изменений длительности суток в рамках механической модели. Особенности динамики системы наиболее наглядны на упрощенной модели без учета инерционных свойств жидкого ядра, которое проявляется здесь как средство передачи момента.

От уравнений движения системы можно придти к уравнению, описывающему динамику относительного положения твердых тел. Оно эквивалентно уравнению маятника с постоянным моментом сил, который относится к системам с цилиндрической фазовой поверхностью. В случае когда параметры, входящие в уравнение, соответствуют мантии и твердому ядру, возможны два типа «притягивающих» режимов движения системы.

«Маятник» может иметь устойчивое состояние равновесия. В этом случае мантия и твердое ядро синхронно вращаются с угловой скоростью, равномерно убывающей из-за приливного момента. Долгопериодические вариации угловой скорости отсутствуют. Малые возмущения приводят к малым затухающим колебаниям мантии и ядра.

Существует устойчивое периодическое движение, которому отвечает предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр. В системе мантия–твердое ядро происходят автоколебания. Внутреннее тело совершает незатухающие обороты относительно внешнего тела, попеременно ускоряясь и замедляясь. Когда в относительном вращении твердое ядро замедляется, мантия ускоряется и наоборот. Период цикла равен половине времени полного оборота ядра в относительном движении.

Фазовые портреты системы в зависимости от соотношения между приливным моментом и моментом гравитационного взаимодействия могут качественно различаться.

В отсутствие гравитационного момента и в случае, когда он меньше приливного, существует только устойчивый предельный цикл. Без гравитационного взаимодействия твердое ядро может совершать лишь опережающее вращение с постоянной относительной угловой скоростью. При этом угловые скорости мантии и ядра монотонно уменьшаются из-за приливного момента. Малый гравитационный момент, дважды меняя знак за время полного оборота твердого ядра относительно мантии, не обеспечивает наблюдаемый уровень долгопериодических вариаций угловой скорости мантии. Очевидное следствие, вытекающее отсюда, состоит в том, что момент гравитационного взаимодействия должен превосходить приливной момент.

При гравитационном моменте, превосходящем приливной момент, в отличие от предыдущего случая, имеются уже две возможности: либо мантия и твердое ядро вращаются синхронно (состояние равновесия маятника), либо твердое ядро опережает во вращении мантию (предельный цикл). Какая из двух качественно различных ситуаций реализуется? Это зависит от предыстории системы (от начальных условий). Для Земли она такова, что установился автоколебательный режим, который и определяет долгопериодические изменения длительности суток. В предлагаемой модели для получения наблюдаемого размаха колебаний длительности суток момент гравитационного взаимодействия должен превосходить приливной момент почти в шесть раз. Оценка, проведенная исходя из разумных соображений о несферичности мантии и твердого ядра, позволяет утверждать, что такой гравитационный момент реален.

Исследование влияния на динамику системы инерционных и вязких свойств жидкого ядра и более сложного характера гравитационного взаимодействия (в упрощенной модели присутствует лишь вторая гармоника гравитационного момента) проводилось численно. В частности, рассматривались область притяжения предельного цикла и его форма (закон изменения длительности суток) в зависимости от этих факторов.

Отметим также, что в рамках предложенной модели находит объяснение значительный разброс в оценках скорости относительного вращения твердого ядра. Они должны существенно зависеть от того, на каком временном отрезке получены данные наблюдений. Показано, что опережающее вращение твердого ядра в некоторых исследованиях не обнаружено потому, что временному отрезку проведенных наблюдений отвечает фаза колебаний с минимальной относительной скоростью вращения.

Подведем итог. Предложена простая механическая модель для объяснения долгопериодических изменений скорости вращения Земли. Выяснилось, что движение твердого ядра относительно мантии неравномерно, и Земля может считаться колоссальным механическим осциллятором, находящимся в автоколебательном режиме. При относительном движении эллипсоидальность гравитационно-взаимодействующих тел определяет периодический обмен моментом количества движения между мантией и твердым ядром, что и приводит к долгопериодическим изменениям длительности суток.

Если более тщательное сопоставление данных измерений с результатами расчетов и более длительное наблюдение за скоростью вращения Земли подтвердят сделанные здесь выводы, то

– будет существенно уточнен период вращения твердого ядра относительно мантии (~125–135 лет против 180–900 лет из различных расчетов по прохождениям сейсмических волн через Землю);

– станет возможной существенно более точная оценка вязкости жидкого ядра Земли;

– появится возможность долгосрочного прогноза длительности суток.

– будет оценен гравитационный момент между ядром и мантией, времена его максимального значения и связанные с этим периодически изменяющиеся напряжения внутри Земли – источники землетрясений;

– утвердится представление о твердом ядре как о теле с трехосным эллипсоидом инерции с оценкой его моментов инерции.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-01-00411).

SELF-OSCILLATIONS IN SYSTEM THE MANTLE–EARTH'S SOLID CORE AND CENTURY-LONG VARIATIONS IN THE LENGTH OF THE DAY

G.G. Denisov, V.V. Novikov, A.E. Feodorov

A simple mechanical model explaining the long-period (about 100-year) variations in the Earth's rotational velocity is proposed. This model takes into account the gravitational interaction of the mantle with the solid core of the Earth and the fact that the core rotation leads that of the mantle. The considered problem mathematically is reduced to a classical problem about nonlinear oscillator, being under the influence of the constant moment of forces. At values of the parameters answering of the core-mantle system there are a steady equilibrium state and a steady limiting cycle on the phase cylinder of this oscillator. The equilibrium state corresponds to a single angular velocity for the mantle and solid core with no long-period oscillations in the length of the day. The limiting cycle corresponds to the core rotation leading the mantle rotation. In this case, the ellipsoidality of the gravitationally interacting bodies provides a periodic interchange of kinetic angular momentum between the mantle and solid core, that results in long-period variations in the length of the day.

Keywords: Earth’s mantle, solid core, advancing rotation, gravitational interaction, self-oscillations.

УДК 531.3

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПО ПЛОСКОСТИ С АНИЗОТРОПНЫМ ТРЕНИЕМ

Н.Н. Дмитриев

Санкт-Петербургский госуниверситет

dn7@rambler.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Изучается движение твердых тел по плоскости в предположении, что трение анизотропное, а площадка контакта тела с плоскостью является кругом, тонким кольцом или представляет собой узкую прямоугольную область. Кроме того, при опоре на круговую площадку рассматриваются случаи равномерного распределения давления, распределения давления по закону Герца и Буссинеска. Для каждого из случаев получена зависимость между линейной скоростью центра площадки опоры и угловой скоростью от момента инерции в момент окончания скольжения. Сформулированы соответствующие утверждения.

Ключевые слова: анизотропное трение, ортотропное трение.

Движение тел, опирающихся на круговую площадку, в частности, рассматривалось в работах [1, 2]. Пусть твердое тело опирается на круговую площадку, и рассмотрим три классических случая распределения давления: равномерное, по закону Буссинеска и по закону Герца:

$$p=\frac{mg}{\pi a^2};\quad p=\frac{p_0}{\sqrt{1-\rho^2/a^2}},\quad p_0=\frac{mg}{2\pi a^2};$$

$$p=p_0\sqrt{1-\frac{\rho^2}{a^2}},\quad p_0=\frac{3mg}{2\pi a^2}. \tag{1}$$

Кроме того, далее считаем, что оси Ox и Oy ортогональной системы координат выбраны так, что закон ортотропного трения имеет вид:

$$\mathbf{T}=-p\begin{pmatrix} f_x & 0\\ 0 & f_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x/v\\ v_y/v\end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\mathbf{T}$ – вектор силы трения; p – давление в точке контакта; v_x, v_y, v – проекции скорости точки на оси Ox, Oy и ее величина. Вектор скорости центра круговой площадки обозначим через

$$\mathbf{v}_0=v_0(\cos\vartheta\,\mathbf{i}+\sin\vartheta\,\mathbf{j}), \tag{3}$$

где v_0 – величина вектора скорости; ϑ – угол, задающий направление вектора v_0, который отсчитывается от оси Ox.

Тогда можно сформулировать утверждения следующего вида (для случая распределения давления по закону Герца) [3]:

Утверждение 1. Пусть тело соприкасается с горизонтальной плоскостью и область контакта представляет собой круг, давление в котором распределено по закону Герца. Пусть силы трения обладают ортотропными свойствами: f_x и f_y – коэффициенты трения вдоль ортогональных осей Ox и Oy, связанных с плоскостью, такие, что $f_y \geq f_x$, $\mu=f_y-f_x\geq 0$. Будем считать, что проекция силы тяжести на плоскость совпадает с центром круга и безразмерный момент инерции тела относительно оси, проходящей через эту точку перпендикулярно плоскости, равен $I_*=I/(ma^2)$ (звездочку далее не пишем). Тогда:

1) при $I\in(0,\,(f_x+\mu)/(5f_x))$ угловая скорость ω стремится к нулю быстрее, чем линейная скорость центра круга v_0, но обращается в нуль одновременно при $\omega/v_0\to 0$, касательная к фазовой траектории в точке $v_0=0$, $\omega=0$ имеет угол наклона, равный нулю;

2) при $I\in((f_x+\mu)/(5f_x),\,(6f_x+5\mu)/(24f_x))$ ω и v_0 обращаются в нуль одновременно и при этом выполнено соотношение $v_0=k\omega$, $k>1$;

3) при $I\in((6f_x+5\mu)/(24f_x),\,(2f_x+\mu)/(4f_x))$ ω и v_0 обращаются в ноль одновременно и при этом выполнено соотношение $v_0=k\omega$, $k<1$;

4) при $I\in((2f_x+\mu)/(4f_x),\,+\infty)$ ω и v_0 обращаются в ноль одновременно при $\omega/v_0\to 0$, но v стремится к нулю быстрее, чем ω, и касательные к фазовым траекториям в точке $v_0=0$, $\omega=0$ имеют угол наклона равный $\pi/2$.

Аналогичные утверждения можно сформулировать для двух других распределений давления. Сопоставление результатов представлено в таблице.

В случае прямоугольной области контакта имеет место следующее утверждение.

Таблица

Интервалы для моментов инерции, при которых выполняются пункты утверждения

	Равномерное распределение давления	Распределение давления по закону Буссинеска	Распределение давления по закону Герца
1	$I \in (0, (f_x+\mu)/(4f_x))$	$I \in (0, (f_x+\mu)/(3f_x))$	$I \in (0, (f_x+\mu)/(5f_x))$
2	$I \in ((f_x+\mu)/(4f_x), (5f_x+4\mu)/(15f_x))$	$I \in ((f_x+\mu)/(3f_x), (4f_x+3\mu)/(8f_x))$	$I \in ((f_x+\mu)/(5f_x), (6f_x+5\mu)/(24f_x))$
3	$I \in ((5f_x+4\mu)/(15f_x), (2f_x+\mu)/(3f_x))$	$I \in ((4f_x+3\mu)/(8f_x), (2f_x+\mu)/(2f_x))$	$I \in ((6f_x+5\mu)/(24f_x), (2f_x+\mu)/(4f_x))$
4	$I \in ((2f_x+\mu)/(3f_x), +\infty)$	$I \in ((2f_x+\mu)/(2f_x), +\infty)$	$I \in ((2f_x+\mu)/(4f_x), +\infty)$

Утверждение 2. Пусть твердое тело опирается узкой прямоугольной областью на горизонтальную плоскость, взаимодействие тела с плоскостью характеризуется ортотропным трением. Тогда если момент инерции тела и его ориентация на плоскости в момент остановки таковы, что выполняется неравенство

$$J >$$

$$> \max\left\{\frac{f_x+\mu\cos^2\varphi}{12(f_x+\mu\sin^2\varphi)}, \frac{f_x(f_x+\mu)+\mu^2\sin^2 2\varphi/4}{8f_x(f_x+\mu)+\mu^2\sin^2 2\varphi}\right\},$$

то в момент остановки величина $\beta = v/\omega$ равна нулю.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №10-08-90006-Бел_а).

Список литературы

1. Ишлинский А.Ю., Соколов Б.Н., Черноусько Ф.Л. О движении плоских тел при наличии сухого трения // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. №4. С. 17–28.

2. Розенблат Г.М. Динамические системы с трением. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. 156 с.

3. Дмитриев Н.Н. Скольжение твердого тела, опирающегося на круговую площадку, по горизонтальной плоскости с ортотропным трением. Ч. III. Распределение давления по закону Герца // Трение и износ. 2010. Т. 31, №4. С. 342–352.

SOME FEATURES OF THE MOTION OF SOLIDS ON THE PLANE WITH ANISOTROPIC FRICTION

N.N. Dmitriev

Motion of solids along a plane under the assumption that the friction is anisotropic and the contact area of the solid with the plane is a circle, a thin ring or a narrow rectangular area is studied. Moreover, for a circular contact area, the cases of uniform contact pressure distribution or the pressure distribution according to the law of Hertz and Boussinesq are considered. For each of the cases, the dependence between the linear speed of the center of the contact area and the angular velocity of the moment of inertia at the time moment corresponding to the end of the motion. The corresponding theorems have been formulated and proved.

Keywords: anisotropic friction, orthotropic friction.

УДК 531.36

О МЕТОДАХ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЙ УПРАВЛЯЕМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О.Г. Дмитриева, Г.А. Шепелев

Ульяновский госуниверситет

geo.shepelev@gmail.com

Поступила в редакцию 16.05.2011

Предложены новые методы решения задач о стабилизации движений нелинейных управляемых механических систем управлениями запаздывающего типа: с учетом конечного запаздывания в структуре обратной связи, ПИД-регуляторов и т.д.

Ключевые слова: стабилизация, запаздывающая обратная связь, механическая система, функционал Ляпунова, кусочно-непрерывное управление.

Рассмотрим механическую систему с нестационарными, голономными и идеальными связями, положение которой определяется n обобщенными координатами $q^T = (q_1, q_2, ..., q_n)$, кинетическая энергия системы представима в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad T_2 = \frac{1}{2}\dot{q}^T A(t,q)\dot{q},$$
$$T_1 = B^T(t,q)\dot{q}, \quad T_0 = C(t,q), \tag{1}$$

где $A(t, q)$ – матрица размерности $n\times n$ является положительно-определенной, $B(t, q)$ – матрица-столбец размерности $n\times 1$, $C(t, q)$ – скалярная функция.

Полагаем, что движение системы под действием управляющих сил U и других обобщенных сил (внешних, взаимодействия точек системы, трения и т.д.) $Q(t,q,\dot{q})$ описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + U.$$

Пусть $X = \{(q^0(t), \dot{q}_0(t)) : [t_0, +\infty) \to R^n\}$ есть заданное множество программных движений в виде ограниченных трижды непрерывно дифференцируемых функций $q = q^0(t)$ с ограниченными производными при $t \in [t_0, +\infty)$. Пусть $(q_0(t), \dot{q}_0(t))$ – какое-либо выбранное движение.

Рассматривается задача построения управляющего воздействия $U(t,q,\dot{q})$, при котором заданное движение $(q_0(t), \dot{q}_0(t))$ системы (1) было бы равномерно асимптотически устойчиво. (В классе непрерывных управлений эта задача решена в работах [1–3]). Дано решение этой задачи для следующих классов управлений: мгновенных кусочно-непрерывных; кусочно-непрерывных с запаздывающей обратной связью; непрерывных управлений при неполной обратной связи.

В частности, получен следующий результат. Положим для системы (1) $x = q - q_0(t)$. Пусть отсутствует измерение скоростей $(\dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_n(t))'$, управляющее воздействие формируется в виде регулятора

$$U^1 = U^2(t, x(t)) + \int_{-h}^{0} F(s)x(t+s)ds,$$

где $F = F'$ – неотрицательная матрица, полагаемая непрерывно дифференцируемой, с производной $\dot{F}(s)$ такой, что $y'\dot{F}(s)y \ge 0$, $y'\dot{F}(s_0)y > 0$ при $y \ne 0$ для некоторого $s_0 \in [-h, 0]$.

Допустим, что $Q_2 = Q_2^1(t, x(t)) + Q_2^2(t, x(t), \dot{x}(t))$, управляющее воздействие U^1 удается подобрать таким образом, что выполнены условия:

1) $\dot{x}'\dfrac{dA_1}{dt}\dot{x} + \dot{x}'Q_2^2 \le 0;$

2) для выбранной функции $\Pi = \Pi\ (t,\ x)$ и $U^2(t,\ x(t))$

$$U^2(t,x) + Q_2^1(t,x) + \int_{-h}^{0} F(s)ds \cdot x = -\frac{\partial \Pi(t,x)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial \Pi(t,x)}{\partial t} \le 0;$$

3) для каждого вектора $c \ne 0$

$$\left| Q_2(t,c,0) + U^2(t,c) + c'\int_{-h}^{0} F(s)ds \right| \ge a_1(|c|),$$

где $\Pi = \Pi\ (t,\ x)$ есть некоторая определенно-положительная функция.

Тогда управление

$$U = U^0(t) + U^2(t, x(t)) + \int_{-h}^{0} F(s)x(t+s)ds$$

решает задачу о стабилизации программного движения $(q_0(t), \dot{q}_0(t))$.

Разработан программный комплекс, который позволяет исследовать динамику переходных процессов механических систем с одной, двумя и тремя степенями свободы, записанных в специальном виде. Найденные типы управлений применены к задаче о глобальной и нелокальной стабилизации программного поступательно-вращательного движения твердого тела, при котором его центр масс движется с заданной скоростью, а тело имеет постоянную ориентацию в неинерциальной системе координат.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (2.1.1/11180) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракт № П/2230).

Список литературы

1. Андреев А.С., Румянцев В.В. О стабилизации движения нестационарной управляемой системы // Автоматика и телемеханика. 2007. № 8. С. 18–31.

2. Румянцев В.В., Андреев А.С. О стабилизации движения нестационарной управляемой системы // Докл. РАН. 2007. Т. 416, № 5. С. 627–629.

3. Андреев А.С. Знакопостоянные функции Ляпунова в задачах о стабилизации и управлении нелинейной системой // Проблемы аналитической механики и теории устойчивости: Сб. научн. статей, посвященный памяти академика В.В. Румянцева. М.: Физматлит, 2009. С. 218–226.

ON THE METHODS OF STABILIZATION OF CONTROLLED MECHANICAL SYSTEMS WITH DELAY

O.G. Dmitrieva, G.A. Shepelev

New methods for solving the motion stabilization problem for nonlinear mechanical systems by use of delayed controls have been proposed with taking into account of finite delayed feedback, PID-regulators, etc.

Keywords: stabilization, delayed feedback, mechanical system, Lyapunov functional, piece-wise continuous control.

УДК 531.1+517.9

О НЕИНТЕГРИРУЕМОСТИ НАТУРАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

С.А. Довбыш

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

sdovbysh@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Для систем с экспоненциальным взаимодействием (обобщенных цепочек Тоды) получены новые необходимые условия интегрируемости, что позволило закрыть проблему классификации интегрируемых систем этого класса. Рассматривается понятие интегрируемости, означающее наличие полного набора первых интегралов, являющихся комплексно-мероморфными функциями фазовых переменных и, таким образом, более общее, чем обсуждавшаяся ранее интегрируемость по Биркгофу. Установлено, что обобщенные цепочки Тоды, интегрируемые в нашем смысле, являются также интегрируемыми по Биркгофу.

Ключевые слова: обобщенные цепочки Тоды, первый интеграл, интегрируемость по Биркгофу.

Обзор исследований и постановка проблемы

Натуральные системы с экспоненциальным взаимодействием, описываемые гамильтонианами вида

$$H = \frac{1}{2}(p, p) + \sum_{k=1}^{m} v_k \exp(a_k, q), \qquad (1)$$

изучались во многих работах. Здесь $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$, фазовые переменные $p, q \in \mathbf{R}^n$ канонически сопряжены, $a_k \in \mathbf{R}^n$ – некоторые векторы и $v_k \in \mathbf{R}$ – соответствующие коэффициенты. Множество $\Delta = \{a_k\}$ векторов a_k часто называют спектром системы. Именно спектр (а не коэффициенты v_k) является главной характеристикой, определяющей свойства системы. Система (1) называется редуцируемой, если ее спектр распадается на две части, лежащие в ортогональных подпространствах. Очевидно, любая система распадается на нередуцируемые системы.

Весьма частный случай системы (1) (для специального вида спектра), получивший название цепочки Тоды, был впервые рассмотрен в 1967 г. Проведенные затем численные эксперименты указывали на интегрируемость цепочки Тоды и вскоре было доказано, что эта система действительно является вполне интегрируемой. Всплеск интереса к системам с экспоненциальным взаимодействием был вызван известной работой О.И. Богоявленского (1976 г.), в которой была установлена полная интегрируемость системы в случае, когда спектр совпадает с системой корней или с расширенной системой корней полупростой алгебры Ли. В последующем этот результат был перенесен на несколько более общие спектры, также имеющие алгебраическое происхождение, а именно, системы корней аффинных алгебр Каца – Муди, а системы с экспоненциальным взаимодействием, получившие название обобщенных цепочек Тоды, стали популярным объектом исследований и нашли многочисленные приложения в физике. Основное внимание уделялось исследованию систем, для которых интегрируемость была уже установлена. Были также найдены три новых случая интегрируемости, которые оказались очень близки к известным ранее. Количество же работ, в которых устанавливается неинтегрируемость (или свойства, близкие к неинтегрируемости), весьма ограничено. Особо следует отметить работы [1, 2] (хотя первая их них оставляет впечатление начатого, но незавершенного исследования), в которых появляются необходимые условия интегрируемости, налагаемые на спектр системы. Эти условия были навеяны свойствами спектров известных интегрируемых систем, которые, как отмечалось выше, имеют алгебраическое происхождение. При этом в [2] (см. также [3]) рассматривается интегрируемость по Биркгофу, т.е. наличие полного набора первых интегралов в инволюции, являющихся полиномами по импульсам p с коэффициентами, равными конечным суммам экспонент по координатам $\exp(b_k, q)$ с некоторыми векторами $b_k \in \mathbf{R}^n$. Для этих интегралов предполагалась независимость старших по p однородных форм, но, согласно [4], это требование можно ослабить до условия независимости самих интегралов. Сформулируем результат [2, 3].

Теорема 1 [2, 3]. *Если обобщенная цепочка Тоды интегрируема по Биркгофу, то для произвольной пары непараллельных векторов спектра* $\widetilde{a}_i$, $a_j \in \Delta$ *выполнено*

$$2(\widetilde{a}_i, a_j)/(\widetilde{a}_i, \widetilde{a}_i) \in -\mathbf{Z}_+, \tag{2}$$

где $\widetilde{a}_i$ – вектор спектра максимальной длины, параллельный a_i, а $-\mathbf{Z}_+$ означает множество неположительных целых чисел.

Этот результат позволил почти полностью классифицировать (нередуцируемые) системы, интегрируемые по Биркгофу. Было выявлено три системы, вопрос об интегрируемости которых оставался открытым. Две из них, как и ожидалось, оказались интегрируемыми. Третья система, описываемая гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + v_1 \exp(q_1) + \\ + v_2 \exp\left(-\frac{1}{2}q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}q_2\right) + v_3 \exp\left(\frac{1}{\sqrt{3}}q_2\right) + \\ + v_4 \exp\left(\frac{2}{\sqrt{3}}q_2\right) + v_5 \exp\left(\sqrt{3}q_2\right), \tag{3}$$

предполагалась интегрируемой только в частных случаях $v_3 = v_4 = 0$ и $v_4 = v_5 = 0$ (здесь $v_2 \neq 0$ ввиду нередуцируемости системы). Заметим, что в случае $v_5 = 0$, $v_4 \neq 0$ условия теоремы 1 нарушены и поэтому система неинтегрируема. Итак, вопрос о неинтерируемости стоял для случаев, когда $v_5 \neq 0$ и либо $v_3 \neq 0$, либо $v_4 \neq 0$. Обзор этих исследований можно найти в [5, 6]. Однако утверждение, что там доказана неинтегрируемость системы (3) в обоих только что описанных случаях, необоснованно. В действительности там получено только численное свидетельство (но не доказательство) неинтегрируемости для некоторых наборов коэффициентов v_k, что, конечно, не закрывает вопроса для произвольных наборов коэффициентов и не исключает возможности интегрируемости при некотором специальном выборе коэффициентов.

Описание результатов и обсуждение

Обозначим через E многогранник Ньютона системы (1) – выпуклую оболочку спектра Δ в $\mathbf{R}^n$. С использованием идей [7] мы доказываем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть обобщенная цепочка Тоды имеет полный набор первых интегралов, являющихся комплексно-мероморфными функциями фазовых переменных. Тогда для произвольной пары векторов спектра* $\widetilde{a}_i, a_j \in \Delta$ *таких, что* $\widetilde{a}_i$ *– вершина многогранника E,*

1) выполнено (2), если $\widetilde{a}_i$ *и* a_j *непараллельны,*

2) имеет место $2a_j/\widetilde{a}_i \in \mathbf{Z}$, *если* $\widetilde{a}_i$ *и* a_j *параллельны, но* имеются векторы спектра, непараллельные $\widetilde{a}_i$ и a_j (здесь $\mathbf{Z}$ означает множество целых чисел).

Из этой теоремы сразу следует неинтегрируемость системы (3) в обоих отмеченных случаях (когда $v_5 \neq 0$ и либо $v_3 \neq 0$, либо $v_4 \neq 0$), что закрывает проблему классификации интегрируемых обобщенных цепочек Тоды. Следует особо отметить, что в теореме 2 налагаются более слабые условия на первые интегралы и, таким образом, рассматривается более слабое понятие интегрируемости, чем интегрируемость по Биркгофу. В частности, можно рассматривать первые интегралы, являющиеся не полиномами импульсов и экспонент координат, а рациональными функциями импульсов p, координат q и экспонент координат $\exp(b_k, q)$. Однако из теоремы 2 следует, что системы, неинтегрируемые по Биркгофу в силу теоремы 1, являются также неинтегрируемыми и в более сильном смысле теоремы 2. С другой стороны, все интегрируемые системы (1) оказываются интегрируемыми в смысле Биркгофа. Таким образом, для систем (1) совпадают условия интегрируемости по Биркгофу и в смысле теоремы 2.

Список литературы

1. Yoshida H. // Nonlinear integrable systems – classical theory and quantum theory. Singapore: World Sci. Publishing, 1983. С. 273–289.
2. Козлов В.В., Трещев Д.В. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 537–556.
3. Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1995. 432 с.
4. Зиглин С. Л. // Функц. анализ и его прил. 1991. Т. 25. Вып. 3. С. 88-89.
5. Борисов А.В., Мамаев И.С. Современные методы теории интегрируемых систем. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 296 с.
6. Борисов А.В., Мамаев И.С. // Докл. РАН. 2004. Т. 394, № 4. С. 449–453.
7. Довбыш С.А. // Докл. РАН. 1998. Т. 361, № 3. С. 303–306.

ON NON-INTEGRABILITY OF NATURAL SYSTEMS WITH EXPONENTIAL INTERACTION

S.A. Dovbysh

New non-integrability conditions are obtained for natural systems with exponential interaction (generalized Toda lattices) which allows us to close the classification problem of integrable systems of this kind. A notion of integrability is considered that means the presence of a complete set of first integrals being complex-meromorphic functions in the phase variables and, thus, more general than the integrability in the sense of Birkhoff (i.e. the presence of a complete set of first integrals being polynomials in momenta and exponents of coordinates with some coefficients) discussed earlier. However, it is established that the generalized Toda lattices integrable in our sense are also integable in Birkhoff sense.

Keywords: generalized Toda lattices, first integral, integrability in the sense of Birkhoff.

УДК 539.36

ЗАМКНУТАЯ МАЛОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЕТРОТУРБИНЫ

М.З. Досаев, Л.А. Климина, Б.Я. Локшин

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

dosayev@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Разработана замкнутая модель ветроэнергетической установки (ВЭУ), описывающая динамику ветроприемного устройства и генератора постоянного тока с постоянными магнитами как двух взаимосвязанных компонентов единой электромеханической системы. Предложена методика идентификации параметров модели. Различные типы ВЭУ протестированы в НИИ механики МГУ и в университете Чин Юнь, Тайвань. По результатам тестирования проведена верификация модели. Получено качественное согласование теоретических и экспериментальных результатов. Проведен параметрический анализ модели.

В рамках модели теоретически описан эффект гистерезиса выходной мощности в зависимости от увеличения/уменьшения внешней нагрузки в цепи генератора; данный эффект играет принципиальную роль в ходе эксплуатации ВЭУ.

Ключевые слова: ветротурбина, генератор, устойчивость, параметрический анализ.

Краткое описание модели

Малопараметрическая модель аэродинамики тела, движущегося в потоке среды, была предложена группой ученых НИИ механики МГУ во главе с В.А. Самсоновым в [1]. Данная модель применена к описанию аэродинамического воздействия на лопасти ветротурбины, что обеспечило возможность качественного параметрического анализа режимов движения ВЭУ. Для учета электромеханического взаимодействия в замкнутую модель системы «ветротурбина–генератор» введено уравнение для силы тока в электрической цепи [2]. Полученная электромеханическая модель применима для ВЭУ различных конфигураций, как горизонтально-осевых, так и вертикально-осевых, отличие только в выражении для функции аэродинамического момента. Уравнения модели можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} J\ddot{\vartheta} &= M_{\text{aero}}(\vartheta,\dot{\vartheta}) - CI, \\ L\dot{I} &= C\dot{\vartheta} - (R + r_i)I. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь ϑ – угол поворота ветротурбины (вращающейся части ВЭУ); $\dot{\vartheta}$ – угловая скорость ветротурбины; J – момент инерции ветротурбины относительно оси вращения; $M_{\text{aero}}(\vartheta,\dot{\vartheta})$ – момент аэродинамических сил, действующих на лопасти, относительно оси вращения ветротурбины; I – сила тока; C – коэффициент электромеханического взаимодействия; L – индуктивность генератора; r_i – внутреннее сопротивление генератора; R – внешнее сопротивление в цепи генератора, характеризующее нагрузку на ВЭУ со стороны потребителей. В случае горизонтально-осевой ВЭУ аэродинамический момент зависит от величины угловой скорости, а в случае вертикально-осевой ВЭУ – еще и от текущего угла поворота. Значения функции $M_{\text{aero}}(\vartheta,\dot{\vartheta})$ вычисляются на основе гипотезы применимости квазистационарного описания воздействия среды, при этом зависимости коэффициентов подъемной силы и силы сопротивления от мгновенного угла атаки берутся из стационарных экспериментов [1, 2].

Для описания поведения экспериментального образца ВЭУ требуется дополнительная идентификация параметров r_i, C и L. Процедура идентификации упрощается предположением, что для широкого класса задач достаточно считать $L = 0$ (пренебрегаем временем переходных электрических процессов по сравнению с характерным временем переходных механических процессов). Тогда из второго уравнения системы (1) получаем, что отношение угловой скорости ротора к силе тока линейно зависит от внешнего сопротивления:

$$\frac{\dot{\vartheta}}{I} = \frac{1}{C}R + \frac{r_i}{C}. \qquad (2)$$

Для идентификации параметров модели r_i и C достаточно провести серию экспериментов с генератором ВЭУ: измерить значения силы тока при различных значениях R и $\dot{\vartheta}$.

Параметрический анализ рабочих режимов ВЭУ

В предложенной модели рабочему режиму ВЭУ (режиму авторотации) соответствует периодическая траектория системы (1). Так для горизонтально-осевой ВЭУ условие авторотации с учетом соотношения (2) принимает вид

$$M_{\text{aero}}(\Omega) - C^2\Omega/(R + r_i) = 0, \qquad (3)$$

где Ω – величина угловой скорости $\dot{\vartheta}$ на авторотационном режиме. Условие (3) при каждом фиксированном значении внешнего сопротивления R задает возможные значения угловой скорости на режимах авторотации: $\Omega = \Omega(R)$. При известной зависимости $\Omega(R)$ можно вычислить выходную мощность на рабочих режимах ВЭУ: $P = P(R) = I^2R = RC^2\Omega^2/(R + r_i)$. Характерно, что для некоторого диапазона значений $R \in (R_1, R_2)$ зависимости $\Omega(R)$ и соответственно $P(R)$ оказываются неоднозначными (рис. 1). За счет этого возникает гистерезис угловой скорости и мощности на рабочих режимах в зависимости от направления изменения внешней нагрузки в цепи генератора.

На рис. 1,*а*, *б* представлен качественный вид зависимости угловой скорости и мощности на рабочих режимах от внешнего сопротивления в цепи.

Сплошные линии соответствуют семействам притягивающих периодических режимов движения – режимов авторотации, а штриховые линии – семейству отталкивающих периодических движений, разделяющих зоны притяжения режимов авторотации. Можно выделить высокоскоростные и низкоскоростные авторотационные режимы. Высокоскоростные режимы гораздо более предпочтительны с точки зрения значений выходной мощности. Форма теоретических кривых зависит от аэродинамических характеристик лопастей ветротурбины и от значения внутреннего сопротивления генератора; а масштабирование осей зависит от скорости ветра, геометрических размеров ротора и коэффициента электромеханического взаимодействия.

Пример экспериментальной верификации полученных результатов представлен на рис. 1*а′*, *б′*. Для построения приведенных экспериментальных кривых в НИИ механики МГУ были проведены испытания тестового образца малогабаритной горизонтально-осевой ВЭУ, предоставленной тайваньским университетом Чин Юнь, в рамках программы международного сотрудничества по исследованию возобновляемых источников энергии.

Необходимо отметить, что при достаточно больших значениях момента инерции ротора для вертикально-осевой ВЭУ можно провести аналогичный анализ, используя функцию аэродинамического момента, осредненную по переменной ϑ. Таким образом, при $J \to \infty$ значения Ω угловой скорости ротора вертикально-осевой ВЭУ стремятся к решениям следующего уравнения:

$$\overline{M}_{\text{aero}}(\Omega) - C^2\Omega/(R + r_i) = 0, \qquad (4)$$

где

$$\overline{M}_{\text{aero}}(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_{\text{aero}}(\vartheta, \Omega)\,d\vartheta.$$

Таким образом, при больших значениях момента инерции характеристики ротационных режимов вертикально-осевой ВЭУ также качественно описываются графиками, приведенными на рис. 1. Однако при уменьшении величины J произойдут некоторые перестройки.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 09-01-00340, 11-08-00444).

Список литературы

1. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: МГУ, 1986.

2. Досаев М.З., Кобрин А.И., Локшин Б.Я. и др. Конструктивная теория МВЭУ: Учеб. пособие. Ч. I, II. М.: МГУ, 2007.

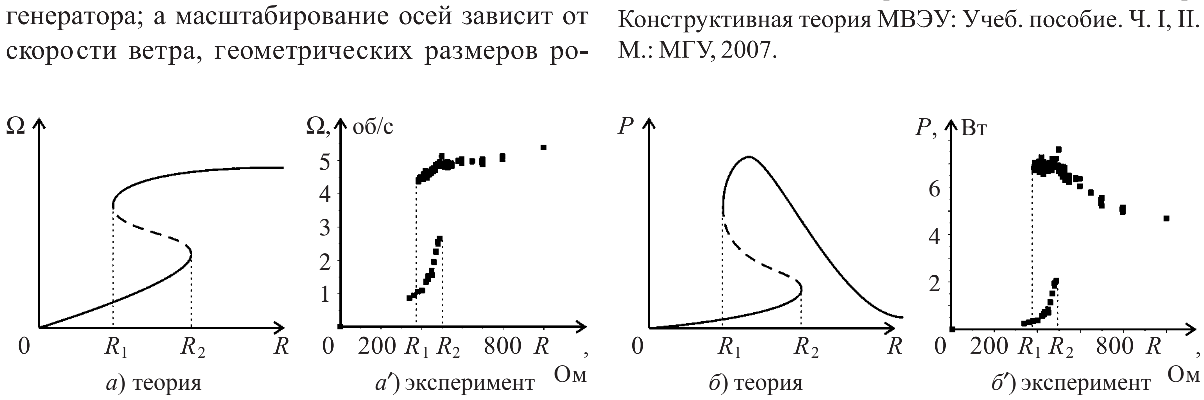


Рис. 1

CLOSED MODEL OF A WIND TURBINE WITH SMALL NUMBER OF PARAMETERS

M.Z. Dosaev, L.A. Klimina, B.Ya. Lokshin

Closed model of a wind power generator is developed that describes dynamics of the wind receiving device and of the permanent magnet generator as two interconnected components of the single electromechanical system. A method for the identification of model parameters is proposed. Different types of wind turbines are tested in the Institute of Mechanics of LMSU and in Ching Yun University (Taiwan). Basing upon testing results, verification of the model is realized. Qualitative agreement of theoretical and experimental results is obtained. Parametric analysis of the model is performed.

Within the model, hysteresis effect is described of the output power depending on increasing/decreasing of the external load in the generator circuit. This effect plays crucial role during wind turbine operation.

Keywords: wind turbine, generator, stability, parametrical analysis.

УДК 539.3

БАЛЛИСТИКА И РАЗРУШЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ ТЕЛ В АТМОСФЕРЕ ПЛАНЕТ

Л.А. Егорова, В.В. Лохин

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

egorova@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Аналитически решена задача о напряженно-деформированном состоянии, которое возникает в упругом теле шарообразной формы при его входе со сверхорбитальной (космической) скоростью в атмосферу планеты. Получено решение в виде ряда по полиномам Лежандра в случае обтекания упругого шара вязким газом в квазистатической постановке. Показано, что опасные упругие напряжения возникают за счет аэродинамических сил внутри шара ближе к его наветренной стороне и со временем начинают занимать все большее пространство внутри шара, приводя к его разрушению. Полученное решение позволяет судить о характере разрушения тела и оценить высоты, на которых могло начаться разрушение для известных метеороидов при заданных скоростях их входа в атмосферу Земли.

Ключевые слова: метеороид, напряженно-деформированное состояние, фрагментация, разрушение космических тел, модель «теплового взрыва».

Введение

При движении тела с космической скоростью в атмосфере температуры за ударной волной достигают десятков тысяч градусов, а давление газа – тысячи атмосфер. Имеет место мощное излучение (свечение) газа перед и за головной ударной волной и потери метеороидом массы за счет нагрева и дробления. При построении модели разрушения метеороида необходимо учитывать особенности газодинамического течения и физико-химические процессы в ударном слое и на аблирующей поверхности метеороида. Существенно также более подробное рассмотрение явления фрагментации метеороида на заключительной стадии его полета. Точных всеобъемлющих моделей этих явлений до сих пор нет. Поэтому представляют интерес различные простейшие модели движения и разрушения метеороидов в атмосфере планеты. Существующие модели разрушения метеороидов можно условно разбить на две группы: 1) катастрофическое разрушение тела (гидродинамические модели), 2) прогрессивное дробление (фрагментация). Модели первой группы [1] хорошо описывают поведение особо крупных однородных тел (таких, как Тунгусское космическое тело, астероиды Шумейкеров–Леви 9) и иногда мелких, но малопрочных тел. Модель прогрессивной фрагментации [2] описывает схему последовательного дробления космических тел на несколько фрагментов. Однако эти модели не дают объяснения наблюдающихся концевых вспышек метеоров и, в частности, «взрыва» Тунгусского космического тела. Предлагаем один из возможных вариантов оценки энерговыделения на заключительной стадии разрушения тела, подтверждающую возможность наблюдаемого эффекта «теплового взрыва» метеороида.

Баллистика разрушающегося метеороида

В метеорной физике решаются уравнения движения центра масс метеороида с переменной массой и площадью миделя с заданным коэффициентом сопротивления совместно с уравнением потери массы с заданным в нем коэффициентом теплопередачи и эффективной энтальпией уноса массы с поверхности метеороида (элементарная физическая теория метеоров, ФТМ).

Уравнения торможения и уноса массы записываются в виде

$$M\dot{V} = -\frac{1}{2}AC_D\rho V^2, \quad Q\dot{M} = -\frac{1}{2}AC_H\rho V^3,$$

где V, M, A, Q – текущая скорость, масса метеороида, площадь его миделя и эффективная энтальпия уноса массы с поверхности метеороида за счет аэродинамических сил и аэродинамического нагрева, C_D и C_H – коэффициенты сопротивления и теплопередачи.

В [3] было получено аналитическое решение системы основных уравнений физической теории метеоров в рамках модели прогрессивного равновесного дробления тела переменной массы под действием аэродинамической нагрузки. Показано, что начавшееся лавинное разрушение метеороида будет продолжаться вплоть до достижения скоростным напором своего максимума, положение и величина которого находятся с помощью полученного решения, а также определяется число, масса и размер осколков в этот момент. Дальнейшее дробление возможно, но уже под действием термонапряжений, которые возникают из-за больших перепадов температуры во всем объеме мелких осколков и пропорциональны квадрату их размеров.

Напряженно-деформированное состояние метеороида

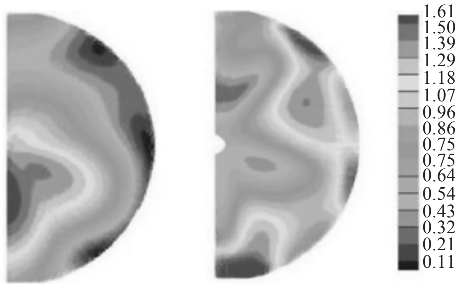
Из-за аэродинамических сил и потоков тепла на поверхности тела напряженное состояние в нем возрастает. Мы предполагаем, что разрушение начинается в тот момент, когда сдвиговое напряжение достигает критического значения внутри тела. Рассмотрим однородный упругий шар радиуса R, движущийся поступательно с космической скоростью вертикально к поверхности Земли. Напряженное состояние ищем в рамках статической линейной теории упругости в неинерциальной системе координат, в которой шар покоится. Исходное уравнение Ламе тогда будет иметь вид

$$\frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u}=\frac{\delta}{G}\frac{d\mathbf{V}}{dt}=-\frac{\mathbf{K}}{G};$$

$$\mathbf{K}=-\delta\frac{dV}{dt}=-\frac{3F}{4\pi R^3};\quad \sigma_r=\sigma(\theta),$$

$$\tau_{\gamma\theta}=\tau(\theta),\quad r=R,$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещений; σ_r – нормальное давление на поверхности шара; $\tau_{r\theta}$ – касательное напряжение на поверхности; ν – коэффициент Пуассона; G – модуль сдвига; R – радиус шара; r, θ – сферические координаты; $\mathbf{K}$ – объемная плотность сил инерции; $\mathbf{F}$ – суммарная сила, действующая на шар, вызванная сопротивлением атмосферы; δ – плотность тела. Нормальное и касательное напряжения на поверхности шара при гиперзвуковом обтекании шара известны. Решение уравнения ищем как сумму частного решения неоднородной задачи и общего решения однородной задачи в виде рядов по полиномам Лежандра. Компоненты тензоров деформации и напряжений определяются по известным формулам теории упругости. Напряженное состояние оценивается с использованием второго инварианта тензора упругих напряжений [4] и показано на рис. 1*а*. Также рассматривались термоупругие напряжения. Их роль возрастает для малых частиц или для осколков тела, так как они могут прогреться в течение малого промежутка времени, что ускоряет процесс разрушения. Термоупругие напряжения находились по известным формулам после решения задачи теплопроводности для температуры внутри шара, помещенного в горячий газ. Суперпозиция упругого и термоупругого напряжений представлена на рис. 1*б*. Видно, что опасные напряжения при учете термонапряженного состояния появляются не только в центре шара, но и вблизи его поверхности.



а) *б*)

Рис. 1

Фрагментация и разрушение метеороида в атмосфере

Скажем несколько более подробно о фрагментации и разрушении метеороида в атмосфере.

Большие каменные и железные метеороиды ударяются о поверхность Земли, почти не изменяя формы и массы после прохождения через атмосферу. Отсутствие кратера после падения Тунгусского космического тела диаметром 50–60 м показывает, что атмосфера может предотвратить образование кратера даже для тел такого размера. Большинство метеороидов разрушается под действием аэродинамических сил. Обсуждается процесс дробления метеороида, образования фрагментов различных размеров и формы. Предполагая обобщенно шарообразную форму фрагментов, оцениваем максимальный радиус фрагментов и максимальный радиус фрагмента, который не подвергается дальнейшему дроблению под действием аэродинамической нагрузки. Быстрое разрушение и испарение мелких осколков метеороида обусловливает эффект теплового взрыва. В работе принимал участие проф. Г.А. Тирский.

Работа поддержана Роснаукой (госконтракты 02.740.11.00615 и П694).

Список литературы

1. Григорян С.С. // Космич. исследования. 1979. Т. 17. Вып. 6. С. 875–893.

2. Ceplecha Z., ReVelle D. // Meteoritics & Planetary Science. 2005. V. 40, No 1. P. 35–54.

3. Тирский Г.А. Ханукаева Д.Ю. // Косм. иссл. 2008. Т. 46, №2. С. 122–134.

4. Егорова Л.А. // ПММ. 2011.

BALLISTICS AND THE FAILURE OF THE BODIES IN THE PLANET ATMOSPHERE

L.A. Egorova, V.V. Lokhin

The problem of the stressed-strained state which occurs in an elastic spherical body when it enters the planet atmosphere at a super-orbital (space) velocity is analytically solved. The analytical solution is obtained in the form of a series of Legendre polynomials for the case of a viscous gas flowing over an elastic sphere in a quasi-static formulation. It is shown that critical deformations arise due to aerodynamic forces inside the ball closer to his windward side and, as the time goes on, occupy more and more space inside the ball, leading to its failure. The solution makes it possible to describe the nature of the body failure and evaluate the height at which it starts for well-known meteoroids at a given entry velocity into the Earth's atmosphere.

Keywords: meteoroid, the stress-strain condition, fragmentation, disruption of cosmic bodies, the model of «thermal explosion».

УДК 531

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С СУХИМ ТРЕНИЕМ

В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

klimov@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Предложена новая полная модель сухого трения, в которой учтено контактное взаимодействие тела с поверхностью. Модель применяется для изучения следующих явлений: динамика волчка Томсона, динамика кельтского камня, шимми колеса самолета.

Ключевые слова: сухое трение, волчок, шимми.

1. Общий вид полной пятимерной модели сухого трения имеет вид:

$$M_x = R^3 \iint_D y\sigma_{\text{кач}}(x,y)dxdy + lF_y,$$

$$M_y = -R^3 \iint_D x\sigma_{\text{кач}}(x,y)dxdy - lF_x,$$

$$M_z = -fR^3 \iint_D \frac{\sigma_{\text{кач}}(x,y)}{|\mathbf{v}_c|}[ur^2 + x(v_y + l\omega_x) - y(v_x - l\omega_y)]dxdy,$$

$$F_x = -fR^2 \iint_D \frac{\sigma_{\text{кач}}(x,y)}{|\mathbf{v}_c|}(v_x - uy - l\omega_y)dxdy,$$

$$F_y = -fR^2 \iint_D \frac{\sigma_{\text{кач}}(x,y)}{|\mathbf{v}_c|}(v_y + ux + l\omega_x)dxdy;$$

$$\sigma_{\text{кач}} = \sigma(x,y)\left(1 + h\frac{x\omega_y - y\omega_x}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}\right).$$

2. Разложения Паде моделей трения (на примере двумерной модели).

Интегральные представления для главного момента и главного вектора элементарных сил трения являются однородными функциями скоростей со степенью однородности 0, поэтому они могут быть представлены аппроксимациями Паде в виде отношения двух полилинейных функций одинакового порядка:

$$M(u,v) = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n(u,v)}{Q_n(u,v)}, \quad F(u,v) = \lim_{n\to\infty} \frac{R_n(u,v)}{S_n(u,v)}$$

(сходимость равномерная во всей области изменения переменных u и v).

Далее рассматриваем ряд механических систем, динамика которых изучается с использованием приведенной выше модели сухого трения.

3. Волчок Томсона [1].

4. Кельтский камень [2].

5. Шимми [3]. Уравнения колебаний переднего колеса самолета имеют вид:

$$m\ddot{x} + px = -\frac{F_0 v}{v + b|\varepsilon\dot{\gamma}|},$$

$$m\ddot{y} + py = -\frac{3F_0\pi h\varepsilon^2\dot{\gamma}}{15\pi v + 32b|\varepsilon\dot{\gamma}|},$$

$$\frac{C}{R}\dot{v} = \frac{h\varepsilon^2 N}{5} - \frac{fRNv}{v + b|\varepsilon\dot{\gamma}|},$$

$$A\ddot{\gamma} + q\gamma = -\frac{M_0\varepsilon\dot{\gamma}}{|\varepsilon\dot{\gamma}| + \alpha v} + fN\gamma\frac{h\varepsilon^2}{5} + fN\frac{R}{l}y, \quad (0 \le v \le V).$$

Диаграмма нормальных напряжений в контакте:

$$\sigma(\theta,\rho) = \frac{3N}{2\pi\varepsilon^3}\sqrt{\varepsilon^2 - \rho^2}(1 + h\rho\cos\theta) \quad h = |h|\,\mathrm{sgn}\,v.$$

Линеаризация уравнений в окрестности стационарного проскальзывания:

$$\ddot{y} + \lambda_1^2 y + L\dot{\gamma} = 0, \quad \ddot{\gamma} + \xi\dot{\gamma} + \tilde{\lambda}_2^2\gamma - Sy = 0,$$

где

$$\lambda_1^2 = \frac{P}{m}, \quad \lambda_2^2 = \frac{q}{A}, \quad \tilde{\lambda}_2^2 = \lambda_2^2 - \frac{fNh\varepsilon^2}{5A},$$

$$\xi = \frac{M_0\varepsilon}{aAv}, \quad L = \frac{h\varepsilon^2 fN}{5mv}, \quad S = \frac{fNR}{Al}.$$

Критерий Рауса – Гурвица приводит к необходимым и достаточным условиям шимми:

$$15\pi lmA(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) < (3\pi lm\varepsilon^2 + 16aRA)hF_0.$$

Список литературы

1. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. О динамике волчка Томсона (тип-топ) на плоскости с реальным сухим трением // Изв. РАН. МТТ. 2005. №6.

2. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Глобальное движение кельтского камня // Изв. РАН. МТТ. 2008. №3.

3. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. О механизме явления шимми // Докл. РАН. 2009. Т. 428, №6.

ON CERTAIN DYNAMIC PROBLEMS OF A RIGID BODY WITH DRY FRICTION

V.Ph. Zhuravlev, D.M. Klimov

The new full model of forces of dry friction which appear as a result of interaction with surface is proposed. The model is used for the investigation of the following phenomena: motion of tippe top, motion of celtic stone, shimmy of airplane wheel.

Keywords: dry friction, top, shimmy.

УДК 621.391

КОЛЕБАНИЯ И БИФУРКАЦИИ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ С ФАЗОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

***Н.И. Зайцев*[1], *В.П. Пономаренко*[1]**

[1]Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского
[2]НИИ прикладной математики и кибернетики ННГУ им. Н.И. Лобачевского

povp@uic.nnov.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Приведены результаты исследования режимов динамического поведения сложной системы с фазовым управлением, проведенного на основе математических моделей с одной и двумя степенями свободы в цилиндрических фазовых пространствах. Установлено расположение областей параметров с различными динамическими состояниями системы, выделена область устойчивости синхронного режима, изучены процессы, развивающиеся в области неустойчивости синхронного режима. Выяснено, что изменением параметров моделей можно стимулировать в системе возбуждение разнообразных периодических и хаотических колебаний.

Ключевые слова: системы с фазовым управлением, устойчивость, фазовые портреты и бифуркации, регулярные и хаотические аттракторы, переходы к хаотическому поведению.

Введение

Системы с фазовым управлением представляют собой интересный класс автоколебательных объектов, которые обладают сложной динамикой и обеспечивают возможность эффективного воздействия на свойства и области существования генерируемых колебаний путем изменения структур и параметров цепей управления. Изучение динамики различных вариантов таких систем представляет интерес как с позиций теории колебаний и нелинейной динамики, так и в связи с широко обсуждаемыми проблемами передачи и обработки сложных сигналов, создания источников сложных регулярных и хаотических колебаний. Авторами приводятся результаты исследования колебательных режимов и бифуркаций в нелинейных моделях сложных фазоуправляемых систем с автоматическим регулированием усиления в цепи управления.

Исследуемые математические модели

Математические модели исследуемых фазоуправляемых систем представляют собой следующие нелинейные динамические системы с одной и двумя степенями свободы:

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\gamma-x\sin\varphi,$$

$$\frac{dx}{d\tau}=\lambda(G(x)-\beta x+\cos\varphi+\alpha x\sin\varphi), \qquad (1)$$

определенные на цилиндрической фазовой поверхности $U_0=(\varphi(\mathrm{mod}\,2\pi),x)$;

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=y,\quad \frac{dy}{d\tau}=z,\quad \mu\frac{dz}{d\tau}=\gamma-x\sin\varphi-y-\varepsilon_1 z,$$
$$\varepsilon_2\frac{dx}{d\tau}=G(x)+\cos\varphi+\alpha x\sin\varphi \qquad (2)$$

с четырехмерным цилиндрическим фазовым пространством $U=(\varphi(\mathrm{mod}\,2\pi),x,y,z)$. В уравнениях (1) и (2) τ – безразмерное время; $G(x)$ задается в зависимости от структуры цепи регулирования усиления функциями $G(x)=\delta-\beta x$ и $G(x)=\sigma/x-\beta x$; γ и δ – начальные рассогласования частот и амплитуд входного и опорного сигналов; λ, β, α, σ, ε_1, ε_2, μ – параметры цепей управления частотой и амплитудой опорного сигнала.

При исследовании моделей (1) и (2) основное внимание уделено решению следующих двух задач. Первая задача состоит в определении условий существования и реализации стационарного синхронного режима, в котором система осуществляет автоматическую подстройку частоты и амплитуды управляемых колебаний к аналогичным параметрам входного сигнала. Эта задача представляет наибольший интерес для применения рассматриваемых фазоуправляемых систем в качестве устройств синхронизации колебаний. Вторая задача имеет целью получить представление о возможных типах несинхронных режимов (режимов с непостоянными величинами рассогласований частот и амплитуд) и о сценариях их эволюции при изменении параметров моделей (1) и (2). Эта задача представляет интерес для решения проблем создания коммуникационных систем с хаотическими сигналами. Исследование моделей (1) и (2) проведено с применением качественно-численных методов нелинейной динамики и компьютерного моделирования.

Основные результаты

В результате исследования модели (1) выяснено, что соответствующие фазоуправляемые системы могут иметь два стационарных режима: синхронный режим, определяемый устойчивым состоянием равновесия модели (1), и периодический асинхронный режим (когда φ растет или убывает, а x периодически изменяется относительно некоторого среднего значения), который определяется устойчивым вращательным (охватывающим фазовый цилиндр U_0) предельным циклом. В пространстве параметров модели (1) выделены области: существования синхронного режима, глобальной устойчивости синхронного режима, одновременного существования синхронного и асинхронного режимов, существования асинхронного режима. Показано, что асинхронный режим возникает в результате бифуркаций петли сепаратрис седла и двойного предельного цикла второго рода. Получены аналитические оценки области глобальной устойчивости синхронного режима при значениях параметра $\lambda \ll 1$.

При численном исследовании модели (2) установлено, что в фазовом пространстве U могут существовать аттракторы различной сложности – от состояния равновесия до хаотических аттракторов колебательного (без вращения фазы), вращательного и колебательно-вращательного типа, которым соответствуют хаотические автомодуляционные колебательные режимы системы. Получены условия существования синхронного режима, выделена граница области удержания C_0 этого режима. Внутри области C_0 выделены область C_s глобальной устойчивости синхронного режима и область C_{s1}, соответствующая сосуществованию синхронного режима и автомодуляционных колебательных режимов различной сложности. Выяснено, что граница области C_s определяется бифуркациями модели (2), связанными с потерей устойчивости синхронного режима, с образованием петли сепаратрисы седло−фокуса и с исчезновением синхронного режима в результате слияния и исчезновения устойчивого и седлового состояний равновесия. Проанализировано поведение модели (2) при переходе через границы областей C_s и C_0. В области неустойчивости синхронного режима выделены область периодических квазисинхронных режимов и область со сложной динамикой, в которой у систем существуют периодические и хаотические автомодуляционные режимы. Установлена возможность существования в этой области двухчастотных квазисинхронных и асинхронных режимов, которым соответствуют притягивающие двумерные торы в фазовом пространстве U.

В качестве примера поведения системы вне области C_s на рис.1*а* приведена однопараметрическая бифуркационная диаграмма (μ, y), соответствующая значениям параметров $\gamma = 0.625$, $\alpha = 2$, $\beta = 1.1$, $\delta = 1.25$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$ и характеризующая эволюцию одновременно существующих квазисинхронных режимов колебательных предельных циклов S_1 и S_2 при изменении параметра инерционности μ, а на рис.1*б-н* даны (φ, y)-проекции фазовых портретов и фрагменты зависимостей $y(\tau)$, соответствующие аттракторам модели (2) с функцией $G(x) = \delta - \beta x$.

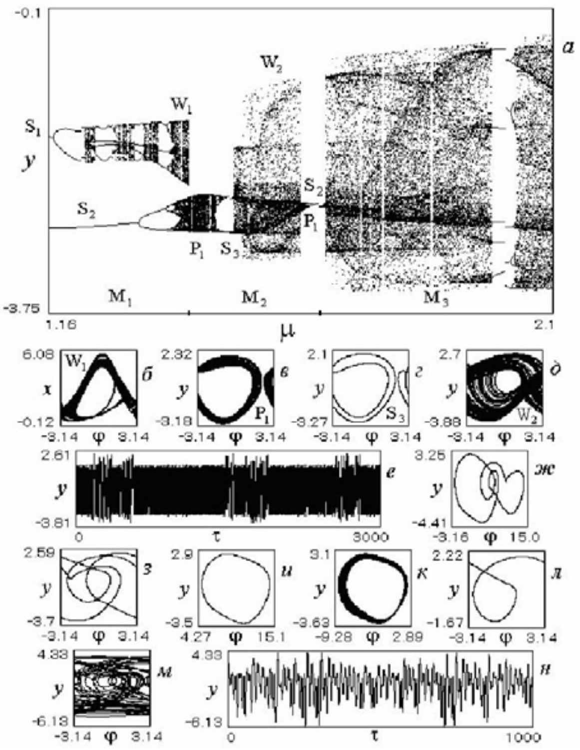


Рис. 1

На рис. 1 представлены проекции фазовых

портретов для различных значений μ: 1.422 (*б*); 1.47 (*в*); 1.5 (*г*); 1.6 (*д*); 1.63 (*е*); 1.99 (*ж*); 2.24 (*з*); 2.74 (*и*); 3.07 (*к*); 4.15 (*л*); 4.6 (*м*, *н*).

Для динамики системы характерны переходы между периодическими и хаотическими колебательными режимами. При этом для большей части исследуемого интервала значений μ в системе наблюдаются хаотические асинхронные режимы.

OSCILLATIONS AND BIFURCATIONS IN COMPLEX SYSTEMS WITH PHASE CONTROL

N.I. Zaitsev, V.P. Ponomarenko

The paper deals with the problem of nonlinear dynamics of complex system with phase control combining phase-locked loop and automatic gain control loop. The behavior of the examined model is described by nonlinear two- and four-dimensional sets of differential equations with periodical nonlinearities. Stability of synchronous mode, bifurcations determining boundaries of domain with quality different behavior of the considered system, and oscillatory modes arising in domain where synchronous mode is unstable are studied. Results are presented using two-parameter bifurcation diagrams, phase portraits of attractors, time realizations of oscillations, and Poincare maps.

Keywords: systems with phase control, stability, phase portraits and bifurcation, regular and chaotic attractors, transitions to chaotic behavior.

УДК 621.396:531.396

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСКРЫВАЮЩИХСЯ ТРАНСФОРМИРУЕМЫХ КОСМИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

В.Н. Зимин, В.Е. Мешковский

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва

sm11@sm.bmstu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Создание крупногабаритных трансформируемых раскрывающихся космических конструкций сопряжено с решением ряда проблем механики, обусловленных уникальностью систем, характерной особенностью которых является сочетание противоречивых требований увеличения геометрических размеров и обеспечения точности их функциональных поверхностей при весьма ограниченной массе силовых конструкций. Предложен комплексный подход к анализу динамики таких конструкций на основе совокупности разработанных моделей, каждая из которых нацелена на решение конкретных технических задач, связанных с исследованием параметров процесса раскрытия, определением динамических характеристик конструкции и оценкой прочности ее элементов.

Ключевые слова: крупногабаритные трансформируемые космические конструкции, динамика, комплексный подход, модель.

Разработка крупногабаритных раскрывающихся трансформируемых антенн, устанавливаемых на космических аппаратах (КА) связи, дистанционного зондирования и экологического мониторинга Земли, является частью общего направления развития космической техники, связанного с повышением эффективности радиотехнических антенн различного назначения. Конструкции трансформируемых антенн после раскрытия на орбите должны образовывать размеростабильные зеркальные поверхности с диаметром апертуры не менее 15 м и геометрической точностью от десятых до сотых долей миллиметров в зависимости от рабочего диапазона длин волн [1]. Для решения актуальных задач по созданию раскрывающихся трансформируемых космических конструкций требуется проведение научных исследований и разработок в части развития методов моделирования подобных конструкций. Необходимость проведения таких работ диктуется следующими соображениями.

Раскрывающиеся трансформируемые антенны представляют собой многоэлементные системы, состоящие из десятков, сотен и даже тысяч взаимосвязанных между собой элементов. Конструкции доставляются на космические орбиты в транспортном плотноупакованном состоянии и дальнейшее приведение их в рабочее состояние связано с реализацией процесса раскрытия. Работоспособность таких конструкций определяется, главным образом, тем, насколько велики возникающие в них усилия при развертывании, поэтому обеспечение их надежного раскрытия связано с решением сложных задач механики. Без применения разрабатываемых комплексных моделей по расчету процессов раскрытия складных конструкций невозможно обеспечение высоких показателей надежности функционирования проектируемой механической системы.

Наличие протяженных упругих конструкций в составе КА значительно усложняет решение задач ориентации, управления и стабилизации спутника. В силу своих конструктивных особенностей большие антенны имеют малую массу, но значительные моменты инерции в раскрытом состоянии. Упругие колебания конструкции антенн влияют на процессы ориентации, управления и стабилизации КА. Даже при достаточно малых амплитудах эти колебания могут привести к снижению уровня полезного сигнала в радиотехнических системах. Низшие частоты собственных колебаний больших раскрывающихся антенн лежат, как правило, в пределах диапазона чувствительности системы управления КА. Необходима максимально точная информация о формах и реальных частотах колебаний крупногабаритной антенны, чтобы эффективно настроить систему управления спутником. Поэтому одна из важных задач на этапе проектирования таких конструкций – расчет их динамических характеристик. Анализ частот и форм свободных колебаний больших антенных систем позволяет на начальном этапе проектирования конструкции сделать предварительные выводы об эффективности выбранной конструктивно-силовой схемы, скорректировать значения некоторых конструктивных параметров, уточнить компоновку антенны, оценить эффективность применения тех или иных конструкционных материалов.

При создании раскрывающихся трансформируемых космических конструкций значительная роль отводится натурным экспериментам, результаты которых являются основным критерием надежности и функциональной пригодности разрабатываемых конструкций. Для конструкций, функционирующих в космическом пространстве, важными факторами становятся невесомость, отсутствие или значительная разреженность атмосферы. Для воссоздания этих условий в наземных экспериментах требуются дорогостоящие стенды имитации невесомости, уникальные по размерам вакуумные камеры. Проведение полномасштабной экспериментальной отработки таких конструкций оказывается чрезвычайно дорогостоящим делом. Поэтому математический эксперимент, использующий разрабатываемые механические модели больших конструкций антенн с идентифицированными параметрами, является важным этапом проверки и обоснования функциональной пригодности проектируемой системы.

Сложная в прикладном плане задача математического моделирования раскрывающихся трансформируемых космических конструкций, очевидно, не может быть решена с помощью одной универсальной модели, пригодной для решения всех проблем инженерной практики. Это, в первую очередь, связано с тем, что темпы усложнения проектируемых крупногабаритных трансформируемых космических конструкций, состоящих из десятков, сотен и даже тысяч взаимосвязанных между собой элементов, и роста их размеростабильности как динамических систем будут постоянно опережать темпы развития методов и технических средств математического моделирования подобных конструкций. Поэтому представляется целесообразным проводить анализ динамики раскрывающихся трансформируемых конструкций в том объеме, который необходим для решения частных технических задач их проектирования, создания и экспериментальной отработки на основе совокупности разработанных моделей, каждая из которых нацелена на решение конкретных технических задач, связанных с исследованием параметров процесса раскрытия, определением динамических характеристик и оценкой прочности ее элементов.

При моделировании динамики раскрывающихся трансформируемых космических конструкций существенными являются вопросы о полноте учета динамических свойств конструкции в разрабатываемой математической модели и о тех значениях конструктивных параметров, при которых допустимы те или иные упрощения. Эти вопросы, а также некоторые другие, связанные с выбором конструктивных параметров, обеспечивающие заданные свойства конструкции, могут быть решены без интегрирования общих уравнений движения, путем анализа результатов решения задачи о собственных колебаниях конструкции.

Экспериментально исследованы динамические характеристики раскрывающихся трансформируемых космических конструкций ферменного типа с габаритными размерами 5×3, 6×3 и 6×7 м, элементы которых выполнены как из традиционных, так и композиционных материалов. Оценено влияние нелинейных свойств узлов раскрытия на динамические характеристики трансформируемых космических конструкций. Выявлены диапазоны частот, соответствующих собственным колебаниям конструкций.

Дана оценка влияния массовых характеристик отдельных элементов конструкций ферменного типа на параметры ее раскрытия. Предложен комплексный подход, который позволил с единых методических позиций упорядочить и формализовать построение расчетных моделей разной сложности за счет более полного учета физических свойств элементов реальной конструкции в соответствии с задачами этапов их проектирования, изготовления и экспериментальной отработки.

Список литературы

1. Баничук Н.В. и др. Механика больших космических конструкций. М.: Факториал, 1997. 302 с.

EXPERIMENTAL AND THEORETICAL INVESTIGATION OF SPACE DEPLOYABLE TRUSS STRUCTURES

V.N. Zimin, V.E. Meshkovsky

The development of large deployable space structures requires some mechanical problems to be solved. The problems arise due to unique contradictory demands to the systems: the necessity of increasing the dimension and ensuring the working surface accuracy on the one hand, and strong limitation of load-bearing unit masses on the other. A complex approach to the dynamic analysis of such structures based on a package of developed models where each model solves one of the prob-lems on deploy parameters investigation, determination of dynamic characteristics of structure or estimating the strength of the structural elements is presented.

Keywords: larger deployable space structures, dynamics, integrated approach, model.

УДК 62-50

ОПТИМАЛЬНОЕ ТОРМОЖЕНИЕ ВРАЩЕНИЙ СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА С ПОДВИЖНОЙ МАССОЙ В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

***Я.С. Зинкевич*[1]*, Д.Д. Лещенко*[1]*, А.Л. Рачинская*[2]**

[1]Одесская государственная академия строительства и архитектуры (Украина)
[2]Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова (Украина)

leshchenko_d@ukr.net

Поступила в редакцию 16.05.2011

Исследована задача об оптимальном по быстродействию торможении вращений свободного твердого тела. Предполагается, что тело содержит вязкоупругий элемент, который моделируется подвижной точечной массой, соединенной демпфером с корпусом. Кроме того, на твердое тело действует малый тормозящий момент сил линейного сопротивления среды. Считается, что в недеформированном состоянии тело динамически симметрично, а его масса лежит на оси симметрии. Определены оптимальный закон управления для торможения вращений несущего твердого тела в форме синтеза, время быстродействия и фазовые траектории.

Ключевые слова: оптимальное торможение вращений, твердое тело, подвижная масса, сопротивляющаяся среда.

На основе подхода [1, 2] уравнения управляемых вращений в проекциях на оси связанной с фиксированным твердым телом системы координат (уравнения Эйлера) могут быть представлены в виде [1–3]:

$$A_1\dot{p}+(A_3-A_1)qr=M_p+FG^2qr+Dr^4p-\chi A_1p,$$
$$A_1\dot{q}+(A_1-A_3)pr=M_q-FG^2pr+Dr^4q-\chi A_1q,$$
$$A_3\dot{r}=M_r-A_1A_3^{-1}Dr^3(p^2+q^2)-\chi A_3r. \quad (1)$$

Здесь p, q, r – проекции вектора абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на связанные оси, $J=\mathrm{diag}\,(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции невозмущенного тела, M_p, M_q, M_r – проекции вектора управляющего момента сил $\mathbf{M}$; $\mathbf{G}=J\boldsymbol{\omega}$ – кинетический момент тела. Считается, что момент сил диссипации пропорционален кинетическому моменту $\mathbf{M}^r=-\chi J\boldsymbol{\omega}$, где χ – некоторый постоянный коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств среды. Предполагается, что допустимые значения момента управляющих сил $\mathbf{M}$ ограничены сферой [2]

$$\mathbf{M}^u=b\mathbf{u},\quad |\mathbf{u}|\le 1;\quad b=b(t,\mathbf{G}),$$
$$0<b_*\le b<b^*<\infty, \quad (2)$$

где b – скалярная функция, ограниченная в рассматриваемой области изменения аргументов t, $\mathbf{G}$ согласно условиям (2).

Введенные в (1) обозначения F, D выражаются через параметры системы следующим образом:

$$F=m\rho^2\Omega^{-2}A_3A_1^{-3},$$
$$D=m\rho^2\lambda\Omega^{-4}A_3^3(A_1-A_3)A_1^{-4}, \quad (3)$$

где m – масса подвижной точки, ρ – расстояние от центра масс недеформированной системы до точки крепления. Постоянные $\Omega^2=c/m$, $\lambda=\delta/m$ определяют частоту колебаний и скорость их затухания соответственно; c – жесткость (коэффициент упругости), δ – коэффициент вязкости демпфера. Рассматривается случай сильного демпфера, следуя работе [1], $\Omega^2 >> \lambda\omega >> \omega^2$.

Ставится задача оптимального по быстродействию торможения вращений

$$\boldsymbol{\omega}(T_0)=\boldsymbol{\omega}^0,\quad \boldsymbol{\omega}(T_0)=0,\quad T\to\min_{\mathbf{u}},\quad |\mathbf{u}|\le 1. \quad (4)$$

Требуется найти оптимальный закон управления в виде синтеза $u=u(t,\boldsymbol{\omega})$, соответствующую ему траекторию $\boldsymbol{\omega}(t, t_0, \boldsymbol{\omega}^0)$ и время быстродействия $T=T(t_0, \boldsymbol{\omega}^0)$, а также функцию Беллмана задачи $W=T(t,\boldsymbol{\omega})-t$.

На основе динамического программирования и неравенства Шварца синтез оптимального по быстродействию управления имеет вид [2]:

$$M_p=-b\frac{A_1p}{G},\quad M_q=-b\frac{A_1q}{G},\quad M_r=-b\frac{A_3r}{G},$$
$$b=b(t,G),\ 0<b_1\le b\le b_2<\infty. \quad (5)$$

Домножим первое уравнение (1) на A_1p, второе – на A_1q, третье – на A_3r и сложим. Получим скалярное уравнение вида

$$\dot{G}=-b(t,G)-\chi G,\quad G(t_0)=G^0,\quad G(t,t_0,G^0)=0,$$
$$T=T(t_0,G^0),\quad W(t,G)=T(t,G)-t. \quad (6)$$

При $b=\mathrm{const}$ решение уравнения и краевой задачи (6) записывается следующим образом:

$$G(t)=\frac{1}{\chi}[(G^0\chi+b)\exp(-\chi t)-b],$$

$$T=\frac{1}{\chi}\ln\left(G^0\frac{\chi}{b}+1\right),\ t_0=0. \qquad (7)$$

Здесь t – текущее время процесса торможения, T – время быстродействия.

Подстановка известного выражения для G в третье уравнение (1) приводит к элементарному нелинейному уравнению относительно r:

$$\dot r=-r[bG^{-1}+\chi+A_1^{-1}A_3^{-2}Dr^2(G^2-A_3^2r^2)]. \qquad (8)$$

Вектор кинетического момента $\mathbf{G}$ при проектировании на главные центральные оси инерции тела приводит к выражению $A_3r = G\cos\theta$, где θ – сферический угол. Уравнение (8) после перехода к неизвестной θ может быть записано в виде

$$\dot\theta=A_1^{-1}A_3^{-4}D\chi^{-4}[(G^0\chi+b)\exp(-\chi t)-b]^4\times$$
$$\times\cos^3\theta\sin\theta,\quad \theta(0)=\theta^0. \qquad (9)$$

Решение уравнения (9) записывается следующим образом:

$$|\mathrm{tg}\,\theta|\exp(tg^2\theta)=|tg\theta^\circ|\exp(\mathrm{tg}^2\theta^0)\exp(2K(t)),$$
$$K(t)=A_1^{-1}A_3^{-4}D\chi^{-4}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{4}f(4t)-\frac{4}{3}f(3t)+3f(2t)-4f(t)+b^4t\right],$$
$$f(\beta t)=\chi^{-1}b^{4-\beta}(G^0\chi+b)^\beta\times$$
$$\times\left[1-\exp(-\beta\chi t)\right],\ \beta=1,2,3,4.$$

Проведен анализ вращений тела в экваториальной плоскости.

Численный расчет показал, что характер поведения обезразмеренной функции $\theta(\tau),\tau=\chi t$ в данной задаче совпадает с характером поведения функции изменения сферического угла для твердого тела с подвижными внутренними массами [1].

Основные результаты работы получены вместе с Л.Д. Акуленко.

Список литературы

1. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела с подвижными внутренними массами // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. №4. С. 33–44.

2. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 368с.

3. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. Аналитические методы. М.: Наука, 1985. 288 с.

4. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л. Оптимальное торможение вращений динамически симметричного тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, в сопротивляющейся среде // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. №2. С. 56–60.

5. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. Оптимальное торможение вращений твердого тела с внутренними степенями свободы // Изв. РАН. ТиСУ. 1995. №2. С. 115–122.

OPTIMAL ROTATION DECELERATION OF A SYMMETRIC BODY WITH MOVABLE MASS IN A RESISTANT MEDIUM

Ya.S. Zinkevich, D.D. Leshchenko, A.L. Rachinskaya

A minimum-time problem on deceleration of rotation of a rigid body is studied. The body is assumed to contain a viscous-elastic element, which is modeled as a movable point mass attached to the body via a damper. In addition, the body is subjected to a retarding torque generated by linear medium resistance forces. In an unformed state, the body is assumed to be dynamically symmetric, with the mass being located on the symmetry axis. An optimal control law for deceleration of rotation of the body is synthesized, and the corresponding time and phase trajectories are determined.

Keywords: optimal rotation deceleration, rigid body, movable mass, resistant medium.

УДК 531.36

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ДВУСФЕРИЧЕСКОГО КИТАЙСКОГО ВОЛЧКА

А.А. Зобова

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

azobova@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматриваются нестационарные движения двусферического волчка тип-топ на плоскости с сухим трением [1–3]. Методом обобщенных бифуркационных диаграмм Смейла проведено аналитическое исследование таких движений. Проведено численное исследование нестационарных движений волчка в рамках регуляризованных динамических уравнений (вводится деформируемость опорной плоскости). Найдены некоторые «псевдостационарные» движения с почти нулевой скоростью проскальзывания. Изучены их свойства в зависимости от упругих свойств плоскости.

Ключевые слова: сухое трение, волчок тип-топ, метод обобщенных диаграмм Смейла.

Рассматривается динамика двусферического («реального») волчка на шероховатой плоскости. Волчок моделируется двумя шаровыми сегментами с центрами O_1 и O_2 и радиусами r_1 и r_2, ($r_1 > r_2$) (рис. 1), жестко связанными стержнем, направленным вдоль общей оси симметрии этих сегментов (модель впервые рассмотрена в [4]). Если китайский волчок быстро закрутить вокруг вертикально расположенной оси симметрии при наинизшем расположении центра масс (с опорой на сегмент большого радиуса), то он перевернется на 180° и начнет вращаться вокруг вертикально расположенной оси симметрии при наивысшем расположении центра масс (с опорой на ножку, которая моделируется сегментом малого радиуса), и после некоторого времени постепенно вернется обратно в устойчивое положение равновесия.

Пусть единичный вектор динамической и геометрической оси симметрии $\mathbf{e} = \overline{O_1O_2} / |O_1O_2|$ составляет угол θ с единичным вектором восходящей вертикали $\boldsymbol{\gamma}$. Волчок касается плоскости большим сферическим сегментом в точке C_1, если $\theta \in \Delta_1 = [0, \pi - \alpha)$, и меньшим сферическим сегментом в точке C_2, если $\theta \in \Delta_2 = (\pi - \alpha, \pi]$; волчок касается плоскости двумя точками, если $\theta = \pi - \alpha$. Центр масс лежит на оси симметрии O_1O_2. На волчок, помимо силы тяжести и реакции опорной плоскости, действуют силы сухого трения (включая силы трения скольжения, верчения и качения) и наложена односторонняя голономная связь: скорость наинизшей точки шара имеет неотрицательную проекцию на вектор восходящей вертикали (возможны подскоки волчка над опорной плоскостью).

Для численного интегрирования задачи о движении волчка введем достаточно простую вязкоупругую модель Кельвина – Фойгхта, связывающую деформацию опорной плоскости ε (расстояние от наинизшей точки волчка до плоскости) и нормальную реакцию:

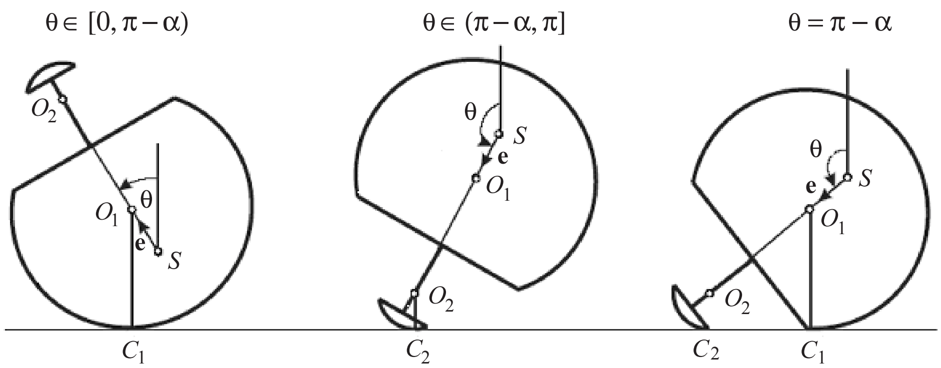


Рис. 1

$$N = \begin{cases} 0, & \varepsilon \ge 0, \\ -n_1\varepsilon - n_2\dot{\varepsilon}, & \varepsilon < 0. \end{cases}$$

Таким образом, вводится новая переменная z_S (вертикальная координата центра масс волчка) и дополнительное дифференциальное уравнение $\dot{z}_S = (\mathbf{v}, \gamma)$, где $\mathbf{v}$ – скорость центра масс волчка.

Это предположение позволяет численно решать задачу Коши для любых начальных условий (в том числе и для движений с множественными ударами и переворотами) с помощью достаточно простого численного алгоритма без переключений. Удары моделируются с помощью этого алгоритма и указанной модели для вертикальной реакции.

Аналитическое исследование опирается на анализ стационарных и нестационарных движений в «порождающей» системе, в которой момент трения полагается равным нулю. Тогда в каждой из областей фазового пространства, соответствующих отрезкам Δ_1 и Δ_2 изменения угла θ, существует линейный по псевдоскоростям интеграл Джелетта $K_i = -r_i^{-1}(\mathbf{J}\omega, \mathbf{r}_i) = k_i$, а полная механическая энергия является невозрастающей функцией времени:

$$H = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{J}\omega, \omega) = mg(\mathbf{r}, \gamma) \le h,$$

$$\dot{H} = (\mathbf{F}, \mathbf{u}) + (\mathbf{M}, \omega) \le 0.$$

Наличие первого интеграла и невозрастающей со временем полной механической энергии позволяет построить эффективный потенциал системы с помощью модифицированной теории Рауса [5]. Свойства критических точек эффективного потенциала определяют существование, устойчивость и бифуркации стационарных движений волчка, т.е. таких движений, при которых постоянен угол нутации θ, а скорость скольжения равна нулю. Результаты исследования свойств эффективного потенциала и стационарных движений двусферического волчка изложены в [6].

Движение изображающей точки по плоскости (k_i^2, h) для порождающей (с нулевым моментом сил трения) системы и исходной системы позволяет качественно описать нестационарные движения волчка (аналогично работе [7]), а также указать достаточные для существования наблюдаемых в натурных экспериментах движений с переворотом условия на силы и моменты трения. С помощью обобщенных диаграмм Смейла найдены некоторые «псевдостационарные» движения с почти нулевой скоростью проскальзывания, существование которых зависит от упругих свойств опорной плоскости. Результаты исследования сопоставляются с результатами работ [4, 8, 9].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 10-01-00292, 09-08-00925), Совета по грантам Президента РФ (грант поддержки молодых российских ученых МК-698.2010.1) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» на 2009–2010 гг. (2.1.1/6194).

Список литературы

1. Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60–67.

2. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.

3. Карапетян А.В. Двухпараметрическая модель трения // ПММ. 2009. № 4. С. 515–519.

4. Leine R. I., Gloker Ch. A set-valued force law for spatial Coulomb - Contensou friction // Europ. J. Mech. A/Solids. 2003. V. 22, № 2. P. 193–216.

5. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 165 с.

6. Зобова А.А., Карапетян А.В. Анализ стационарных движений волчка тип-топ // ПММ. 2009. Т. 73, № 6. С. 867–877.

7. Карапетян А.В. Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 3. С. 33-41.

8. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. О динамике волчка Томсона (тип-топ) на плоскости с реальным сухим трением // МТТ. 2005. №6. С. 157–168.

9. Косенко И.И., Александров Е.Б. Реализация модели Контенсу – Эрисмана касательных сил в контактной задаче Герца // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5, № 4. С. 499–517.

NON-STEADY MOTIONS OF A TWO-SPHERICAL TIPPE-TOP

A.A. Zobova

Non-steady motions of a two-spherical tippe-top on a horizontal plane with dry friction are considered. The analytical investigation of non-steady motions was provided by the method of generalized Smale bifurcation diagrams. Numerical analysis of such motions was done by integration of regularized dynamic equation (the elasticity of the support plane is assumed). Some pseudo-steady motions were found with nearly vanishing sliding velocity. Their properties as a function of elastic properties of the plane were investigated.

Keywords: dry friction, tippe-top, the method of generalized Smale bifurcation diagrams.

УДК 681.518

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.Е. Зотеев

Самарский государственный технический университет

zoteev-ve@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматривается проблема повышения достоверности и оперативности определения динамических характеристик нелинейных диссипативных механических систем. Эта проблема решается в формате современных информационных технологий, основу которых составляет статистическое оценивание коэффициентов разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений мгновенных значений колебаний системы.

Ключевые слова: диссипативные механические системы, параметрическая идентификация, конечно-разностное уравнение, среднеквадратичное оценивание.

Одной из важнейших проблем при оценке технического состояния различного рода машин и механизмов является проблема повышения оперативности и точности определения диссипативных характеристик механической системы в процессе ее эксплуатации или прочностных промышленных испытаний. Современные методы параметрической идентификации динамических систем, в основе которых лежит корреляционный или спектральный анализ процессов, наблюдаемых на входе и выходе системы, теряют свою эффективность при решении задач, связанных с оценкой характеристик нелинейности математической модели, например параметров нелинейной диссипативной силы, гистерезисного трения. Применяемые на практике методы определения характеристик рассеяния энергии колебаний различных механических конструкций и демпфирующих свойств материалов не вписываются в формат современных информационных технологий, применяемых в вибродиагностике. Как правило, эти методы громоздки, нередко требуют графических построений, применяемые алгоритмы вычислений ориентированы на детерминированные модели и используют минимально необходимое число точек эксперимента при полном отсутствии процедур, связанных со статистической обработкой результатов наблюдений. Устранить противоречие между существующими способами определения характеристик нелинейной диссипативной механической системы и современным уровнем компьютеризации и автоматизации исследований динамических процессов в машинах и механизмах можно только на основе новых математических моделей и статистических методов оценивания их параметров, например стохастических параметрических моделей временных рядов, описывающих результаты наблюдений колебаний диссипативной системы.

Построены линейно-параметрические дискретные модели, которые в форме стохастических разностных уравнений описывают результаты измерений мгновенных значений реакции нелинейной диссипативной системы на основные типовые тестовые воздействия, в частности импульсной и переходной характеристик системы. Параметры этих моделей известным образом связаны с характеристиками нелинейной диссипативной системы, что позволяет свести задачу параметрической идентификации к задаче прикладного линейного регрессионного анализа. Разработанные теоретические основы и принципы построения позволили сформировать класс таких моделей и систематизировать их в зависимости от типа диссипативной силы и вида тестового воздействия [1]. Предложен численный метод определения динамических характеристик диссипативной системы, в основе которого лежит среднеквадратичное оценивание коэффициентов стохастического разностного уравнения. Применение в алгоритме вычислений итерационных процедур и статистических методов обработки экспериментальных данных позволяет обеспечить высокую помехозащищенность и точность оценок параметров нелинейной механической системы.

Разработан алгоритм оценки погрешности результатов вычисления динамических характеристик диссипативных систем, а также программное обеспечение, реализующее разработанный метод и предназначенное для использования в физических экспериментах [1].

Применение линейно-параметрических дискретных моделей и статистических методов оценивания ее коэффициентов обеспечивает существенное повышение точности вычисления диссипативных характеристик и, следовательно, достоверности оценки технического состояния механической системы. Так, например, по сравнению с известными методами определения параметров диссипативной системы по огибающей амплитуд колебаний или по резонансной кривой точность оценивания повышается в среднем на порядок.

Список литературы

1. Зотеев В.Е. Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений / Под ред. В.П. Радченко. М.: Машиностроение, 2009. 344 с.

PARAMETRIC IDENTIFICATION OF NONLINEAR MECHANICAL SYSTEMS ON THE BASIS OF DIFFERENCE EQUATIONS

V.E. Zoteev

The problem of increasing the reliability and efficiency of determining dynamic characteristics of nonlinear dissipative mechanical systems is considered. This issue is fixed in the format of modern information technologies. The basis of these information technologies is a statistical estimation of coefficients of difference equations that describe the results of the measurements of instantaneous values of oscillations of the systems.

Keywords: dissipative mechanical systems, parametric identification, finite-difference equation, mean-square estimation.

УДК 681.5.015

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ОШИБОК НЕСКОЛЬКИХ РЛС ПО АЗИМУТУ

***А.Г. Иванов*[1], *Д.А. Бедин*[1], *А.В. Беляков*[2], *К.В. Строков*[2], *А.А. Федотов*[1]**

[1]Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург
[2]Фирма «НИТА», Санкт-Петербург

iagsoft@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Решается задача идентификации систематических ошибок нескольких радиолокаторов кругового обзора по азимуту. Предполагается, что каждый радиолокатор измеряет в своей локальной системе координат наклонную дальность и азимут с некоторым тактом по времени. Интервалы наблюдения у разных радиолокаторов могут быть различны. Разработаны два алгоритма идентификации. Первый использует метод Хука – Дживса конечномерной оптимизации, второй – фильтрацию Калмана. Приводятся результаты моделирования.

Ключевые слова: РЛС, идентификация параметров, обратная задача, восстановление траектории движения, методы оптимизации, фильтр Калмана.

1. Рассматривается задача нахождения систематических ошибок нескольких радиолокаторов (РЛС) по азимуту при наблюдении за движением воздушного судна (ВС) на некотором промежутке времени. Положения РЛС точно заданы географическими координатами. Предполагаемое количество радиолокаторов – не менее двух.

Относительно наблюдаемого ВС оговорены минимальное и максимальное значения высоты. Предполагаются также известными ограничения на величину вертикальной скорости.

Исходные данные по каждой РЛС представляют собой наборы замеров наклонной дальности, азимута и, в некоторых случаях, высоты на рассматриваемом промежутке времени в прямоугольной системе координат, связанной с касательной плоскостью к Земле в точке географического положения РЛС.

Систематические ошибки РЛС по азимуту приводят к пространственному смещению замеров. Если одно и то же движение ВС наблюдается с нескольких точек, то появляется возможность определения систематических ошибок по азимуту. При вычислении азимутальных ошибок дополнительно схематично восстанавливается траектория движения.

Разработаны два алгоритма идентификации.

2. Первый алгоритм минимизирует квадратичную невязку между подбираемой траекторией и замерами РЛС, довернутыми на угол, вычисляемый индивидуально для каждой РЛС. В расчетах учитывается сферичность Земли. Используется программа конечномерной оптимизации. Варьируемые переменные: углы доворота РЛС по азимуту и координаты вершин ломаной (восстанавливаемой траектории) в трехмерном пространстве. Вычислительная программа использует метод Хука – Дживса конечномерной оптимизации – метод прямого поиска, не требующий вычисления производных минимизируемой функции. Метод характеризуется хорошей сходимостью на задачах с большой размерностью аргумента минимизируемой функции.

Каждый РЛС-замер по имеющейся информации однозначно определяет (плоскую) окружность в трехмерном пространстве. В качестве невязки между РЛС-замером и восстановленным треком берется квадрат минимального расстояния между окружностью и точкой восстановленного трека, соответствующей времени замера.

Восстановленный трек представляет собой ломаную линию в трехмерном пространстве геоцентрической декартовой системы координат.

3. Второй алгоритм использует дискретный фильтр Калмана. Наблюдаемый участок траектории ВС предполагается прямолинейным, движение по нему происходит с постоянной скоростью. Получаемое уравнение наблюдения не является линейным. Этот факт представляет значительную трудность, ибо стандартная процедура фильтрации Калмана предполагает наличие только линейной зависимости от состояния в уравнении наблюдения.

В результате работы алгоритма восстанавливаются начальное положение, вектор скорости ВС и систематические ошибки РЛС по азимуту.

Для того чтобы второй алгоритм определения систематических погрешностей РЛС по азимуту работал корректно, требуется в качестве исходных данных использовать замеры с участка прямолинейного равномерного движения. Одним из возможных вариантов является внешнее задание участка прямолинейного движения, когда каким-либо образом заранее известно, где самолет должен лететь по прямой линии. Другим вариантом является автоматическое отыскание участков прямолинейного движения с постоянной скоростью. Предложен алгоритм, реализующий такой автоматический поиск.

4. Разработанные алгоритмы протестированы на модельных и реальных данных.

На рис. 1 представлены модельные треки, получаемые при «наблюдении» ВС четырьмя РЛС. Эти треки в качестве входных данных обрабатывались при помощи первого алгоритма идентификации. На выходе программы идентификации получаем систематические ошибки по азимуту. Довернутые на систематические ошибки треки представлены на рис. 2. Видно, что они практически совпадают.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 09-01-00436 и 10-01-96006).

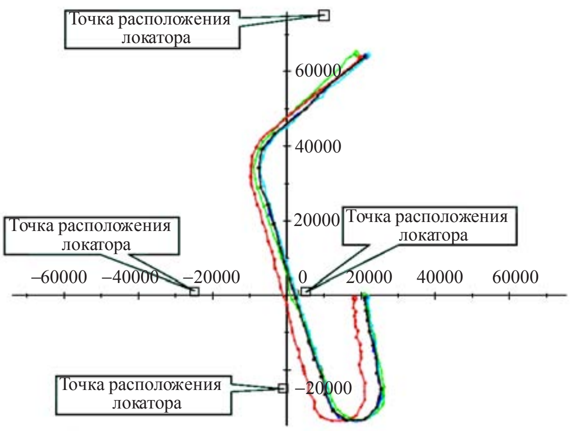


Рис. 1

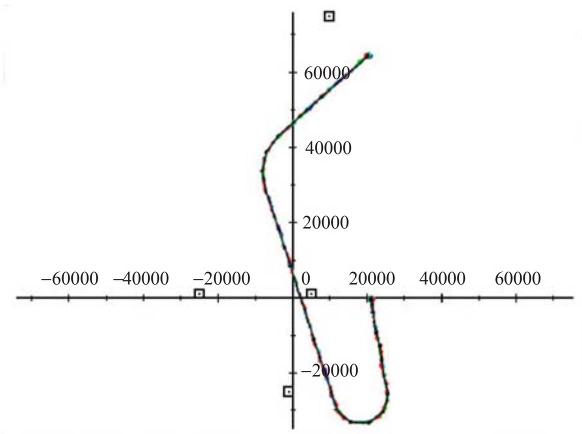


Рис. 2

IDENTIFICATION OF SYSTEMATIC ERRORS IN AZIMUTH FOR SEVERAL RADARS

A.G. Ivanov, D.A. Bedin, A.V. Belyakov, K.V. Strokov, A.A. Fedotov

The work deals with a problem of identification of systematic errors in azimuth for several all-round looking radars. It is assumed that each radar measures the slant range and azimuth in its own local coordinate system with some time step (observation). Observation steps in various radars can be different. Two algorithms for identification have been elaborated. The first algorithm uses the Hooke and Jeeves method for finite-dimensional optimization. The second one applies the Kalman filtration. Simulation results are presented.

Keywords: radar, identification of parameters, inverse problem, reconstruction of a motion trajectory, Kalman filtration.

УДК УДК 531

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РАЗРЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.Н. Иванов

Пермский госуниверситет им. А.М. Горького

precol@psu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассмотрен круг задач, связанных с разрешением уравнений движения механических систем относительно ускорений при их численном интегрировании. Предложены два новых итерационных метода решения поставленной задачи. Обсуждаются их основные свойства и условия сходимости. На примерах интегрирования уравнений движения конкретных механических систем показана сравнительная эффективность методов.

Ключевые слова: системы твердых тел, уравнения движения, динамика, итерационные методы.

При исследовании динамики поведения технических механических систем в качестве математической модели часто используют систему связанных абсолютно твердых тел. Требование точности компьютерного моделирования заставляет увеличивать число тел, на которые разбивается механическая система. Одновременно с ростом размерности математической модели увеличивается и трудоемкость моделирования. Особенно много времени затрачивается на стадии проектирования технических устройств, когда приходится проводить многократные вычислительные эксперименты для расчета динамического поведения различных вариантов конструкции в различных условиях эксплуатации. Поэтому разработка методов, позволяющих ускорить процесс математического моделирования, является актуальной задачей.

Будем считать, что все связи голономны и идеальны. Пусть $\mathbf{q}$ – n-мерный вектор-столбец обобщенных координат системы, $\mathbf{V}$ – вектор-столбец проекций абсолютных скоростей всех тел системы на оси связанных с телами систем координат. Будем считать, что в окрестности точки $\mathbf{q}$ механическая система не имеет особенностей. Тогда уравнения ее движения для численного исследования обычно получают в одной из трех форм:

1) в форме общих уравнений динамики с реакциями связей $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} M\dot{\mathbf{V}} - S\mathbf{R} = \mathbf{F}^*, \\ -S^T\dot{\mathbf{V}} + B\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{w}_0, \\ B^T\mathbf{R} = 0; \end{cases} \qquad (1)$$

2) в форме уравнений Лагранжа I рода с множителями Лагранжа λ:

$$\begin{cases} M\dot{\mathbf{V}} - SZ\lambda = \mathbf{F}^*, \\ -Z^T S^T\dot{\mathbf{V}} = Z^T\mathbf{w}_0, \\ \ddot{\mathbf{q}} = (B^T B)^{-1} B^T (S^T\dot{\mathbf{V}} - \mathbf{w}_0); \end{cases} \qquad (2)$$

3) в форме уравнений Лагранжа II рода в обобщенных координатах

$$(S^{-1}B)^T M (S^{-1}B)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}^*, \qquad (3)$$

где $\mathbf{F}^*$, $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{Q}^*$ – векторы-столбцы соответствующей размерности правых частей уравнений, зависящие от координат и скоростей тел системы и включающие активные, обобщенные, гироскопические, кориолисовы силы и нестационарные слагаемые.

Уравнения движения (1)–(3) являются системами линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно групп переменных $\dot{\mathbf{V}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{R}, \lambda$. Матрицы систем уравнений в общем случае зависят от обобщенных координат и являются переменными во времени.

При численном интегрировании на каждом шаге необходимо приводить эти системы уравнений к явному виду, т.е. разрешать относительно векторов $\ddot{\mathbf{q}}$ или $\dot{\mathbf{V}}$. Это требует определенных вычислительных затрат, объем которых зависит от выбранного метода решения СЛАУ и плотности заполнения матрицы системы. Поэтому в зависимости от структуры механической системы и типов шарнирных соединений оказывается выгодным с точки зрения скорости численного моделировании применять одну из трех выписанных выше форм уравнений. Структура системы уравнений (1) – блочно трехдиагональная, не изменяется для различных механических систем и слабо зависит от типов шарниров (число элементов в матрице системы порядка N). Система уравнений (2) для древовидных механических систем имеет ленточную структуру, ширина полосы которой увеличивается с ростом дочерних узлов и уменьшается с ростом числа степеней свободы в шарнирных соединениях. Число элементов в матрице системы остается пропорциональным числу тел N. Уравнения (3) имеют, с одной стороны, меньший порядок, а, с другой, – большую плотность заполнения матрицы системы для большинства механических систем по сравнению с первыми двумя формами уравнений движения (число элементов в матрице порядка n^2). При этом плотность заполнения уменьшается с ростом дочерних узлов.

Для общих уравнений динамики (1) и уравнений Лагранжа I рода (2) существуют алгоритмы их разрешения относительно реакций, множителей Лагранжа и ускорений, в которых число арифметических операций (вычислительная трудоемкость) растет линейно в зависимости от количества тел N в механической системе. Для разрешения относительно обобщенных ускорений уравнений Лагранжа II рода (3) в случае древовидных механических систем требуется обычно порядка n^2, в случае цепочки тел – n^3 арифметических операций. С этой точки зрения уравнения (1) или (2), содержащие избыточное число переменных, оказываются более эффективными по сравнению с алгоритмами формирования уравнений движения в обобщенных координатах вида (3). С другой стороны, точные алгоритмы разрешения уравнений движения (1) или (2) включают в себя дополнительные матричные операции исключения избыточных зависимых переменных $\dot{\mathbf{V}}$, $\mathbf{R}$ или $\boldsymbol{\lambda}$. В результате оказывается, что хотя общая трудоемкость алгоритмов растет линейно, но коэффициент пропорциональности получается достаточно большим, и эффективность этих методов начинает проявляться только тогда, когда число тел в механической системе достаточно велико.

Таким образом, необходимость разрешения уравнения движения относительно ускорений приводит к тому, что численное моделирование динамики механических систем, состоящих из большого числа тел, на основе уравнений динамики (1), (2) или (3) и при использовании точных методов решения СЛАУ требует значительных затрат времени работы ЭВМ.

Так как обычно при малой величине шага интегрирования изменения элементов матриц систем уравнений (1), (2) и (3) малы, то снижения трудозатрат можно добиться, если для разрешения использовать методы, основанные на итерационном уточнении малых возмущений в матрице системы или обратной к ней матрице. К таким методам относятся методы переменной метрики, развитые для решения оптимизационных задач. Предлагаемые в докладе итерационные алгоритмы также из их числа. При этом, как ясно из рассмотренной выше механической постановки, методы ускорения расчетов должны быть различными для различных форм уравнений движения. Так, для уравнений вида (1) или (2) эффективнее оказываются алгоритмы, в которых происходит итерационное уточнение самой матрицы системы, а для уравнений вида (3) выигрыш во времени счета может быть получен, только если приближения строятся для обратной матрицы. Поэтому рассмотрены оба варианта (прямой и обратный итерационные алгоритмы) и выделены условия, при которых эффективнее оказывается один из них. Оба алгоритма представляют собой модификацию метода переменной метрики безусловной минимизации или решения систем нелинейных уравнений с симметричной положительно определенной матрицей Якоби – схемы, основанной на симметричных одноранговых формулах пересчета матрицы системы Пауэлла–Бройдена.

Сравнительная эффективность предлагаемых итерационных алгоритмов разрешения уравнений движения механических систем относительно ускорений проверялась на примерах интегрирования уравнений, описывающих колебания многозвенных механических систем со структурой дерева, отличающихся как количеством степеней свободы в шарнирах, так и структурой взаимосвязей.

Рассматривались два типа систем: «цепочка» (все тела соединены последовательно друг с другом) и «бинарное дерево» (на каждом теле закреплено два тела). Тела систем соединялись либо одностепенными вращательными шарнирами, либо двустепенными кардановыми шарнирами, либо трехстепенными шаровыми шарнирами. Для сравнения рассматривались известные конечные алгоритмы решения систем уравнений (1), (2) и (3): метод отдельных тел (метод прогонки для системы (1)), метод Холецкого для разрешения систем уравнений Лагранжа I и II рода (2) и (3). Уравнения Лагранжа II рода формировались прямым методом и методом составных тел. При разрешении систем уравнений относительно ускорений в методе Холецкого учитывалась структура взаимосвязей механических систем.

Представленные результаты показывают высокую сравнительную эффективность предлагаемых итерационных методов. Расчеты показали, что приближенное решение с точностью, требуемой для численного интегрирования уравнений движения механических систем, во всех случаях можно найти за 1–2 итерации. При этом число итераций остается практически постоянным для широкого диапазона изменения числа степеней свободы механической системы. При малом числе степеней свободы в шарнирах или небольшом количестве тел в системе лучшие результаты показывает обратный итерационный алгоритм. С ростом числа степеней свободы или тел преимущество переходит к прямому итерационному методу. Сравнение результатов для различных моделей наглядно показывает, в каких случаях целесообразнее применять итерационные процедуры для той или иной формы уравнений движения.

ITERATIVE METHODS OF A SOLUTION OF THE MULTIBODY SYSTEMS EQUATIONS

V.N. Ivanov

The scope of the problems connected with the solution of equations of motion of mechanical systems with the regard to their accelerations when numerically integrated is considered. Two new iterative methods of solution are presented. Their basic properties and convergence conditions are discussed. Examples of their application are given.

Keywords: multibody systems equations, dynamics, iterative methods.

УДК 629.7.072.1

АНАЛИТИЧЕСКОЕ, ЧИСЛЕННОЕ И ПОЛУНАТУРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ МИКРОСПУТНИКОВ

Д.С. Иванов[1], *С.С. Ткачев*[2], *Д.С. Ролдугин*[2], *С.П. Трофимов*[2], *Д.О. Нуждин*[2], *С.О. Карпенко*[3]

[1]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва
[2]Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет), г. Долгопрудный
[3]Инженерно-технологический центр «СканЭкс», Москва

danilivanovs@gmail.com

Поступила в редакцию 16.05.2011

Одним из главных достоинств проекта создания малого спутника является его относительно невысокая стоимость и сравнительно короткие сроки разработки, создания и испытаний. С технической точки зрения экономия затрат имеет место при правильном оптимальном выборе проектных характеристик спутника. Важно как можно раньше оценить характеристики системы определения ориентации и стабилизации и убедиться в их адекватности техническим и другим требованиям, предъявляемым к этим системам.

Исходя из требований к системе управления ориентацией, формируется ее аппаратный состав. Выбираются алгоритмы определения ориентации и стабилизации. Формулируется математическая модель получившейся системы. Модель анализируется и численно исследуется для проверки устойчивости, уточнения режимов работы, формирования областей допустимых параметров управления, выявления критических условий эксплуатации. Затем функциональный аналог системы проходит испытания на полунатурном стенде, после чего проводятся летные испытания.

В настоящее время ИПМ участвует в проектах, непосредственно связанных с созданием, отработкой, верификацией алгоритмов управления движением малогабаритных спутников, в частности, микроспутника «Чибис-М» (заказчик РАН). В рамках этих проектов проводится исследование новых алгоритмов магнитной стабилизации, отработка алгоритмов определения ориентации, в том числе с использованием полунатурных стендовых испытаний.

Приводятся результаты отработки алгоритма демпфирования начальной угловой закрутки, стабилизации и переориентации спутника с помощью токовых катушек, окончательная ориентация с помощью маховичной системы.

Ключевые слова: микроспутник, алгоритм, система управления ориентацией.

Одним из главных достоинств, делающим проект создания малого спутника привлекательным, является его относительно невысокая стоимость и сравнительно короткие сроки разработки, создания и испытаний. С технической точки зрения экономия затрат имеет место при правильном оптимальном выборе проектных характеристик спутника. Важно суметь как можно раньше оценить характеристики системы определения ориентации и стабилизации и убедиться в их адекватности техническим и другим требованиям, предъявляемым к этим системам.

Для получения оптимального решения представляется целесообразным следовать следующей схеме проектирования. Исходя из требований к системе управления ориентацией, формируется ее аппаратный состав. Выбираются алгоритмы определения ориентацией и стабилизации. Далее формулируется математическая модель получившейся системы. Модель анализируется аналитически и исследуется численно для проверки устойчивости, уточнения режимов работы, формирования областей допустимых параметров управления, выявления критических условий эксплуатации. Далее функциональный аналог системы проходит испытания на полунатурном стенде. Наконец, проводятся летные испытания.

Опыт работы был приобретен в процессе участия ИПМ им. М.В. Келдыша РАН в проектах создания малых спутников. В рамках этих проектов институт принимал участие в создании системы управления ориентацией спутников Munin, REFLECTOR, ТНС-0-1 и ряда других.

В настоящее время ИПМ участвует в проектах, непосредственно связанных с созданием, отработкой, верификацией алгоритмов управления движением малогабаритных спутников, в частности микроспутника «Чибис-М» (заказчик РАН). В рамках этих проектов проводится исследование новых алгоритмов магнитной стабилизации, отработка алгоритмов определения ориентации, в том числе с использованием полунатурных стендовых испытаний.

Основными задачами аналитического исследования системы управления ориентацией являются формулировка и исследование ее математической модели, получение приближенных решений, исследование их устойчивости, оптимизация быстродействия системы стабилизации. Искусство выбора модели заключается в том, чтобы модель была достаточно простой, но в то же время учитывала все существенные особенности рассматриваемой системы. Модель используется для получения номинальных движений, а также при интерпретации результатов измерений после летных испытаний.

Компьютерное моделирование предназначено для проверки выводов, полученных аналитически. Кроме того, численный эксперимент позволяет исследовать поведение системы при отсутствии упрощающих предположений. Таким образом, делается вывод об адекватности упрощения модели движения. Компьютерные модели могут являться прототипом как бортовых алгоритмов управления ориентацией, так и наземного программного обеспечения (ПО), используемого, например, для обработки результатов измерений.

Институтом разработаны несколько специализированных пакетов программ для моделирования систем управления ориентацией. В качестве примера может быть приведено ПО «Имитатор микроспутника», позволяющее проводить численные эксперименты в режимах «алгоритм в контуре управления», «прибор в контуре управления». ПО реализует различные модели прогноза движения спутника по орбите, алгоритмы определения ориентации и стабилизации, модели геомагнитного поля, альбедо Земли; имеет достаточно удобный пользовательский интерфейс.

После проведения теоретических и численных исследований разработанных алгоритмов необходимо убедиться в правильности сделанных выводов с помощью лабораторных испытаний, которые, с одной стороны, позволяют хотя бы частично имитировать движение спутника, а с другой стороны, – привнести в процесс испытаний реальные характеристики датчиков и актюаторов, особенности реализации ПО на прототипе бортового вычислителя. Для этого сначала разрабатывается методика верификации с помощью имеющегося лабораторного оборудования с учетом его ограниченных возможностей в имитационном плане. Исследуемый алгоритм модифицируется под используемую аппаратуру, но при этом основные принципы остаются неизменными. Далее модифицированный алгоритм реализуется на бортовом компьютере макета спутника и производится серия экспериментов. На основе лабораторных экспериментов делаются окончательные выводы об эффективности исследуемых алгоритмов, работоспособности, устойчивости движения спутника, точности поддержания желаемого движения, при этом сам алгоритм претерпевает некоторые изменения, которые связаны с общими особенностями реализации алгоритмов на реальной аппаратуре, что приближает его готовность к конечной цели – натурному или летному эксперименту.

Необходимость иметь лабораторную базу для отработки алгоритмов управления ориентацией

Авторы около макета микроспутника «Чибис-М» в СКБ КП ИКИ РАН г. Таруса наноспутников привела к созданию специального стенда полунатурного моделирования в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Он состоит из имитатора геомагнитного поля, имитатора Солнца и макета системы ориентации, включающей в себя токовые катушки, маховики и датчики определения ориентации, такие как солнечный датчик, магнитометр и датчик угловой скорости.

В качестве примера рассматриваются результаты отработки алгоритма демпфирования начальной угловой закрутки, стабилизации и переориентации спутника с помощью токовых катушек, окончательная ориентация с помощью маховичной системы.

Работа поддержана РФФИ (грант № 09-00-00431), ИТЦ «СканЭкс» (контракт № 9/0506-СП), Министерством образования и науки (госконтракт № 02.740.11.0860).

ANALYTICAL, NUMERICAL AND LABORATORY INVESTIGATION OF CONTROL ALGORITHMS OF THE ATTITUDE OF MICROSATELLITES

D.S. Ivanov, S.S. Tkachev, D.S. Roldugin, S.P. Trofimov, D.O. Nuzhdin, S.O. Karpenko

One of the main merits making a small satellite creation project so attractive is its relative low cost and rather short time of development, building and testing. From the technical point of view, economy is achieved by the optimal choice of the designing characteristics of the satellite. It is important to assess attitude control system characteristics as soon as possible and to make certain that they are adequate to technical and other requirements for the system.

It appears reasonable to follow the following scheme of designing. Hardware structure is formed on the basis of attitude control system requirements. Attitude control system algorithms are chosen. Next, a mathematical model of the resulted system is constructed. The model is analyzed analytically and investi-gated numerically for stability testing, working regimes specification, determining the area of acceptable control parameters, determining critical exploitation conditions. Then a functional analog of the system is tested on a laboratory facility. And finally, flying tests are conducted.

Currently, the Institute of Applied Mathematics is participating in projects concerning designing, testing and verification of the algorithms of the attitude control of microsatellites, in particular, of the «Chibis-M» microsatellite. In the framework of this projects, new magnetic stabilization algorithms are investigated, attitude determination algorithms are tested, including the use of laboratory facilities.

As an example, test results on the working out of the initial angular velocity damping algorithm, satellite stabilization and reorientation using magnetic coils, the final precision orientation using reaction wheels are considered.

Keywords: microsatellite, algorithm, attitude control system.

УДК 531.36

ОГРАНИЧЕННОЕ ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ МНОГОМЕРНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ И ОГРАНИЧЕННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ПОМЕХОЙ

В.Ф. Иванова

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

ivano-va@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Предлагается способ построения ограниченного позиционного управления многомерной динамической системой с вязким трением, потенциальными силами, неопределенной ограниченной помехой. Построенный алгоритм гарантированно, т.е. при любой помехе, удерживает систему в ограниченной области фазового пространства и приводит ее в начало фазовых координат за конечное (не фиксированное) время. Подобные задачи были решены в [1–3]. Принятые в данной работе ограничения на параметры системы и начальные условия отличаются от ограничений в [1–3] и могут оказаться слабее последних. Изложенный метод основан на декомпозиции [4] системы и использовании функции, подобной функции Ляпунова. Работа обобщает результаты автора [5] на случай вырожденной матрицы вязкого трения.

Ключевые слова: ограниченное позиционное управление, ограниченная неопределенная помеха, многомерная динамическая система, вязкое трение, функция Ляпунова, декомпозиция системы, манипуляционный робот.

Постановка задачи

Рассматривается механическая система, движение которой в заданной ограниченной области Ω описывается уравнениями Лагранжа

$$\underset{(n\times n)}{M}(q)\ddot{q}+B\dot{q}=U(q,\dot{q})+Q_*(q,\dot{q})+Q(t,q,\dot{q}),$$
$$t\ge 0,\quad (q,\dot{q})\big|_0=(q_0,\dot{q}_0)\in\Omega_0, \tag{1}$$

где q – n-мерный вектор обобщенных координат; Ω_0 – область допустимых начальных значений; $M(q)$ – известная матрица масс, $M^T = M$ (симметричная), $M(q) > 0$; функции $M(q)$, $M^{-1}(q)$ удовлетворяют условию Липшица в области Ω; B – известная постоянная матрица, $B^T = B$, $B \ge 0$; $U(q,\dot{q})$ – позиционное управление; $Q_*(q,\dot{q})$ – известные позиционные члены уравнения; Q – обобщенные силы, которые рассматриваются как неопределенная ограниченная помеха.

Вектор управления U ограничен заданными константами

$$|U_i|\le U_{0i}=\text{const},\quad i=\overline{1,n}. \tag{2}$$

Пусть помеха $Q(t)=Q(t,q,\dot{q})$ при $(q,\dot{q})\in\Omega$ ограничена известными константами

$$|Q_i(t)|\le Q_{0i}=\text{const},\quad Q_{0i}=Q_{0i}(\Omega),$$
$$t\ge 0,\ i=\overline{1,n}. \tag{3}$$

Требуется выбрать позиционный алгоритм $U(q,\dot{q})$, который гарантированно приводит систему в начало фазовых координат O за конечное (не фиксированное) время, а также оценить изнутри множество Ω_0, чтобы исключить выход траекторий из заданной области движения.

Выбор управления

Будем компенсировать (уничтожать) часть членов $Q_*(q,\dot{q})$ с помощью позиционного управления

$$U^*(q,\dot{q}),\quad |U_i^*(q,\dot{q})|_\Omega\le U_{0i}^*=\text{const},\quad i=\overline{1,n}.$$

Обозначим

$$U^+(q,\dot{q})=U-U^*,\quad m=\operatorname{rank}B\le n,$$
$$E_{nm}=\operatorname{diag}\{\underset{m\times m}{E},\underset{n\times n}{0}\}.$$

Применим невырожденную замену $q = Pz$, $P = \text{const}$, такую, что $P^TBP = E_{nm}$. Умножив (1) слева на матрицу $P^{-1}M^{-1}(q)$ и подставив сумму $U = U^* + U^+$, $U^*(q,\dot{q})=-Q_*-MPAP^{-1}q$, $A = \text{const} = \operatorname{diag}\ge 0$ (любая целесообразно выбранная матрица), получим

$$\ddot{z}+D_+(t)E_{nm}\dot{z}+Az=w+\zeta;\quad w=K^{-1}U^+,$$
$$\zeta=K^{-1}Q;\quad |w_i|\le w_{0i},\quad |\zeta_i|_{\Omega_Z}\le\zeta_{0i},$$
$$i=\overline{1,n};\quad (z_0,\dot{z}_0)\in\Omega_{Z0}, \tag{4}$$

где Ω_Z, Ω_{Z0} – образы областей Ω, Ω_0; $D_+(t) = D_+^T = P^{-1}M^{-1}(q)(P^{-1})^T > 0$, $K = M(q)P$; $(w_{0i},\zeta_{0i})=\text{const},\quad i=\overline{1,n}$.

Согласно (2), искомое управление U^+ следует подчинить ограничению

$$|U_i^+| \le U_{0i}^+ = U_{0i} - U_{0i}^*, \quad i = \overline{1,n}, \tag{5}$$

в предположении, что

$$U_{0i}^* < U_{0i}, \quad \zeta_{0i} < w_{0i}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Перепишем (4) в блочном виде:

$$\underset{(m\times 1)}{\ddot{x}} + \underset{(m\times m)}{D(t)}\dot{x} + \Lambda x = u(x,\dot{x}) + \varepsilon(t,z,\dot{z});$$

$$|u_i| \le u_{0i}, \quad |\varepsilon_i\|_{\Omega_Z} \le \varepsilon_{0i}, \quad i = \overline{1,m};$$

$$(x,\dot{x}) \in \Omega_X \subset \{x,\dot{x}\}, \quad (x_0,\dot{x}_0) \in \Omega_{X0}, \tag{7}$$

$$\ddot{y} + D_1(t)\dot{x} + Hy = h(y,\dot{y}) + \xi(t,z,\dot{z});$$

$$|h_i| \le h_{0i}, \quad |\xi_i\|_{\Omega_Z} \le \xi_{0i}, \quad i = \overline{1,n-m}, \tag{8}$$

где $(x, y) = z$, $(u, h) = w$, $(\varepsilon, \xi) = \zeta$; $D(t) = D^T > 0$, как диагональный блок матрицы D_+.

Обозначим $\Delta w_{0i} = w_{0i} - \zeta_{0i}$, $\Delta u_{0i} = u_{0i} - \varepsilon_{0i}$; ρ_i – кривая $\dot{z}_i = p_i(z_i) = -\operatorname{sign} z_i \sqrt{2\Delta w_{0i}|z_i|}$ на плоскости $Oz_i\dot{z}_i$; $g_i(z_i,\dot{z}_i) = \{-1, \dot{z}_i > \rho_i(z_i); 1, \dot{z}_i < \rho_i(z_i); \operatorname{sign} z_i, \dot{z}_i = \rho_i(z_i)\}$.

Выберем управление

$$u_i = u_i(x_i,\dot{x}_i) = \Delta u_{0i} g_i(x_i,\dot{x}_i) - \varepsilon_{0i}\operatorname{sign}\dot{x}_i, \; i = \overline{1,m}, \tag{9}$$

$$h_i = h_i(y_i,\dot{y}_i) = h_{0i} g_{m+i}(y_i,\dot{y}_i), \; i = \overline{1,n-m}. \tag{10}$$

Рассмотрим положительные вне точки O непрерывные функции $S(x,\dot{x}) = \sum_{i=1}^m S_i(x_i,\dot{x}_i)$, $S_i(x_i,\dot{x}_i) = (1/2)\dot{x}_i^2 + (1/2)\Lambda_i x_i^2 + \Delta u_{0i}\,|x_i|$. На любой траектории (7), (9) функция $S(t)$ не возрастает, т.к. $S(t) \le S(0) - \int_0^t (D\dot{x},\dot{x})ds$. Отсюда вытекают свойство $\lim\limits_{t\to\infty} D\dot{x} = 0$ [5], возможность декомпозиции [4] подсистемы (7), (9) на одномерные уравнения после достаточно большого момента времени t_*, зависящего от траектории, а также возможность выбирать множество Ω_{Z0} в (4) в виде объединения всех траекторий $(z,\dot{z})$ при любых помехах с началами в точках $\{(x_0,\dot{x}_0) \in \Omega_{X0}, y_0 = \dot{y}_0 = 0\}$, где Ω_{X0}, в свою очередь, выбирается в виде $\Omega_{X0} = \Omega_X = \{S(x,\dot{x}) \le \alpha = \text{const}\}$, Ω_X из (7). Такое множество Ω_{Z0} существует, т.к. при $\alpha \to 0$ реальная область движения (7)–(10) будет стягиваться в точку O и совпадать с Ω_{Z0} [1–3].

Чтобы после момента t_* обеспечить приход подсистемы (7), (9) в точку O за конечное время, следует, наряду с (5), (6), ввести дополнительное ограничение на параметры системы

$$\varepsilon_{0i} < u_{0i}/3, \quad i = \overline{1,m}. \tag{11}$$

Тогда после прихода траектории $(x,\dot{x})$ в O исчезает трение в (8), следовательно, система (7)–(10) с началом в допустимой области Ω_{Z0} будет стягиваться к O за конечное время [1–3].

Пример. Рассмотрено горизонтальное движение двузвенного манипуляционного робота с такими же механическими параметрами и ограничениями на управляющие моменты, как в примере из [3], только добавлены вязкое трение в обоих шарнирах и внешняя случайная помеха Q, $Q_{0i}/U_{0i} \le 1/10$ из (2), (3), $i = 1, 2$. Параметры процедуры построения управления $w = u$ из (9) выбирались с целью обеспечить сравнительно простую форму и близкие к максимальным размеры множества $G = \Omega_0 \cap \{\dot{q} = 0\}$, где q – относительные углы поворота звеньев манипулятора, $_0 = \{S \le \text{const}\}$. В результате было получено $G = \{|q_i| \le 1.5 \text{ рад}, i = 1,2; \dot{q} = 0\}$.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 520 с.
2. Черноусько Ф.Л. Декомпозиция и синтез управления в динамических системах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.1990. № 6. С. 64–82.
3. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
4. Пятницкий Е.С. Принцип декомпозиции в управлении динамическими системами // ДАН СССР. 1988. Т. 300, № 2. С. 300–303.
5. Соколов Б.Н. Ограниченное позиционное управление механической системой вблизи положения равновесия // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 4. С. 108–112.

LIMITED POSITIONAL CONTROL OF MULTIDIMENSIONAL MECHANICAL SYSTEM WITH VISCOUS FRICTION AND BOUNDED UNCERTAIN INFLUENCE

V.F. Ivanova

The method of constructing a limited positional control of a multidimensional dynamic system with viscous friction, potential forces and an uncertain limited influence (interference) is offered. The built algorithm guarantees the coming of the system into the phase zero in a finite (not fixed) time at any admissible interference and any initial state from the particular bounded region of the phase space. The assumed restrictions on system parameters and initial conditions may be weaker than the corresponding restrictions in the other methods of solving the similar problems, because inertia terms, viscous friction and a part of potential forces aren't included in an interference and aren't compensated by a control in the present research. The method is based on the system decomposition and the use of the function similar to Lyapunov function.

Keywords: limited positional control, bounded uncertain interference, multidimensional dynamic system, viscous friction, Lyapunov function, system decomposition, manipulation robot.

УДК 534.11

ИССЛЕДОВАНИЕ АЭРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ПРОВОДА, ВЫЗЫВАЕМЫХ ОТРЫВНЫМ ВИХРЕВЫМ ОБТЕКАНИЕМ

О.А. Иванова, И.К. Марчевский, В.С. Морева, Г.А. Щеглов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва

iliamarchevsky@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Для исследования динамики проводов воздушных линий электропередачи разработана математическая модель, описывающая аэроупругие колебания провода в дозвуковом потоке несжимаемой среды и метод ее анализа, основанный на прямом численном моделировании нестационарного отрывного обтекания сечений колеблющегося провода. Нестационарные нагрузки, действующие на провод, определяются в заданных сечениях в предположении, что обтекание каждого сечения близко к плоскопараллельному. Для расчета обтекания сечений используется бессеточный метод вихревых элементов. Эффективность разработанного алгоритма обеспечивается распараллеливанием вычислений, при котором обтекание разных сечений и нагрузки в них определяются на различных узлах параллельного вычислительного комплекса. Предлагаемая математическая модель и реализующий ее программный комплекс могут быть использованы для моделирования колебаний проводов воздушных линий электропередачи и исследования таких явлений, как вибрация и галопирование (пляска) проводов.

Ключевые слова: провода ЛЭП, вибрация, галопирование (пляска), метод вихревых элементов, параллельные вычисления.

Прямое численное моделирование аэроупругой динамики конструкций является актуальным направлением исследований, имеющим большую практическую значимость. Одной из важных инженерных задач в этой области является исследование колебаний проводов воздушных линий электропередачи (ЛЭП) под действием ветровых нагрузок. Здесь основные результаты, описанные, в частности, в монографиях Г.А. Савицкого, Э. Симиу, Р. Сканлана и др., получены экспериментальными и полуэмпирическими методами. В то же время в проектных организациях имеется потребность в алгоритмах и комплексах программ, позволяющих оценивать эксплуатационные характеристики существующих и вновь создаваемых ЛЭП с минимально необходимым числом дорогостоящих натурных экспериментов. В частности, представляет интерес прямое численное моделирование и оценка параметров таких явлений, как вибрация и галопирование (пляска) проводов.

Наибольшие трудности при решении указанных задач связаны с вычислением нестационарных аэродинамических нагрузок, действующих на гибкий провод, совершающий колебания в потоке. Поскольку провод является плохо обтекаемым телом, необходимо учитывать отрывной характер обтекания его сечений и влияние вихреобразования на аэродинамические нагрузки. Как правило, для расчета нагрузок, действующих на провод, используются эмпирические зависимости [1, 2]. Лишь в последнее время с развитием вычислительной техники появилась возможность проведения вычислительного эксперимента по решению задачи о колебаниях провода как связанной задачи аэроупругости.

В силу специфики задачи, наиболее эффективными здесь оказываются бессеточные вихревые методы, которые позволяют получить приемлемые для инженерных расчетов результаты при сравнительно низких требованиях к мощности компьютеров и затратах машинного времени. Поэтому приложения вихревых методов к решению связанных задач аэроупругости при внешнем обтекании конструкции с учетом интенсивного вихреобразования находят все большее применение.

Вихревые методы гидродинамики в настоящее время достаточно хорошо развиты [3–5]. В то же время авторам не известны работы, в которых вихревые методы используются для прямого численного моделирования динамики проводов ЛЭП. Для определения нестационарных аэродинамических нагрузок в ходе прямого численного моделирования динамики провода в потоке наиболее подходящим представляется метод вихревых элементов с вычислением потока завихренности со всей поверхности обтекаемого профиля (модель Лайтхилла – Чорина).

В рамках исследования, проведенного коллективом авторов, разработан комплекс математических моделей, алгоритмов и программ для исследования аэроупругой динамики провода ЛЭП.

Исследованы низшие собственные частоты и формы малых свободных колебаний провода ЛЭП как растяжимой нити в плоскости ее начального провисания. Для численного определения собственных частот и форм колебаний предложено использовать метод сагиттарной функции и алгоритм ускоренной сходимости. Установлено, что растяжимая нить в зависимости от стрелы провеса может проявлять свойства нерастяжимой нити и струны; также при некоторых параметрах растяжимая нить может иметь кратные или вырожденные собственные частоты. Получено алгебраическое уравнение, которому с высокой точностью удовлетворяют собственные частоты растяжимой нити в диапазоне параметров, характерных для реальных ЛЭП [6].

Для задачи обтекания профиля создана расчетная схема метода вихревых элементов, обеспечивающая второй порядок точности при расчете не только эволюции завихренности в области течения, но и потока завихренности с поверхности. На примере решения тестовых задач об обтекании одиночного профиля и систем профилей получено хорошее согласование с известными экспериментальными данными при умеренных затратах вычислительных ресурсов, что показывает высокую эффективность разработанного метода [7].

Разработанные параллельные вычислительные алгоритмы, доля параллельного кода в которых превышает 99%, позволяют выполнять расчеты на большом числе вычислительных ядер многопроцессорных систем, существенно сокращая время счета [8].

Проведенные расчеты показали, что метод вихревых элементов позволяет моделировать важный для корректного расчета колебаний проводов ЛЭП эффект синхронизации частоты схода вихрей и частоты собственных колебаний профиля [9].

Для расчета обтекания профилей произвольной формы под разными углами атаки и определения действующих на эти профили нестационарных аэродинамических нагрузок разработан параллельный алгоритм и программный комплекс POLARA [10]. Возможности комплекса позволяют также проводить в автоматизированном режиме детальные методические исследования влияния параметров расчетных схем на результаты моделирования. Комплекс используется на различных вычислительных системах, начиная от персональных ЭВМ и локальных сетей, до высокопроизводительных кластеров типа МВС-100К и СКИФ-МГУ «Чебышев».

Для расчета нестационарного движения провода ЛЭП с произвольным поперечным сечением разработана математическая модель и реализующий ее программный комплекс PROVOD. Аэродинамические нагрузки вычисляются в нескольких отдельных сечениях провода методом вихревых элементов в предположении, что обтекание каждого сечения является плоскопараллельным. Разработанная программа использует технологию MPI [11]. Более точное моделирование колебаний стержней в потоке может выполняться вихревыми методами с использованием моделей вортонов, позволяющих учесть пространственные эффекты и вихреобразование по всей поверхности стержня [12].

Проведенные исследования показали, что для исследования колебаний протяженных гибких плохо обтекаемых конструкций в потоке принципиально важно учитывать нестационарные эффекты, вызываемые вихревым отрывным обтеканием, а также влиянием условий вихреобразования вблизи движущегося тела на режим колебаний.

Авторы благодарят Межведомственный суперкомпьютерный центр РАН за предоставленную возможность использования кластера МВС-100К. Значительный объем исследований выполнен в рамках инновационной программы «Университетский кластер».

Список литературы

1. Девнин С.И. Гидроупругость конструкций при отрывном обтекании. Л.: Судостроение, 1975

2. Baw-Lin Liu, O'Farrell J.M. High frequency flow / Structural Interaction in Dense Subsonic Fluids. Report NASA. CR-4652, 1995. 234 p.

3. Трехмерное отрывное обтекание тел произвольной формы / Под ред. С.М. Белоцерковского. М.: ЦАГИ, 2000. 265 с.

4. Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: МГУ, 2006. 184 с.

5. Cottet G.-H., Koumoutsakos P. Vortex methods: theory and practice. Cambridge Univ. Press, 2000. 320 p.

6. Иванова О.А. Определение собственных частот колебаний одиночного провода ЛЭП // Необратимые процессы в природе и технике: Труды Шестой Всерос. конф. Ч. II. М., 2011. С. 247–250.

7. Марчевский И.К., Морева В.С. Численное моделирование обтекания системы профилей методом вихревых элементов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Бау-

мана. Естественные науки. 2010. № 1. С. 12–20.

8. Марчевский И.К., Щеглов Г.А. Применение параллельных алгоритмов при решении задач гидродинамики методом вихревых элементов // Вычислительные технологии и программирование. 2010. Т. 11. С. 105–110.

9. Марчевский И.К., Иванова О.А. Численное моделирование ветрового резонанса кругового профиля методом вихревых элементов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. № 5. С. 8–12.

10. Марчевский И.К., Морева В.С. Высокопроизводительный программный комплекс POLARA для определения аэродинамических характеристик профилей // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2010): Труды Международ. науч. конф. Уфа. 2010. С. 533–538.

11. Ivanova O.A. Numerical simulation of wind induced conductor motion // International Congress on Vortex Flow and Vortex Methods (ICVFM-2010). Italy, Caserta, 2010. P. 7–12.

12. Щеглов Г.А. Использование вортонов для расчета колебаний балки в пространственном потоке // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. № 4. С. 8–12.

INVESTIGATION OF AEROELASCTIC VIBRATIONS OF A CONDUCTOR INDUCED BY SEPARATED EDDY FLOW

O.A. Ivanova, I.K. Marchevsky, V.S. Moreva, G.A. Scheglov

To analyze the dynamics of overhead conductors, a mathematical model is developed which describes aeroelastic vibrations of the conductor exposed to subsonic incompressible flow, and numerical method is presented to analyze using direct numerical simulation of unsteady separated flow around cross-sections of the vibrating conductor. Unsteady loads acting on the conductor are calculated for specified cross-sections in the assumption that the flow around each cross-section is close to plane-parallel. For the simulation of the flow around cross-sections the meshless vortex elements method is used. The efficiency of the developed algorithm is ensured by paralleling the calculations, so that flows around separate cross-sections and aerodynamic loads acting on them are calculated on different computational nodes of parallel computer system. The designed mathematical model and the program implementing it can be used for modeling the oscillations of overhead conductors and investigation of such phenomena as vibration and galloping.

Keywords: overhead conductor, vibrations, galloping, vortex element method, parallel computations.

УДК 629.7;531.5;521.1

ЛУННЫЕ ТРАЕКТОРИИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

В.В. Ивашкин

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

Ivashkin@keldysh.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Дан анализ развития основных характеристик лунных траекторий космических аппаратов. Проанализированы пути энергетической оптимизации траекторий. Сделан анализ совершенствования навигационных характеристик лунных траекторий – как путем развития и повышения точностей наземных измерительных средств, так и формированием бортовых автономных средств навигации и управления. Отмечены особенности лунных траекторий современных проектов.

Ключевые слова: космический аппарат, лунные проекты, лунные траектории, оптимальные траектории, навигация, управление.

Введение

Дается анализ развития основных характеристик лунных траекторий космических аппаратов (КА) – от пионерских теоретических работ и полетов первых «лунников» 1950-х гг. до современных лунных проектов и современных теоретических результатов [1–6]. Предложена классификация лунных траекторий. Рассмотрены методические вопросы определения лунных траекторий, методы расчета траекторий – в зависимости от задачи и требуемой точности. Проанализированыл составные элементы проблемы определения лунных траекторий, ее междисциплинарные связи с различными отраслями науки и техники. Отмечены основные вопросы, возникающие при баллистическом проектировании траекторий – энергетическая оптимизация траектории, обеспечивающая максимизацию полезной массы космического аппарата, и навигационное обеспечение, обеспечивающее необходимые точности полета. Рассмотрено развитие лунных траекторий с точки зрения эволюции этих основных характеристик. Изучены также особенности современных проектов.

Развитие энергетических характеристик лунных траекторий

Первые лунные траектории для полетов советских КА «Луна-1» («Мечта») и «Луна-2» осуществили первый подлет к Луне, до ~5000 км, в январе 1959 г. и первое попадание в Луну – в сентябре 1959 г. Выведение было осуществлено трехступенчатой ракетой «Восток». Было использовано непрерывное выведение от Земли до начала пассивного полета к Луне, причем геоцентрический полет к Луне проходил по гиперболической орбите. Через ~ 1.5 дня полета ракета массой ~1500 кг и КА массой ~ 200 кг достигали Луны (или, для «Луны-1», ее окрестности). При этом полезная масса составляла ~360–390 кг. Для улучшения энергетических характеристик лунных траекторий в дальнейшем использовалось несколько путей оптимизации. Это, во-первых, улучшение характеристик ракеты-носителя (РН) и траектории выведения. Скоро ракета «Восток» была модифицирована в 4-ступенчатую ракету «Молния» с 3-ступенчатым выведением на орбиту ИСЗ (РН «Союз»), разгоном к Луне (или планетам) 4-й ступенью и введением участка пассивного движения по промежуточной орбите между 3 и 4 ступенями. Это уменьшает гравитационные потери на участке разгона к Луне, позволяя делать разгон оптимальным при разных положениях Луны на ее орбите. Далее, важным для улучшения энергетики было уменьшению скорости отлета от Земли, увеличение времени полета к Луне. При этом уменьшаются расходы топлива на выведение спутника от Земли и скорость подлета к Луне, а также расходы топлива на торможение у Луны – при посадке и создании спутника Луны. КА «Луна-3» (массой ~280 кг), впервые в октябре 1959 г. сфотографировавший обратную сторону Луны, летел к Луне ~2.5 суток уже по эллиптической орбите. КА «Луна-9», впервые в феврале 1966 г. затормозивший скорость до нуля и сделавший мягкую посадку на Луну, и КА «Луна-10», первый ИСЛ (апрель 1966 г.), имели время полета ~3.5 суток и массу КА ~1580 кг. Следующее поколение отечественных лунных аппаратов, осуществивших (ракетой «Протон») доставку на Землю лунного грунта и доставку на Луну луноходов (1970–1976 гг.), имели уже время полета ~ 4.5 суток и массу ~5700 кг. При этом перелет от переходной околоземной орбиты к орбите Луны становится близким к обобщенному перелету Гомана – Цандера. Дальнейшее уменьшение потерь достигается переходом от схемы с одним активным участком разгона к схеме с двумя или несколькими активными участками разгона, с введением промежуточных орбит пассивного движения по ним. Происходит уменьшение гравитационных потерь при разгоне и приближение энергетики разгона к импульсной. При этом можно также уменьшить тягу и массу двигателя разгона и увеличить массу полезного груза. Одновременно это позволяет точнее определить движение КА и точнее реализовать орбиту полета к Луне, уменьшить расходы на коррекцию траектории. Удалось затем – переходом от обычной «прямой» схемы полета между Землей и Луной к «обходной» схеме полета в рамках задачи четырех тел – доказать возможность осуществления полета с пассивный захватом Луной при полете к Луне и с освобождением от лунного притяжения при полете к Земле. Это хотя и повышает время полета и требования к точности управления, уменьшает расход топлива на лунные операции. Полет внешне становится похож на биэллиптическое решение Штернфельда. Существенно уменьшает расход топлива переход (при разгоне у Земли и при торможении у Луны) от химических двигателей к электрореактивным двигателям с малой тягой и большей скоростью истечения, большей удельной тягой. Это, увеличивая время полета, существенно уменьшает расход топлива на перелет к Луне. Заметное уменьшение энергетики космической операции часто дает использование лунного гравитационного маневра. Так, если для перелета от Земли к геостационарной орбите ГСО (при достаточно большой широте космодрома) и для перелета с ГСО к Земле использовать близкий облет Луны, это приводит к уменьшению энергетики полета по сравнению с «прямым» полетом. Показаны особенности лунных траекторий современных проектов.

Анализ навигационных характеристик лунных полетов

Важным для выполнения целей проекта является также обеспечение точностей полета. Система управления движением ракеты-носителя обеспечивает необходимую точность выведения КА на последующую траекторию полета к Луне. В первых лунниках «Луна-1, 2, 3» в 1959 г. после выключения двигателей ракеты-носителя полет был неуправляемым. Для контроля на начальном участке полета движение КА определялось по приборам последней ступени ракеты. Затем движение КА уточнялось с помощью первого радиоизмерительного центра дальней связи (в Крыму, у Симеиза) с плоской поворотной антенной площадью ~100 м^2 и бортовой системы КА метрового диапазона [4, 3]. Это давало точность измерений по дальности ~20 км и по ее скорости ~15 см/с. Были использованы также интерферометрические измерения углов направления на КА с помощью двух антенн близкой астрофизической обсерватории ФИАН СССР [3]. В результате положение точки падения КА «Луна-2» на Луну было определено очень точно, $\Delta r \approx 300$ км. Для дальнейших проектов, начиная с Е-6 (КА «Луна-9, 13»), движение КА было управляемым, с коррекцией траекторий. Совершенствовалась и система навигации. Была введена в строй радиолокационная система в Крыму, около Симферополя, с параболическими антеннами диаметром 25 и 32 м. Было уточнено поле Луны. Для третьего поколения лунных аппаратов (Е-8, Е-8/5, «Луна 16-24») и программы облета Луны Л-1 (1968–1970 гг.) система навигации была еще более развита. Были введены в строй новые измерительные комплексы дециметрового диапазона – в Крыму, под Москвой, в Байконуре, около Уссурийска, на Камчатке. Была разработана система измерения разностей радиальной скорости [4, 3]. Для возврата к Земле использовалась метровая радиосистема и оптические измерения. Все это позволило успешно решить сложные задачи точной посадки ($\Delta r \approx 5$ км) и возвращения на Землю образцов лунного грунта без коррекции траектории возврата. Важным является применение систем автономной навигации. Для проекта Е-6 была разработана автономная система оптической угломерной навигации и ориентации оси тормозного двигателя по фактическому вектору скорости КА у Луны [3]. Для проекта Л-1 пилотируемого облета Луны была разработана система автономной навигации с бортовыми оптическими измерениями и бортовым компьютером [5]. Автономная система была разработана для проекта США «Аполлон» пилотируемой лунной экспедиции. Перспективно применение автономных систем навигации для полета с малой тягой. Показаны особенности навигации лунных траекторий современных проектов.

Выводы

Одним из важнейших элементов мировой космонавтики явились лунные проекты, реализация которых привела к циклу теоретических и практических работ по траекторному обеспечению характеристик лунных полетов. Данные работы остаются актуальными и в настоящее время.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 09-01-00710) и в рамках гранта научной школы НШ-6700.2010.1.

Список литературы

1. Егоров В.А. // Успехи физических наук. 1957. Т. 43, №1. С. 73–117.

2. Келдыш М.В. Избранные труды. Ракетная техника и космонавтика. М.: Наука, 1988. С. 261–309.

3. Ивашкин В.В. Прикладная небесная механика и управление движением. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010. С. 73–106.

4. Молотов Е.П. Наземные радиотехнические системы управления КА. М.: Физматлит, 2004. 256 с.

5. Eneev T.M. et al. // Acta Astronautica. 2010.V. 66. P. 341–347.

6. Foing B.H. et al. // Journal of Earth System Science. 2005.V. 114, No 6. P. 687–697.

LUNAR SPACECRAFT TRAJECTORIES

V.V. Ivashkin

The evolution of the main characteristics of lunar spacecraft trajectories is analyzed in the paper. Energy-optimization methods of the trajectories are analyzed. Improvement of the navigation characteristics for the lunar space trajectories is also analyzed. To this end, both evolution of ground measurement systems and increasing of their precisions and development of onboard autonomous systems for navigation and control are presented. Some peculiarities of the lunar space trajectories for the modern projects are given..

Keywords: spacecraft, lunar projects, lunar trajectories, optimal trajectories, navigation, control.

УДК 539.3

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТЯЖЕЛОЙ НИТИ С АЭРОСТАТОМ

О.В. Исламова

Кабардино-Балкарский госуниверситет им. Х.М. Бербекова, Нальчик

Islamova_81@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассмотрена модель свободных колебаний нити с аэростатом с учетом силы трения. Численными методами найдены спектры собственных частот, форм и коэффициентов затухания. Предложенная теория проверена на конкретном примере.

Ключевые слова: аэростат, спектр собственных частот, коэффициент затухания, собственные формы.

Неклассические задачи о колебаниях тяжелых нитей вызывают в последнее время повышенный интерес [1, 2]. Рассмотрим свободные колебания такой нити с присоединенной массой. Однородная тяжелая нить (рис. 1) с аэростатом массы M на верхнем свободно перемещающемся конце нагружена вертикальной равномерно распределенной нагрузкой от собственного веса p, подъемной силой аэростата Q.

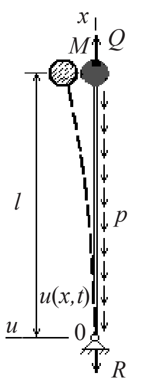


Рис. 1

Математическая модель свободных колебаний нити с аэростатом состоит из основного уравнения

$$\ddot{u} + \varepsilon\dot{u} - g(u' - zu'') = 0, \quad z = x + R/\rho,$$
$$(x,t) \in Q \equiv [(x,t) : x \in L \equiv (0,l), \quad t \in R^1]. \tag{1}$$

и граничных условий

$$u(0,t) = 0, \quad \ddot{u}(l,t) + \nu\dot{u}(l,\mathrm{t}) + ru'(l,t) = 0,$$
$$r = Q/M - g, \quad t > -\infty. \tag{2}$$

Здесь ε, ν – коэффициенты линейного вязкого трения при колебаниях нити и сосредоточенной массы, g – ускорение свободного падения, ρ – плотность материала нити. Вертикальные перемещения аэростата и нити не учитываются ввиду их малости.

Решение задачи (1), (2) отыскивается методом разделения переменных как произведение

$$u(x,t) = U(x)e^{\lambda t}, \tag{3}$$

где характеристический показатель является комплексной величиной

$$\lambda = -\mu + j\omega. \tag{4}$$

При этом j – мнимая единица, μ и ω – подлежащие определению коэффициент затухания и частота свободных колебаний, $U(x)$ – собственная форма колебаний струны. Очевидно, что выражения в правых частях (3), (4) учитывают как затухающий, так и колеблющийся характер искомого решения.

Подстановка (3) в однородную задачу (1), (2), дает

$$U(0) = 0, \quad zU'' + U' - \gamma U = 0,$$
$$U'(l) + \eta U(l) = 0,$$
$$\gamma = (\lambda^2 + \varepsilon\lambda)/g, \quad \eta = (\lambda^2 + \nu\lambda)/r.$$

Использование метода конечных разностей приводит к системе алгебраических линейных уравнений в матрично-векторной форме

$$\mathbf{B}(\lambda)\mathbf{y} = \mathbf{0}, \tag{5}$$

где $\mathbf{B}(\lambda)$ – квадратная матрица порядка n (n – количество узловых точек разностной сетки), $\mathbf{y}^{\mathrm{T}} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ – вектор, компонентами которого являются отклонения струны, $y_i = y_i(x_i)$. Элементы главной диагонали матрицы являются функциями характеристического показателя λ и через него – коэффициента затухания μ и частоты колебаний ω в соответствии с (4).

Условие существования нетривиального решения системы уравнений (5) дает частотное комплекснозначное уравнение

$$\det \mathbf{B}(\lambda) = 0, \tag{6}$$

которое можно представить в виде системы двух алгебраических действительных уравнений

$$f_1(\mu, \omega) = 0, \quad f_2(\mu, \omega) = 0.$$

Ее решения определяются методом покоординатного спуска и образуют спектр собственных частот $\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n-1}\}$ и коэффициентов затухания $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_{n-1}\}$. Соответствующие им собственные формы определяются из (5) как векторы Y_k, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, где $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = c_2/b_2$, а остальные элементы определяются с помощью рекуррентной формулы

$$y_{i+1} = (c_i y_i - a_i y_{i-1})/b_i, \quad i = 3, 4, \ldots, n-1.$$

Здесь a_i, b_i, c_i – коэффициенты, полученные процедурой метода конечных разностей.

Пример. Задана система из стальной проволоки диаметром d и массой M с параметрами

$$l = 10\text{ м},\ n = 201,\ \rho = 7810\text{ кг/м}^3,\ d = 5\text{ мм},$$
$$\varepsilon = 0.1\text{ с}^{-1},\ \nu = 0.05\text{ с}^{-1},\ M = 50\text{ кг},\ Q = 1000\text{ Н}.$$

По предложенному алгоритму найдены три элемента спектров собственных частот

$$\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \\ = \{1.0;\ 18.0;\ 35.9\}\ \text{с}^{-1}$$

и коэффициентов затухания

$$\mu = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\} = \\ = \{0.025;\ 0.049;\ 0.05\}\ \text{с}^{-1}.$$

Интересно заметить, что коэффициенты затухания находятся в следующих приблизительных или точных соотношениях с удельными коэффициентами трения:

$$\mu_1 = \nu/2 = 0.025\text{ с}^{-1},\quad \mu_2 \approx \varepsilon/2 = 0.050\text{ с}^{-1},$$
$$\mu_3 = \varepsilon/2 = 0.05\text{ с}^{-1}.$$

Из этого следует, что колебания системы по первой частоте происходят преимущественно под влиянием сосредоточенной массы, а по второй и третьей частотам – под влиянием нити. Собственные формы должны подтверждать это предположение.

Найдены первые три собственные формы $Y_k(x)$, представленные на рис. 2. Как предсказано, в колебаниях по первой частоте доминирующую роль играют отклонения сосредоточенной массы, при колебаниях по обертонам – отклонения континуального участка струны.

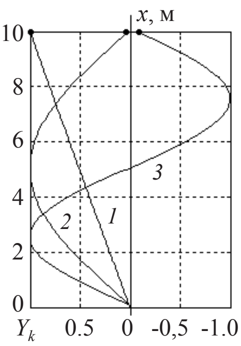


Рис. 2

Анализ результатов позволяет утверждать, что применение метода конечных разностей является простым и эффективным способом решения проблемы собственных частот и форм для подобных задач.

Список литературы

1. Бермус И.М. и др. Продольные колебания троса переменной длины с грузом на конце. Ростов. ун-т. Ростов-на-Дону, 1991. 34 с. Деп. В ВИНИТИ 01.08.91, № 3315-В91.

2. Культербаев Х.П., Исламова О.В. Математическая модель колебаний подвешенной струны с сосредоточенной массой // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2007. № 4. С. 41–46.

FREE OSCILLATIONS OF A HEAVY THREAD WITH A BALLOON

O.V. Islamova

We consider a model of free oscillations of a thread with a balloon, taking into account the force of friction. Numerical methods are used to find the spectra of eigenfrequencies, forms and rates of attenuation. The suggested theory has been tested on a concrete example.

Keywords: air balloon, the spectrum of natural frequencies, damping coefficient, eigen forms.

УДК 531.3+534.1

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН, ОСЛАБЛЕННЫХ ВЫРЕЗАМИ

Ю.Н. Казачек

Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

yunk_nn@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассмотрено влияние вырезов различной формы на собственные колебания тонких упругих пластин на примере свободно опертой прямоугольной пластины. Для расчета коэффициентов влияния вырезов на собственную частоту колебаний пластины были использованы формулы, полученные интегрированием уравнения малых колебаний пластин с переменной жесткостью, зависящей от числа и размера вырезов, методом Бубнова – Галеркина.

Ключевые слова: пластина с вырезом, собственные частоты, аналитический расчет, конечно-элементный анализ.

Одной из основных задач при расчете вибрационных характеристик элементов конструкций, особенно на стадии проектирования, является определение частот свободных колебаний. Частота собственных колебаний сплошной свободно опертой по всему контуру пластины определяется формулой, полученной С.П. Тимошенко [3]:

$$\lambda_{mn} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{a^2}\right)\sqrt{\frac{D_0}{\rho_0 h}}, \qquad (1)$$

где D_0 – цилиндрическая жесткость пластины; h – толщина пластины; ν – коэффициент Пуассона; ρ_0 – плотность материала пластины; a – размер пластины вдоль оси y; b – размеры пластины вдоль оси x; m и n – число полуволн вдоль оси x и y соответственно.

Здесь приведены результаты расчета низшей частоты собственных колебаний ($m = n = 1$) тонких упругих пластин с отношением сторон $b/a = 1.5$, ослабленных центральными вырезами квадратной, прямоугольной, круглой и овальной формы. Для удобства анализа формулу (1) представим в виде:

$$\lambda = \frac{\pi}{2}\frac{k}{a^2}\sqrt{\frac{D_0}{\rho_0 h}}, \qquad (2)$$

где k – коэффициент, зависящий от размера, формы и расположения выреза, определяемый по формуле:

$$k = k_0(1 + \xi(d/a)), \qquad (3)$$

где $k_0 = 1 + a^2/b^2$ – коэффициенты для пластин без вырезов из формулы (1); $\xi(d/a)$ – коэффициент, учитывающий наличие и форму выреза (d – его большая сторона).

Для квадратного и прямоугольного вырезов коэффициент $\xi(d/a)$ был определен согласно формуле, приведенной в [1]:

$$\xi\left(\frac{d}{a}\right) = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}\frac{8(1-\nu)}{(1+a^2/b^2)^2}\frac{\chi}{4\pi^2(1-cd/ab) - 2\chi - m_1 m_2}} - 1, \qquad (4)$$

где

$$m_1 = \sin 2\alpha\frac{x_1}{b} - \sin 2\alpha\frac{x_2}{b};$$

$$m_2 = \sin 2\beta\frac{y_1}{a} - \sin 2\beta\frac{y_2}{a};$$

$$\chi = \pi\left(m_1\frac{c}{a} + m_2\frac{d}{b}\right);$$

$\alpha = m\pi/b$; $\beta = n\pi/a$ – число полуволн вдоль оси x и y соответственно; $d = x_2 - x_1$; $c = y_2 - y_1$; x_1, x_2, y_1, y_2 – координаты, определяющие положение выреза.

Для кругового и овального вырезов коэффициент y был определен согласно рекомендациям [2]:

$$\xi\left(\frac{d}{a}\right) = 2.5\frac{(a/b)^{2+b/(4a)}(d/a)^3}{(d/c)^2 + d/c - 1}, \qquad (5)$$

где c – меньшая ось овала (для круглого отверстия $d = c$).

На рис. 1 показаны зависимости коэффициента k от отношения площади выреза S к площади пластины S_0 для прямоугольной свободно опертой пластины с центральным квадратным (кривая *1*), прямоугольным (кривая *2*, $d/c = 1.5$), круглым (кривая *3*) и овальным (кривая *4*, $d/c = 1.5$)

вырезами.

Результаты вычислений, приведенные на рисунке, показывают, что при одинаковой площади выреза наибольшее влияние на собственную частоту пластины оказывает круговой вырез, а наименьшее – овальный. Однако последний вывод «не работает» при малой величине отношения площади выреза к площади пластины (до 0.07). Переход от кругового выреза у к овальному почти сразу же начинает понижать собственную низшую частоту пластины, а при $S/S_0 = 0.25$, когда перестают действовать приближения, принятые в формулах Регистра, разница частот пластин с прямоугольным и овальным вырезом, вычисленных разными способами, составляет 6–7%.

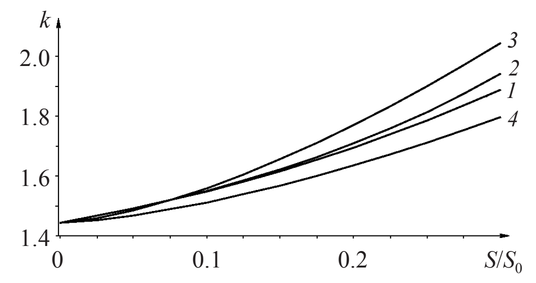


Рис. 1

На рис. 2 показано, что изменение соотношения сторон прямоугольного выреза при небольшой площади выреза ($S/S_0 < 0.2$) не оказывает большого влияния на изменение собственной частоты.

Варьирование соотношением сторон $1 < d/c << 2.2$ приводит к увеличению частоты собственных колебаний по сравнению с пластиной с квадратным вырезом ($d/c = 1$), а при $d/c > 2.2$ – к уменьшению, то есть искомая зависимость немонотонная, в отличие от монотонной функции, представленной формулой (5). Возможно, при выбранном нами, часто применяемом на практике, соотношении $d/c = 1.5$ соответствующая функция имеет экстремум. При больших значениях d/c частота собственных колебаний пластины с удлиненным вырезом должна стремиться к значению для сплошной пластины.

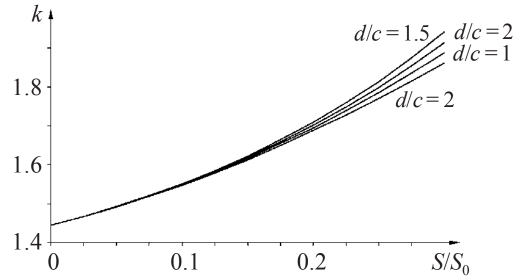


Рис. 2

Сравнение результатов применения формул Регистра и численного расчета с помощью пакета прикладных программ COSMOS-M [4] показало, что значения собственных частот могут быть занижены. С другой стороны, формула (5), возможно, также нуждается в практической проверке и уточнении, так как выявленный неоднозначный характер поведения соответствующих зависимостей требует более глубокого изучения и анализа.

В работе принимала участие Н.Е. Никитина.

Список литературы

1. Преображенский И.Н. Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями. М.: Машиностроение, 1981. 191 с.

2. Российский морской регистр судоходства: Сборник нормативно-методических материалов. Книга 14. СПб., 2004.

3. Вибрация в технике: Справочник. Т.1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.

4. Никитина Н.Е., Казачек С.В. Влияние круглых и эллиптических вырезов на собственные частоты пластин, вычисленные аналитическим и численным методами // Вестник научно-технического развития: Интернет-журнал. 2010. № 10(38). С. 33–37.

NATURAL OSCILLATIONS OF RECTANGULAR PLATES WEAKENED BY CUTS

Yu. N. Kazachek

The influence of cutouts of the various shapes on the natural vibrations of thin elastic plates is considered in the report, using an example of a freely supported rectangular plate. The calculation of the coefficients of the influence of cutouts on the natural frequency of the plate was realized using the formulas derived by integrating the equations of small vibrations of plates with variable stiffness, depending on the number and size of the cutouts, by the Bubnov – Galerkin method.

Keywords: plate with a cut, natural frequencies, analytical calculation, finite element analysis.

УДК 519.6

ПОРЯДКОВЫЕ СВОЙСТВА РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩЕЙ КОНЕЧНОМЕРНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ

А.Л. Калашников

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

allk123@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматривается задача минимизации функционала при ограничениях на состояние x и управление u в виде операторного равенства и функциональных неравенств. Пространство управлений здесь – КВ-линеал с единицей. Для метода А.Н. Тихонова приводятся условия порядковой сходимости конечномерной регуляризирующей последовательности к оптимальному множеству управлений в КВ-линеале ограниченных элементов.

Ключевые слова: управление, линеал, порядковая сходимость, оптимальное множество, ограниченность, регуляризация.

Минимизация функционала в КВ-линеале

Рассматривается 0-задача: $g_0(x,u) \to \inf$

$$F(x,u)=0, \quad g_j(x,u)\le 0, \; x\in X, \; u\in U, \; j=\overline{1,n}.$$

Здесь операция F: $X\times U \to Z$, где X, Z – банаховы пространства, а U является КВ-линеалом с единицей e. Тогда по [1] существует подлинеал U_e, являющийся КВ-линеалом e-ограниченных элементов. Далее функционалы g_0, g_j и операция F класса C^1 на $X\times U$ и будем называть U пространством управлений u, а X – пространством состояний x. Пусть для всех $u \in U$ уравнение $F(x,u) = 0$ имеет единственное решение $x = x(u)$ класса C^1. Предположим, также, что $D_0 \neq \varnothing$, где D_0 – допустимое множество управлений в 0-задаче, и существует некоторое множество $S \subset U$, для которого $D_0 \subset S$.

Обозначим U^0 – множество оптимальных управлений u_0 в 0-задаче и допустим, что $U^0 \neq \varnothing$. Исходная 0-задача может быть некорректной [2]. Для некорректных задач оптимизации разработаны методы регуляризации. Используем здесь метод А.Н. Тихонова [2]. Определим функцию Тихонова:

$$T_k(x(u),u) = g_0(x(u),u) + \alpha_k \omega(u),$$
$$u\in U, \quad k=1,2,\ldots,$$

где функционал $\omega(u) \ge 0$ на U класса C^1, а числовая последовательность $\alpha_k \to +0$. Пусть в пространстве U существует линейно-независимая система из элементов $h_i \in U$ при $i=\overline{1,\infty}$, а множества U_k – линейная оболочка для элементов h_1, h_2, ..., h_k. Очевидно U_k с той же метрикой являются банаховыми пространствами. Введем k-задачи: $T_k(x(u),u) \to \inf$

$$g_j(x(u),u) \le 0, \quad j=\overline{1,n}, \quad u\in U_k.$$

Тогда в k-задаче допустимое множество управлений $D_k = D_0 \bigcap U_k$. Предположим, что $D_1 \neq \varnothing$; из $U_k \subset U_{k+1}$ получаем $D_k \subset D_{k+1}$ и $D_k \neq \varnothing$. Допустим также, что сопряженное пространство U^* является КВ-линеалом с единицей a. Введем U_e – КВ-линеал e-ограниченных элементов в U, а U_a^* – КВ-линеал a-ограниченных элементов в U^*. Обозначим $\|\cdot\|_e$ – норму в U_e. По [1] получаем, что из сходимости последовательности в U_e следует и сходимость в U к тому же пределу, что означает более сильную метрику в U_e, чем в U. Далее $|\cdot|$ – модуль элемента.

Усиленная сходимость регуляризирующей последовательности

Предположим, что $T_k(x(u), u) = a_{0,k}(u) + b_{0,k}(x(u), u)$, где функционалы $a_{0,k}(u) = a_0(u)$ будут при $b_{0,k}(x(u), u) = b_0(x(u), u) + \alpha_k\omega(u)$ или $a_{0,k}(u) = a_0(u) + \alpha_k\omega(u)$ будут при $b_{0,k}(x(u), u) = b_0(x(u), u)$. Здесь все функционалы класса C^1 на $X\times U$. Отметим, что такое представление зависит от свойств $\omega(u)$.

Теорема 1. *Пусть в любой k-задаче существует оптимальное управление u_k^0 и* 1) *для всех $u \in S$ функционалы $b'_{j,u}(x(u),u)$, $a'_{j,u}(0) \in U_a^*$ при $j=\overline{1,n}$ и $b'_{0,k,u}(x(u),u)$, $a'_{0,k,u}(0) \in U_a^*$;* 2) *существует такой линейный оператор $B > 0$: $U^* \to U$ с $Ba \in U_e$, что при всех $u,v \in S$ и числах $\lambda_i \ge 0$ с $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1$ будет*

$$|u-v| \le B|\theta'_u(u,\bar{\lambda})-\theta'_u(v,\lambda)|,$$

где $\bar{\lambda} \in R^{n+1}$, *а*

$$\theta(u,\bar{\lambda}) = \lambda_0 a_{0,k}(u) + \sum_{j=0}^{n} \lambda_j a_j(u).$$

Тогда u_0, u_k^0, *являются е-ограниченными, а при существовании чисел* $\alpha, \beta, \gamma > 0$, *для которых* $0 < Ba \le \beta e$ *и при всех* $u \in S$ *выполнены неравенства*

$$|a'_{0,k,u}(0)|, \quad |a'_{j,u}(0)| \le \alpha a,$$

$$|b'_{0,k,u}(x(u),u)|, \quad |b'_{j,u}(x(u),u)| \le \gamma a,$$

будут верны оценки: $|u_0|, |u_k^0| \le (\gamma+\alpha)\beta e$.

Введем для $u \in U_e$ и множества $Q \subset U_e$ расстояние $\rho_e(u,Q) = \inf\|u-v\|_e$ по всем $v \in Q$. Обозначим $U_e^0 = U_e \bigcap U^0$ – множество e-ограниченных оптимальных управлений в 0-задаче.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* 1) *для всякой* $\{v_k \subset S\}$, *последовательности* $b'_{0,k,u}(x(v_k),v_k)$, $b'_{j,u}(x(v_k),v_k)$, *где* $j=\overline{1,n}$, *компактны в* U_a^*; 2) *замыкание*

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k} = U;$$

3) *множество* D_0 *ограничено по норме в* U.

Тогда I) *в любой k-задаче существует оптимальное управление* $u_k^0 \in U_e$; II) *последовательность* $\{u_k^0\}$ *компактна в пространстве* U_e *и минимизирующая в* 0-*задаче, а любая ее предельная точка будет е-ограниченным оптимальным управлением в* 0-*задаче*; III) *существует* $\lim_k g_0(x(u_k^0),u_k^0) = d_0$, *где число* d_0 *есть* inf *в* 0-*задаче*; IV) *множество* $U_e^0 \ne \varnothing$ *и выполнено* $\lim_k \rho(u_k^0, U_e^0) = 0$.

Замечание. Здесь оптимальное управление u_k^0 можно получить каким-либо численным методом оптимизации в конечномерном пространстве. На основе теоремы 2 получаем регулярность в метрике U_e минимизирующей последовательности, построенной по методу регуляризации А.Н. Тихонова. Тогда по терминологии [2], регулярность в U_e можно назвать e-регулярностью. Это приводит к усиленной порядковой регуляризации по отношению к метрике пространства управлений U.

Изложенные результаты применимы к задаче оптимального управления:

$$\int_{t_0}^{t_1} (a(u,t)+c(x,t))\,dt \to \inf, \qquad (1)$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} (A(x,\tau)+B(\tau)u)\,d\tau, \; t \in [t_0,t_1],$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (a_{i,0}(u,t)+c_{i,0}(x,t))\,dt \le 0, \; i=\overline{1,N},$$

где состояние $x \in C([t_0,t_1],R^m)$, управление $u \in L_2^n[t_0,t_1]$, функции $a(u,t)$, $c(x,t)$, $a_{i,0}(u,t)$, $c_{i,0}(x,t)$ и вектор-функция $A(x,t)$ определены для всех $x \in R^m$, $u \in R^n$, $t \in [t_0, t_1]$ и гладкие, а матричная функция $B(t)$ непрерывна на $[t_0, t_1]$. Как известно, такие задачи могут быть некорректными. Тогда, применяя метод регуляризации А.Н. Тихонова и теорему 2, получаем сходимость регулярной последовательности управлений в $L_\infty^n[t_0,t_1]$ ко множеству ограниченных оптимальных управлений. Это приводит к усиленной регуляризации в задаче (1) по отношению к метрике $U = L_2^n[t_0,t_1]$. В качестве системы функций для конечномерных подпространств U_k можно взять, например, вектор-функции полиномы. Тогда

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k} = L_2^n[t_0,t_1].$$

Здесь за единицу e принимается вектор-функция $e(t) = (1,1,\ldots,1)^T$, а функционал $\omega(u) = \|u\|^2$.

Список литературы

1. Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961.
2. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

THE ORDINAL PROPERTIES OF THE FINITE-DIMENSIONAL REGULARIZATING SEQUENCE FOR A MINIMISATION PROBLEM

A.L. Kalashnikov

We consider the problem of minimization of the functional with restrictions on a condition x and control u in the form of operational equality and functional inequalities. The space of the control is the KV- lineal with the unit. The article presents the conditions of the ordinal convergence the finite-dimensional regularizating sequence to the set of the optimal controls in the KV-lineal of the limitating elements. This sequence is constructed using the A.N. Tikhonov's method of the regularization.

Keywords: control, lineal, ordinal convergence, optimal set, limitation, regularization.

УДК 532.5+539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТРУБОПРОВОДА С ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ КАК ГИДРОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ

Д.В. Капитанов

НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

labdin@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Представлены методика и результаты численно-аналитического исследования неконсервативной устойчивости консольного трубопровода как типичной гидроупругой системы и консольно закрепленного стержня со следящей силой на свободном конце. Исследования проведены двумя способами. Первый способ основан на представлении решения с использованием двух первых стержневых форм собственных колебаний, второй сводится к точному решению проблемы собственных значений, так как не ограничивается традиционным учетом только небольшого числа низших форм колебаний. Тестирование алгоритма проведено путем сравнения с результатами классических и современных численных и экспериментальных исследований.

Ключевые слова: гидроупругие системы, неконсервативная устойчивость, консольный трубопровод, консольный стержень, метод Бубнова – Галеркина, собственные формы колебаний, парадокс Циглера, парадокс дестабилизации.

1. Постановка задачи

Уравнение малых низкочастотных плоских изгибных колебаний рассматриваемого как стержень прямого однородного трубопровода с учетом внутреннего потока несжимаемой жидкости имеет вид [1]:

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\xi\frac{\partial y}{\partial t}+m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}= =-\left(Mv^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+2Mv\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}+M\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right), \qquad (1)$$

где $y(x, t)$ – поперечное перемещение трубопровода, EI – изгибная жесткость, x – продольная координата, t – время, P – сжимающая нагрузка, ξ – коэффициент трения, m и M – приходящаяся на единицу длины масса оболочки и жидкости соответственно, v – скорость жидкости, предполагаемая постоянной.

В рассматриваемом случае консольного закрепления трубопровода с учетом действия следящей силы на свободном конце (при $x = l$, где l – длина трубопровода) имеем:

$$y(x,t)\Big|_{x=0}=0;\quad \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}=0;$$

$$EI\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=l}=0;\quad EI\frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3}\Big|_{x=l}=0. \qquad (2)$$

При учете внутреннего трения по гипотезе Кельвина – Фохта в уравнении и краевых условиях следует заменить E на оператор $E(1 + \mu\partial/\partial t)$, где μ – коэффициент внутреннего трения.

После перехода к безразмерным переменным задача (1), (2) с учетом внутренних потерь примет вид:

$$\gamma\frac{\partial^5 y}{\partial\varphi^4\partial\tau}+\frac{\partial^4 y}{\partial\varphi^4}+b\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+2a\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi\partial\tau}+ +\delta\frac{\partial y}{\partial\tau}+\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^2}=0;$$

$$y(\varphi,\tau)\Big|_{\varphi=0}=0;\quad \frac{\partial y(\varphi,\tau)}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=0}=0;$$

$$\frac{\partial^2 y(\varphi,\tau)}{\partial\varphi^2}\Big|_{\varphi=1}=0;\quad \frac{\partial^3 y(\varphi,\tau)}{\partial\varphi^3}\Big|_{\varphi=1}=0, \qquad (3)$$

где

$$\varphi=\frac{x}{l};\ \tau=\frac{t}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m+M}};\ \gamma=\frac{\mu}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m+M}};\ \delta=\frac{\xi l^2}{EI}\times \times\sqrt{\frac{EI}{m+M}};\ b=\frac{(Mv^2+P)l^2}{EI};\ a=\frac{Mvl}{EI}\sqrt{\frac{EI}{m+M}}.$$

Рассматривается случай отсутствия нагрузки на свободном конце, то есть $P = 0$.

Модель изгибных колебаний в случае стержня получается, если во всех предыдущих рассуждениях положить $M = 0$, а в параметре b будем учитывать только нагрузку P.

2. Представление решения с использованием двух первых форм колебаний

Ищем решение данной задачи в следующем виде: $y(\varphi,\tau) = X_1(\varphi)T_1(\tau) + X_2(\varphi)T_2(\tau)$.

Первые две формы колебаний возьмем для консольно закрепленного стержня, являющегося частным случаем данной модели при $M = 0$ и $P = 0$ [2]. Проведя стандартную процедуру метода Бубнова – Галеркина, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 T_j(\tau)}{\partial \tau^2} + \delta \frac{\partial T_j(\tau)}{\partial \tau} + 2a\sum_{i=1}^{2}\alpha_{ji}\frac{\partial T_i(\tau)}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^{2}\beta_{ji}T_i(\tau) + $$
$$+ b\sum_{i=1}^{2}\gamma_{ji}T_i(\tau) + \gamma\sum_{i=1}^{2}\beta_{ji}\frac{\partial T_i(\tau)}{\partial \tau} = 0,\quad j=1,2,$$

где

$$\alpha_{ji} = \int_0^1 \frac{\partial X_i(\varphi)}{\partial \varphi} X_j(\varphi)d\varphi;\quad \beta_{ji} = \int_0^1 \frac{\partial^4 X_i(\varphi)}{\partial \varphi^4} X_j(\varphi)d\varphi;$$

$$\gamma_{ji} = \int_0^1 \frac{\partial^2 X_i(\varphi)}{\partial \varphi^2} X_j(\varphi)d\varphi.$$

Исследование на устойчивость проводится с использованием критерия Рауса–Гурвица для характеристического уравнения данной системы.

Определение границы устойчивости в пространстве параметров системы проведено численно. Число независимых параметров достаточно велико. Основной интерес представляет зависимость от скорости течения жидкости, поэтому зафиксируем все остальные параметры и будем с малым шагом увеличивать величину скорости жидкости v (в случае стержня увеличиваем величину нагрузки P), пока не нарушится выполнение критерия. Разработанный с этой целью численный алгоритм позволяет проводить исследования при различных комбинациях фиксированных параметров.

3. Точное решение проблемы собственных значений

После подстановки решения задачи (3) в форме $y(\varphi,\tau) = Y(\varphi)e^{\lambda\tau}$ получим краевую задачу на собственные значения, общее решение которой имеет вид:

$$Y = \sum_{i=1}^{4} A_i e^{W_i \varphi},$$

где $W_i(\lambda, a, b, \gamma, \delta)$, $i = \overline{1,4}$ – корни характеристического уравнения,

$$F(W) = (1+\gamma\lambda)W^4 + bW^2 + 2a\lambda W + \delta\lambda + \lambda^2 = 0. \quad (4)$$

Для определения коэффициентов A_i, $i = \overline{1,4}$, из краевых условий задачи имеем систему четырех однородных алгебраических уравнений, определитель которой равен нулю:

$$D = (W_2 - W_1)(W_4 - W_3)(e^{W_3+W_4}W_3^2W_4^2 + $$
$$+ e^{W_1+W_2}W_1^2W_2^2) + (W_1 - W_3)(W_4 - W_2)\times$$
$$\times(e^{W_2+W_4}W_2^2W_4^2 + e^{W_1+W_3}W_1^2W_3^2) + (W_4 - W_1)\times$$
$$\times(W_3 - W_2)(e^{W_2+W_3}W_2^2W_3^2 + e^{W_1+W_4}W_1^2W_4^2) = 0. \quad (5)$$

Заметим, что собственные числа рассматриваются над полем комплексных чисел и имеют вид $\lambda = h + iw$.

Из характеристического уравнения (4) и равенства нулю определителя системы (5), разделяя мнимые и действительные части, получаем систему десяти нелинейных уравнений с десятью неизвестными.

В разработанном алгоритме для случая трубопровода на каждом шаге малого изменения потока жидкости (для стержня – нагрузки) от нуля до некоторого значения при заданных γ и δ итерационным методом Ньютона решается система уравнений и находятся собственные числа λ_k. В качестве начальных значений берутся известные решения уравнения $\mathrm{ch}\sqrt{w}\cos\sqrt{w} + 1 = 0$ [2], к которому сводится система, а в дальнейшем – значения, полученные на предыдущем шаге изменения параметров.

Исследования показали, что результаты подходов согласуются не только между собой, но и с известными из литературы [3]. В случае стержня обнаружен известный эффект дестабилизации от внутреннего трения и продемонстрирован парадокс Циглера [4]. В обоих подходах были построены годографы собственных значений системы в зависимости от скорости потока жидкости в случае трубопровода и нагрузки в случае стержня, качественно не отличающиеся друг от друга, которые показали, что потеря устойчивости трубопровода происходит по второй форме колебаний, а для стержня – по первой.

Список литературы

1. Фролов К.В. и др. Динамика конструкций гидроаэроупругих систем / Отв. ред. С.М. Каплунов, Л.В. Смирнов. М.: Наука, 2002. 397 с.
2. Цейтлин А.И. Справочник по динамике сооружений. М.: Стройиздат, 1972. 511 с.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 340 с.
4. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384 с.

STUDYING NON-CONSERVATIVE STABILITY OF A PIPELINE WITH A LIQUID FLOW AS A HYDRO-ELASTIC SYSTEM

D.V. Kapitanov

The methodology and the results of numerical-analytical study of the non-conservative stability of a cantilever pipeline as a typical hydro-elastic system and of a cantilever rod with a tracking force on the free end are presented. The study was conducted in two ways. The first one is based on representing the solution using the first two rod forms of natural oscillations, whereas the second one is reduced to the exact solution of the eigenvalue problem, as it is not limited by traditionally accounting only for a small number of the lowest oscillation forms. The algorithm is tested by comparing the obtained results with the results of classical and modern numerical and experimental investigations.

Keywords: hydro-elastic systems, non-conservative stability, cantilever pipeline, cantilever rod, Bubnov – Galerkin method, natural forms of oscillations, Zigler paradox, destabilization paradox.

Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (2), с. 172–173

УДК 681.5

ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА СГОРАНИЯ ТОПЛИВА В ЖИДКОСТНОМ РАКЕТНОМ ДВИГАТЕЛЕ

А.В. Ким, Л.Е. Волохова, Д.Е. Заводников

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

avkim@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Представлены алгоритмы синтеза стабилизирующих управлений с обратной связью в задаче управления процессом сгорания топлива в жидкостном ракетном двигателе, описываемым системой дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Ключевые слова: ракетный двигатель, стабилизация, управление с обратной связью.

Классическая математическая модель процесса сгорания топлива в жидкостном ракетном двигателе представляет собой систему дифференциальных уравнений с запаздыванием [1]:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = (\gamma-1)\varphi(t) - \gamma\varphi(t-\delta) + \mu(t-\delta), \\ \dot{\mu}_1(t) = \dfrac{1}{\varsigma J}\left[-\psi(t) + \dfrac{p_0 - p_1}{2\Delta p}\right], \\ \dot{\mu}(t) = \dfrac{1}{(1-\varsigma)J}[-\mu(t) + \psi(t) - P\varphi(t)], \\ \dot{\psi}(t) = \dfrac{1}{E}[\mu_1(t) - \mu(t)], \end{cases} \qquad (1)$$

где $\varphi(t)$ – скорость изменения давления в камере сгорания; $\mu_1(t)$ – скорость массы потока, перемещающегося в камере; $\mu(t)$ – относительное изменение величины впрыска и скорость сгорания; $\psi(t)$ – относительное изменение p_1; p_0 – регулируемое давление газа для поддержания постоянного давления (в камере); P – параметр перепада давления; Δp – перепад давления при впрыске в установившемся процессе; t – единица времени, нормированная по времени пребывания газа (в камере); θ_g в устойчивом процессе; $\bar{\tau}$ – величина временного запаздывания в устойчивом процессе; $\bar{p}$ – давление в камере сгорания в устойчивом процессе; τp^{γ} – постоянно для некоторого числа γ; $\delta = \bar{\tau}/\theta_g$; p_1 – давление подачи топлива; ς – длина участка для поддержания постоянного давления; J – инерционный параметр трубопровода; E – параметр эластичности трубопровода.

В качестве управления выбрано

$$u = \frac{p_0 - p_1}{2\Delta p}$$

и следующие значения параметров: $\gamma = 0.8$, $\varsigma = 0.5$, $\delta = 1$, $J = 2$, $P = 1$, $E = 1$.

При выбранных значениях параметров и управления система (1) принимает вид для $x(t) = (\varphi(t), \mu_1(t), \mu(t), \psi(t))$:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \\ + \begin{bmatrix} -0.8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t-1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \qquad (2)$$

Разомкнутая система (2) имеет два корня с положительной действительной частью:

$$\lambda_{1,2} = 0.11255 \pm 1.52015i$$

и, следовательно, является неустойчивой.

Задача состоит в построении управления с обратной связью

$$u[t, x, x(t+s)] = Cx + \int_{-\tau}^{0} \mathrm{E}(s)x(t+s)ds\,, \qquad (3)$$

стабилизирующего систему (2).

Для рассматриваемой задачи представлены три варианта управлений с обратной связью, основанные на методологии аналитического конструирования регуляторов для систем с последействием [2–4]. При этом стабилизирующее управление имеет структуру

$$u^0[t, x, x(t+s)] = \\ = -N^{-1}B^T[Px + \int_{-\tau}^{0} D(s)x(t+s)ds], \qquad (4)$$

где P – решение классического алгебраического уравнения Риккати или специального экспоненциального матричного уравнения, а тройка $P, D(s)$, $R(s, v)$, $(s, v) \in [-\tau, 0]\times[-\tau, 0]$, является решением системы обобщенных уравнений Риккати [4].

Для расчета параметров стабилизирующих управлений и исследования оптимальных режимов процесса разработан специальный пакет прикладных программ.

Работа выполнена при поддержке программы президиума РАН «Фундаментальные науки – медицине», РФФИ (проекты 08-0100141 и 10-01-00377) и Уралосибирского междисциплинарного проекта.

Список литературы

1. Crocco L. Aspects of combustion stability in liquid propellant rocket motors. Part I. Fundamentals – Low frequency instability with monopropellants // J. Amer. Rocket Soc. 1951. Vol. 21, No. 6. P. 163–176.

2. Красовский Н.Н. Аналитическое конструирование регуляторов для систем с последействием // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26. С. 39–51.

3. Kim A.V. et al. Explicit numerical methods and LQR control algorithms for time-delay systems // Proc. of the Intern. Conf. on Electrical Engineering. Kyungju, Korea, July 21–25, 1998.

4. Квон В.Х. и др. Аналитическое конструирование и синтез регуляторов для систем с последействием. Екатеринбург: Изд-во Уральск. федер. ун-та, 2010.

LINEAR QUADRATIC STABILIZATION IN LIQUID-PROPELLANT ROCKET ENGINE

A.V. Kim, L.E. Volokhova, D.E. Zavodnikov

The report presents algorithms of synthesis of stabilizing feedback control equations in the problem of control of combustion in a liquid-propellant rocket engine, represented as a system of differential equations with delay.

Keywords: rocket engine, stabilization, feedback control.

УДК 531.46

ТРЕХМЕРНЫЕ МОДЕЛИ ТРЕНИЯ

А.А. Киреенков

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

kireenk@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Предлагается обобщение двухмерной модели трения скольжения и верчения В.Ф. Журавлева, позволяющее учесть динамическую связь компонентов, определяющих силовое состояние трущихся тел в условиях комбинированной кинематики. Процедура построения моделей состоит в замене точных интегральных представлений для силы и момента трения соответствующими разложениями Паде.

Ключевые слова: поликомпонентные модели комбинированного сухого трения, разложения Паде.

О моделях трения

Известно, что в случае комбинированной кинематики, когда трущиеся тела участвуют одновременно в движениях скольжения и верчения, закон Кулона нарушается и закон трения претерпевает существенные изменения. Одна из первых попыток описать взаимосвязь трения скольжения и верчения в случае неточечного контакта движущихся тел была предпринята П. Контенсу [1]. Принципиально новое развитие теории было дано В.Ф. Журавлевым в [2]. Им были получены точные аналитические выражения для силы и момента трения в элементарных функциях для круговых площадок контакта, а для удобства использования этих функций в задачах динамики построены их аппроксимации Паде.

Удобство использования аппроксимаций Паде, позволяющее описывать эффекты комбинированного сухого трения для всего диапазона угловых и линейных скоростей, привело к созданию принципиально новых моделей трения на их основе. Для формализации развиваемой теории в зависимости от числа кинематических параметров, определяющих силовое состояние, в [3] было введено понятие размерности модели сухого трения, а в зависимости от порядка используемых Паде-аппроксимаций – понятие порядка модели. Например, для круговых площадок контакта с центрально-симметричным распределением контактных напряжений два силовых фактора – сила трения, направленная против скорости скольжения, и момент – зависят от двух кинематических факторов: угловой и линейной скоростей – это двухмерная модель трения верчения и скольжения В.Ф. Журавлева. Двухмерная модель трения была построены в предположении справедливости закона Кулона в дифференциальной форме для маленького элемента площади внутри пятна контакта. Ее обобщение на случай использования более реальной характеристики трения было дано в [4], где было показано, что в случае комбинированной кинематики использование обобщенной дифференциальной формы закона Кулона приводит к качественно новым свойствам зависимости силы трения от скоростей скольжения и верчения, но не изменяет размерность модели. Последующие исследования [5], показали, что в случае комбинированной кинематики из-за перекоса симметричной диаграммы распределения нормальных контактных напряжений возникает динамическая связь компонентов, определяющих силовое состояние трущихся тел.

Предлагаемое обобщение двумерной модели трения позволяет учесть динамическую связь компонентов, одновременно принимая во внимание представления о распределении нормальных контактных напряжений, хорошо согласуемых с результатами в области теории упругости [6], и обобщенную дифференциальную форму закона Кулона [4].

Связанные модели трения верчения и скольжения

Связанная модель трения верчения и скольжения для круговых площадок контакта трущихся тел строится в предположении справедливости закона Кулона в обобщенной дифференциальной форме для маленького элемента площади внутри пятна контакта [4]. Интегрирование дифференциалов силы и момента трения дает интегральную модель трения верчения и скольжения. Для учета результатов теории упругости [6] предполагается, что в покое распределение нормальных контактных напряжении σ_0 удовлетворяет свойству центральной симметрии: $\sigma_0 = \sigma_0(r)$, где r – радиус-вектор, проведенный из центра пятна контакта, а при наличии движения происходит смещение симметричной диаграммы распределений по направлению мгновенной скорости проскальзывания. Эти общие свойства распределений нормальных контактных напряжений позволяют представить соответствующую функцию в виде $\sigma(x, y) = \sigma_0(1 + kx/R)$, где x – ось прямоугольной системы координат с началом в центре пятна контакта, направленная по направлению мгновенного проскальзывания, а R – радиус пятна контакта. Коэффициент k определяет динамическую связь компонентов, характеризующих силовое состояние внутри пятна контакта, и вычисляется по формуле: $k = 3s/R$, где s – величина смещение центра тяжести пятна контакта по направлению оси x. С другой стороны, величина s может быть определена из равенства моментов сил, параллельных плоскости скольжения, и моментов сил, перпендикулярных ей [5]. Предположение, что, кроме сил трения и нормальной реакции, другие силы отсутствуют, дает: $s = F_{||}h/N$, где N – сила, сдавливающая трущиеся поверхности, h – высота центра тяжести движущегося тела относительно плоскости скольжения, а $F_{||}$ – компонента силы трения, направленная против скорости скольжения (направление оси x).

Из-за нарушения в симметрии распределения нормальных контактных напряжений появляется нормальная составляющая силы трения $F_\perp$. Таким образом, модель трения становится трехмерной. Она может рассматриваться как первое приближение к реальному закону трения в условиях комбинированной кинематики (одновременное скольжение и верчение), если считать нулевым приближением двухмерную модель трения. (Ранее было показано, что все дальнейшие упрощения двумерной модели нарушают соответствие теории и эксперимента [7].) Точная трехмерная интегральная модель дает хорошее описание эффектов комбинированного сухого трения, но неудобна при решении задач динамики, так как требует вычисления кратных интегралов в правых частях дифференциальных уравнений движения. Избежать этой трудоемкой процедуры позволяет замена точных интегральных выражений соответствующими разложениями Паде. В результате трехмерные модели трения первого и второго порядка имеют вид:

$$F_{||} = F_0\left(\frac{v}{v+au} + 2\pi((\mu_1 v^3 - \mu_2 v)I_1 + 2\mu_1 v u^2 I_3)\right),$$

$$F_\perp = \frac{\mu F_0 u v}{(u+bv)(v+au)}, \quad \frac{1}{a} = \frac{u}{F_0}\frac{\partial F_{||}}{\partial v}\bigg|_{v=0}, \qquad (1)$$

$$M_C = M_0\left(\frac{u}{u+mv} + 2\pi((2\mu_1 v^2 - \mu_2)uI_3 + \mu_1 u^3 I_5)\right),$$

$$\frac{1}{m} = \frac{v}{M_0}\frac{\partial M_C}{\partial u}\bigg|_{u=0}, \quad \frac{1}{b} = \frac{v}{\mu F_0}\frac{\partial F_\perp}{\partial u}\bigg|_{u=0},$$

$$M_C = M_0\left(\frac{u^2+muv}{v^2+muv+u^2} + \right.$$

$$\left. + 2\pi((2\mu_1 v^2 - \mu_2)uI_3 + \mu_1 u^3 I_5)\right),$$

$$F_{||} = F_0\left(\frac{v^2+auv}{v^2+auv+u^2} + \right.$$

$$\left. + 2\pi((\mu_1 v^3 - \mu_2 v)I_1 + 2\mu_1 v u^2 I_3)\right), \qquad (2)$$

$$F_\perp = \frac{\mu F_0 u v}{(u+bu)(v+u/a)}, \quad a = \frac{u}{F_0}\frac{\partial F_{||}}{\partial v}\bigg|_{v=0},$$

$$\frac{1}{b} = \frac{v}{\mu F_0}\frac{\partial F_\perp}{\partial u}\bigg|_{u=0}, \quad m = \frac{v}{M_0}\frac{\partial M_C}{\partial u}\bigg|_{u=0}.$$

Здесь $F_\perp$ – нормальная составляющая силы трения, M_C – момент сил трения, F_0 и M_0 – сила и момент трения покоя, $u = \omega R$ – угловая скорость вращения центра пятна контакта, а μ_1 и μ_2 – коэффициенты, определяющие нелинейность коэффициента трения. Коэффициенты I_1, I_3, I_5 полиномиальных членов в формулах (1) представляют собой первые моменты распределения нормальных контактных напряжений соответственно первого, третьего и пятого порядков. Они, так же как и коэффициенты Паде разложений, могут быть вычислены в элементарных функциях для большинства используемых моделей распределения нормальных контактных напряжений [4]. При решении реальных задач коэффициенты моделей (1), (2) могут быть определены из эксперимента, и, следовательно, модели (1), (2) могут интерпретироваться как феноменологические трехмерные модели трения первого и второго порядка.

Список литературы

1. Контенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60–77.

2. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 5. С. 762–767.

3. Журавлев В.Ф., Киреенков А.А. О разложениях Паде в задаче о двумерном кулоновом трении // Изв. РАН. МТТ. 2005. №2. С. 3–13.

4. Киреенков А.А. Обобщенная двумерная модель трения скольжения и верчения // Докл. РАН. 2010. Т. 431, № 4. С. 482–486.

5. Иванов А.П. Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении твердого тела // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 2. С. 189–203.

6. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.

7. Киреенков А.А, Семендяев С.В., Филатов В.Ф. Экспериментальное исследование связанных двумерных моделей трения скольжения и верчения // Изв. РАН. МТТ. 2010. №6. С. 192–202.

THREE-DIMENSIONAL FRICTION MODELS

A.A. Kireenkov

A generalization of Zhuravlev's two-dimensional model of the sliding and spinning friction is presented which permits to take into account both the dynamics coupling of the components defining force state and the more realistic representations of dry friction characteristics and the normal contact stress distributions in the case of combined kinematics. The procedure of constructing the model consists in replacing of the exact integral expressions for dry friction force and torque by appropriate Pade expansions.

Keywords: polycomponents models of the combined dry friction, Pade expansions.

УДК 517.944

ПОСТРОЕНИЕ СЛАБЫХ РАЗРЫВОВ РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТИ

В.А. Корнеев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Korneev @ipmnet.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Исследованы негладкие решения системы уравнений Эйлера – Лагранжа, соответствующей вариационной задаче с несколькими искомыми функциями многих переменных и квадратичным функционалом. Распространение слабых разрывов описывается уравнениями метода сингулярных характеристик, развитого в работах А.А. Меликяна. Изучено возникновение и взаимодействие слабых разрывов решения, инициированных негладкими начальными условиями.

Ключевые слова: вариационное исчисление, негладкие решения, метод сингулярных характеристик.

1. Вариационная задача в области

Рассматривается вариационная задача в области

$$J = \int_G F(x,u(x).p(x))dx \to \text{extr},$$

$$p = \frac{\partial u}{\partial x},\ u(x): G \to R^N, \tag{1.1}$$

$$x \in G \subset R^n, B[u(x)]_{x\in\partial G} = 0$$

на множестве пар $(u^*(x), G_*)$, в которых непрерывные функции определены и дважды кусочно-непрерывно дифференцируемы в области G_*. Для краткости это будем обозначать как $u^*(x) \in \in PC^2(G_*)$. Область G_* своя для каждой функции. Конкретный вид граничных условий

$$B[u(x)]_{x\in\partial \mathrm{G}} = 0$$

зависит от типа задачи и включает задание на различных частях границы значений самой функции или ее частных производных. Эта задача с нефиксированной (варьируемой) границей.

2. Обобщение условий Вейерштрасса – Эрдмана

Теорема. П*усть пара* $(u(x), G)$ – *решение задачи* (1.1) *и гладкая поверхность* $\Gamma \subset G$ *делит область* G *на две открытые подобласти* G^+, G^-: $G = G^+ + G^- + \Gamma$. *Пусть* $u(x) \in C(G) \cup \cup C^2(G^{\pm})$, *а ее градиент терпит разрыв на* Γ, *причем* m_0 *первых компонент и имеют излом на* Γ, *остальные компоненты гладкие. Тогда на* Γ *выполнены обобщенные условия Вейерштрасса – Эрдмана*

$$\begin{cases} F(x,u.p) - F(x,u.p) - \sum_{\alpha=1}^{m_0} < F_{q_\alpha}, p_\alpha - q_\alpha >= 0, \\ < F_{p_\alpha} - F_{q_\alpha}, p_\alpha - q_\alpha > = 0,\ \alpha = 1,..., m_0, \\ < F_{p_\alpha} - F_{q_\alpha}, p_1 - q_1 > = 0,\ \alpha = m_0 + 1,..., N. \end{cases}$$

3. Слабый разрыв одной компоненты и численное построение решения

Лемма 1. Пусть в задаче (1.1) функция $F(x, u.p)$ имеет вид

$$F(x,u.p) = E(x,u.p_1) + I(x,u.\overline{p}),$$
$$\overline{p} = (p_2,..., p_n). \tag{3.1}$$

Пара $u(x)$, G есть решение задачи (1.1), причем функция $u(x)$ кусочно-гладкая. Предположим, что существует гладкая поверхность $\Gamma \subset G$, разделяющая область G на две открытые подобласти G^+, G: $G = G^+ + G + \Gamma$ (рис. 1). Пусть далее функция $u(x)$ непрерывна в области G и дважды гладкая в каждой из областей G^+, G^-, а ее градиент терпит разрыв на Γ, причем только первая компонента u имеет излом на кривой Γ, а остальные компоненты гладкие.

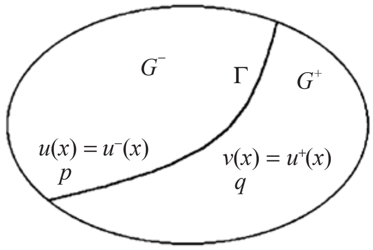


Рис. 1

Предполагаем также, что одна из ветвей решения u^+ (обозначаемая далее $v(x)$, $q = \nabla v(x)$)

может быть найдена до построения Γ, а для построения другой ветви u^- (обозначаемой далее $u(x)$, $p = \nabla u(x)$) требуется знание поверхности Γ. Тогда на Γ обобщенные условия Вейерштрасса – Эрдмана определяют многообразие $W_3 \subset R^{n+nN+N}$ коразмерности 3:

$$W_3 : H(x,w,r)=0, \quad R(x,w,r)=\{F_1 H\}=0, \quad F_1(x,w)=0, \quad w=u_1, \ r=p_1. \qquad (3.2)$$

Поверхность Γ строится интегрированием системы сингулярных характеристик:

$$\dot{x} = H_r, \quad w = <r, H_r>,$$

$$\dot{r} = -H_x - rH_w - \frac{\{\{HF_1\}H\}}{\{\{F_1 H\}F_1\}}(r - q_1(x)). \qquad (3.3)$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1, а функция $F(x, u.p)$ квадратична по p и имеет вид

$$F(x,u.p) = \sum_{\alpha=1}^{N} F_\alpha(x,u.p_\alpha) = =\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} <A_\alpha(x,u)p_\alpha, p_\alpha>, \quad u=\{u_1,...,u_N\}. \qquad (3.4)$$

Рассмотрим двумерную задачу в области $G = \{x, y : |x| < l, |y| < T\}$, когда

$$A_\alpha(x,u) = \begin{pmatrix} -c^2(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (3.5)$$

а начальные условия имеют вид

$$u(x,0) = \Phi(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = \Psi(x), \quad u(-l, y) = u(l, y) = 0. \qquad (3.6)$$

Компоненты вектор-функций $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ гладкие, за исключением первых $\varphi(x) = \Phi_1(x)$, $\phi(x) = \Psi_1(x)$; $\varphi(x)$, $\phi(x)$ дифференцируемы всюду кроме точки $x = 0$, где $\varphi(x)$ может иметь угловую точку, а $\phi(x)$ – разрыв первого рода. Тогда негладкость начальных условий может приводить к возникновению двух слабых волн.

Введем обозначения $\alpha_i = c_i^2(w, u_2(x, y), ..., u_N(x, y)), i = 1, 2$. Уравнения Эйлера для двумерного случая $n = 2$ имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \alpha_1 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial u_1}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \\ \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial u_2}\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\dfrac{\partial u_2}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial u_1}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2, \\ \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \alpha_2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial u_2}\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \\ \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial u_1}\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\dfrac{\partial u_2}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial u_2}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2. \end{cases} \qquad (3.7)$$

Было построено решение задачи (1.1), (3.4)–(3.7) при $N = 2$. Расчеты проводились для функций

$$\alpha_i(u_1, u_2) = \varepsilon_{i1}\cos^2 u_1 + \varepsilon_{i2}\sin^2 u_1 + + \varepsilon_{i3}\cos^2 u_2 + \varepsilon_{i4}\sin^2 u_2, \ i = 1, 2,$$

с различными значениями ε_{ij} ($i = 1, 2$, $j = 1, ..., 4$) и различными функциями $\varphi_i(x)$, $\phi_i(x)$, $i = 1, 2$ в граничных условиях:

$$u_i(x,0) = \varphi_i(x), \quad \partial u_i(x,0)/\partial y = \phi_i(x), \quad u_i(-l,0) = u_i(l,0), \quad i = 1, 2.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 11-01-00472-а.

Список литературы

1. Корнеев В.А., Меликян А.А. Построение слабых разрывов решения вариационной задачи в области // Изв. РАН. ТиСУ. 2003. №1. С. 47–60.

2. Корнеев В.А., Меликян А.А. Численное исследование слабых волн в решении вариационного волнового уравнения // Изв. РАН. ТиСУ. 2005, №1. С. 63–74.

3. Корнеев В.А., Королев С.Л., Меликян А.А. Исследование поведения слабых волн в решении векторного вариационного волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, №9. С. 1237–1248.

THE CONSRUCTION OF NONSMOOTH SOLUTIONS TO THE MULTIPLE INTEGRAL VARIATIONAL PROBLEM

V.A. Korneev

Non-smooth solutions of Euler – Lagrange equations corresponding to variational problems with several unknown functions of several variables and quadratic functional are studied. Propagation of weak discontinuities is described by equations of the method of singular characteristics, developed by A.A. Melikyan. The occurrence and interaction of weak discontinuities of solutions initiated by non-smooth initial conditions are studied. The proposed methodology allows us to study the propagation and interaction of weak waves.

Keywords: variational calculus of variations, nonsmooth solutions, method of singular characteristics.

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ДЕФОРМИРОВАННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Д.А. Красноруцкий, В.Е. Левин, Н.В. Пустовой

Новосибирский государственный технический университет

levin@craft.nstu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматриваются колебания гибкого упругого пространственного криволинейного стержня, сильно изменившего свою первоначальную форму под действием приложенной нагрузки. Разработаны и протестированы расчетные алгоритмы. Приведены результаты решения некоторых задач.

Ключевые слова: колебания стерней, предварительно деформированный, собственные частоты, большие перемещения, нелинейная динамика.

Постановка задачи

При выводе уравнений, описывающих большие перемещения и повороты гибкого пространственного криволинейного стержня, принимаются стандартные допущения в рамках гипотезы Бернулли [1, 2]. Радиус-вектор точки осевой линии стержня задан в виде $\mathbf{r}(s) = x_k(s)\mathbf{i}_k$, $k = 1, 2, 3$, где s – естественная координата – длина вдоль кривой, $\mathbf{i}_k$ – орты глобальной системы координат. С каждой точкой пространственной кривой связана тройка ортов $\mathbf{e}_j(s) = \beta_{jk}(s)\mathbf{i}_k$, где $\mathbf{e}_3$ направлен по касательной к осевой линии, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ направлены вдоль главных осей инерции сечения, $\beta_{jk}(s)$ – матрица поворота, определяется геометрией исходного стержня. После деформирования тройки векторов $\mathbf{e}_k(s)$, $\mathbf{i}_k$ перейдут соответственно в $\mathbf{e}^*_k(s)$, $\mathbf{i}^*_k(s)$. Формулы связи векторов:

$$\mathbf{i}^*_j = \lambda_{jk}\mathbf{i}_k, \quad \mathbf{e}^*_j = \beta_{jk}\mathbf{i}^*_k = \beta_{jk}\lambda_{kn}\mathbf{i}_n,$$

здесь $\lambda_{jk}(s)$ – матрица поворота. Для описания поворота используется вектор конечного поворота [3]. Его направление определяет ось вращения, а длина вектора равна углу поворота. Такое описание не накладывает никаких ограничений на величину поворота.

Кривизны и кручение осевой линии выражаются через векторы $\mathbf{e}_k$ и их производные. В силу свойств матриц λ_{jk} и β_{jk}, в выражения для приращений кривизн не входят слагаемые, содержащие начальную кривизну осевой линии, что позволяет рассматривать стержни с произвольной геометрий, например с изломами и скачками кривизны.

Деформирование стержня под действием приложенной нагрузки описывается системой 12 нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно глобальных проекций векторов перемещений, конечного поворота, внутренних сил и моментов: $X_{,s} = f(s, X)$, где нижний индекс после запятой означает дифференцирование по этой переменной; $X = (U_{1,2,3}, \omega_{1,2,3}, Q_{1,2,3}, M_{1,2,3})^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец искомых функций. Краевые условия определяют шесть функций при $s = 0$ и шесть функций при $s = l$.

Для вывода уравнений малых колебаний предварительно деформированного стержня рассматривается близкое к деформированному равновесное состояние $\Delta X = (\Delta U_{1,2,3}, \Delta\omega_{1,2,3}, \Delta Q_{1,2,3}, \Delta M_{1,2,3})^{\mathrm{T}}$, обусловленное колебаниями. Решение разыскивается в виде функций с множителем $\exp(i\Omega t)$. В итоге получается система 12 линейных дифференциальных уравнений для амплитуд малых колебаний $Y_{,s} = F(s, Y, \Omega, X)$, в которую входит деформированное состояние X, найденное из решения нелинейной краевой задачи. Параметр Ω – искомая частота малых колебаний. К системе добавляются краевые условия.

Метод решения

Для решения поставленной задачи о статическом деформировании используется итерационный метод Ньютона [4], который сводит решение нелинейной краевой задачи к решению последовательности линейных краевых задач, которые решаются методом конечных разностей.

Систему дифференциальных уравнений для амплитуд малых колебаний можно представить в матричном виде: $Y_{,s} = [E - \Omega^2 K]Y$, где $Y = (\Delta U^A_{1,2,3}, \Delta\omega^A_{1,2,3}, \Delta Q^A_{1,2,3}, \Delta M^A_{1,2,3})^{\mathrm{T}}$ – вектор неизвестных функций-амплитуд малых колебаний; $E(s, X)$, $F(s, X)$ – матрицы-функции 12×12.

После этого применяется метод конечных разностей [4]: интервал разбивается на N отрезков, значения 12 функций разыскиваются в $(N + 1)$ точке. Уравнения малых колебаний удовлетворяются в N точках – серединах каждого отрезка. Краевые условия также записываются в матричном виде и представляют собой 12 уравнений. Таким образом, задача сводится к обобщенной проблеме собственных значений $([A]-\Omega[B])=0$, где $[A]$, $[B]$ – квадратные матрицы специального вида, размерностью $12(N+1)$. Обобщенная проблема решается с помощью стандартной подпрограммы FORTRAN.

Примеры расчета

Рассматривается постановка задачи [5, 6]: изначально прямой шарнирно-опертый (или защемленный) стержень круглого поперечного сечения под действием осевой силы теряет устойчивость и приобретает дугообразную форму. После этого к нему прикладывается крутящий момент в плоскости, перпендикулярной к недеформированной оси стержня (рис. 1), стержень приобретает существенно пространственную конфигурацию.

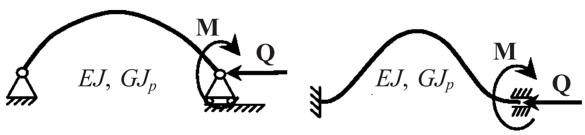


Рис. 1

По результатам расчетов деформированных конфигураций стержня для разных крутящих моментов были построены кривые деформирования, которые практически совпали с кривыми [5, 6]. Так же проводился расчет малых колебаний деформированных конфигураций. По частотам можно судить о статической устойчивости достигнутой конфигурации. При анализе частот и форм были найдены критические моменты, а также зависимости критических моментов от соотношения изгибной и крутильной жесткостей.

Разработанный алгоритм был применен к расчету весьма длинных стержней-тросов. Изначально прямой стержень, нагруженный весовой нагрузкой, деформируется перемещением опоры на заданные расстояния, затем к нему прикладывается аэродинамическая нагрузка и находится равновесная конфигурация в потоке. После этого находятся частоты и формы малых колебаний стержня-троса относительно этой конфигурации. Расчетные схемы взяты из [2, 7], где трос представлен моделью нити. В результате сравнения сделан вывод о влиянии изгибных жесткостей на частоты и формы колебаний.

Работа выполнена при поддержке гранта РНП.2.1.2./10114.

Список литературы

1. Левин В.Е., Пустовой Н.В. Механика деформирования криволинейных стержней: Монография. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008. 208 с.
2. Светлицкий В.А. Механика абсолютно гибких стержней. М.: Изд-во МАИ, 2001. 432 с.
3. Аргирис Дж. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц. М.: Изд-во лит-ры по стр-ву, 1968. 242 с.
4. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 312 с.
5. Лось М.В., Орданович А.Е. // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1994. №5. С. 48–54.
6. Лось М.В., Орданович А.Е. // Вестник МГУ. Сер.1. Математика, механика. 1998. №3. С. 62–65.
7. Соколов А.И. Нелинейные колебания абсолютно гибкого провода в потоке воздуха // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2008. №4 (http://technomag.edu.ru/doc/87224.html)

VIBRATIONS OF PRELIMINARY DEFORMED RODS

D.A. Krasnorutskiy, V.E. Levin, N.V. Pustovoy

Vibrations of flexible elastic rods preliminary deformed under applied loads are considered. Calculation algorithms are developed and successfully tested. Numerical results of solutions of some problems are presented.

Keywords: vibrations of rods, preliminary deformed, natural frequencies, big displacements, nonlinear dynamics.

УДК 531.1

НЕКОММУТАТИВНЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ТОЧКИ И ИХ ПРОЯВЛЕНИЯ В ОСОБЕННОСТЯХ ПОСТРОЕНИЯ БЕСПЛАТФОРМЕННЫХ СИСТЕМ ОРИЕНТАЦИИ НА ЛАЗЕРНЫХ И ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИХ ГИРОСКОПАХ

Н.И. Кробка

НИИ прикладной механики им. В.И. Кузнецова – филиал Центра эксплуатации объектов космической инфраструктуры, Москва

KrobkaNick@msn.com

Поступила в редакцию 16.05.2011

Представлены некоммутативные кинематические эффекты вращения твердого тела вокруг точки, замеченные автором (за период 1980–2010 годов) в процессе исследований и разработок бесплатформенных инерциальных систем ориентации и бесплатформенных инерциальных навигационных систем на лазерных гироскопах и волоконно-оптических гироскопах, а также при выяснении физического эффекта, препятствующего интегрируемости в квадратурах кинематических уравнений.

Ключевые слова: твердое тело, вращение, некоммутативность, кинематические уравнения, интегрируемость, бесплатформенная инерциальная система, лазерный гироскоп, волоконно-оптический гироскоп.

Модель твердого тела (ТТ), вращающегося вокруг точки, – одна из центральных в теории бесплатформенных инерциальных систем ориентации (БИСО) и бесплатформенных инерциальных навигационных систем (БИНС). В кинематике вращений ТТ вокруг точки [1, 2] некоммутативность проявляется во многих наблюдаемых эффектах. Известна некоммутативность конечных поворотов [3], ТТ может поворачиваться вокруг оси в случае, если проекция вектора угловой скорости (ВУС) на эту ось строго равна нулю (теорема А.Ю. Ишлинского «О телесном угле» [4, 5] и ее обобщения [6]). В процессе исследований и разработок БИСО и БИНС на лазерных гироскопах (ЛГ) и волоконно-оптических гироскопах (ВОГ) автором были замечены (за период 1980–2010 годов) некоммутативные кинематические эффекты (НКЭ), не сводящиеся к ранее известным эффектам [7–19]. Множество этих НКЭ представлено в систематизированном виде.

Классификация некоммутативных кинематических эффектов

Решения кинематических уравнений (КУ) представляются сходящимися рядами последовательных приближений (РПП). НКЭ называется НКЭ N-го порядка, если для его обнаружения необходимо N приближений РПП, т.е. учет членов РПП $n \in [1, N-1]$ не обнаруживает НКЭ N-го порядка [14, 18]. НКЭ N-го порядка не сводятся к НКЭ более низких порядков. Неголономные ошибки [4, 5] (топологические фазы [20]) – это НКЭ второго порядка ($N = 2$). Пример НКЭ произвольного N-го порядка: проекции ВУС – производные $(N-1)$-го порядка от белых шумов (и иных стационарных процессов), при этом угол эйлерова поворота (УЭП) возрастает во времени, но учесть рост УЭП можно только в N-м приближении РПП решений КУ [18].

Проблема интегрируемости кинематических уравнений в квадратурах

На основании симметрии КУ Эйлера – Пуассона [16]: «неподвижный/вращающийся наблюдатель – вращение вправо/влево» угловая ориентация ТТ в общем случае произвольно изменяющегося во времени и в пространстве ВУС выражена в конечном виде в терминах проекций ВУС и вектора углового ускорения на оси связанной и неподвижной систем координат (СК) [15, 16]. Если заданы проекции ВУС только в связанной или в неподвижной СК, решения КУ в общем случае в квадратурах не известны. Препятствием интегрируемости КУ является НКЭ 3-го порядка – асимметрия вращения вправо и влево. Вращения, отличающиеся знаком («+» и «–») проекций ВУС, асимметричны (в случае и только в случае некомпланарного ВУС в связанной либо в неподвижной СК) – УЭП вращений вправо и влево (s_+ и s_-) не совпадают при вращения вокруг точки ($s_+ \neq s_-$) в отличие от вращения вокруг оси. Этот НКЭ препятствует интегрируемости КУ в прямом смысле: если бы не было асимметрии вращений вправо и влево, то КУ интегрировались бы в квадратурах. Асимметрия вращений ТТ вправо и влево демонстрируется парами последовательностей конечных поворотов, моделирующих вращения с некомпланарным ВУС [18]:

$$\mathbf{e}_1(\pm\pi/2)\to\mathbf{e}_2(\pm\pi/2)\to\mathbf{e}_3(\pm\pi/2)\to \to\mathbf{e}_2(\pm\pi/2)\to\mathbf{e}_3(\pm\pi)\Rightarrow s_+\neq s_-, \quad (1)$$

$$\mathbf{i}_1(\pm\pi/2)\to\mathbf{i}_2(\pm\pi/2)\to\mathbf{i}_3(\pm\pi/2)\to \to\mathbf{i}_2(\pm\pi/2)\to\mathbf{i}_3(\pm\pi)\Rightarrow s_+\neq s_-. \quad (2)$$

$\mathbf{e}_k(\varphi)$ – поворот на угол φ вокруг оси $\mathbf{e}_k$ связанной СК, $\mathbf{i}_n(\varphi)$ – вокруг оси $\mathbf{i}_n$ ($k, n = 1, 2, 3$) неподвижной СК.

Прикладные аспекты

Обсуждаются строгие КУ ошибок БИСО и теория возмущений их решений. Комментируются НКЭ первого и второго порядка, проявляющиеся в закономерностях накопления во времени ошибок БИСО [8–12], в процессе калибровки трехосных ЛГ с одним общим вибратором и на реверсивно вращающемся основании [11–14, 19], а также особенности БИСО на основе многоосных ВОГ с одним общим источником излучения [17] и особенности калибровки БИСО при вибрационных испытаниях.

Список литературы

1. Euler L. Découverte d'un nouveau principe de mécanique // Mem. Acad. Sc. Berlin. 1752. V. 6. P. 185–217.

2. Poisson S. D. Traité de mécanique. V. 2. Paris: Bachelier, Imprimeur-Librairepour les math, 1833. 782 p.

3. Rodrigues O. Des lois géométriques qui regissent les deplacements d'un systeme solide dans l'espace, et de la variation des coordonnees provenant de ses deplacements consideres independamment des causes qui peuvent les produire // J. Math. Pures. Appl. 1840. Vol. 5. P. 380–440.

4. Ишлинский А.Ю. Механика специальных гироскопических систем. Киев: АН УССР, 1952. 432 с.

5. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.

6. Жбанов Ю.К., Журавлев В.Ф. О некоторых свойствах конечных поворотов твердого тела при наличии неголономной связи // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 1. С. 9–14.

7. Кробка Н.И. Лазерные гироскопы и их применение в БИНС. Ч. I. М.: НИИ ПФ, 1981. 58 с.

8. Кробка Н.И., Свиридов М.В. О влиянии случайных возмущений угловой скорости на решение кинематической задачи // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. №1. С. 145–150.

9. Кробка Н.И., Свиридов М.В. Влияние случайной частотной подставки в кольцевом лазере на точность измерения вращения // Квантовая электроника. 1985. Т. 12. №2. С. 363–367.

10. Krobka N.I. Accurate error equations of the strapdown inertial navigation systems // The Second Soviet-Chinese Symposium on Inertial Technology, Saint Petersburg, 9–15 October, 1991.- SPb.: Central Scientific and Research Institute «Electropribor». 1992. P. 43–50.

11. Krobka N.I. Application features of three-axis laser gyros in strapdown inertial navigation systems / The IV Russian-Chinese Symposium on Inertial Technology, Saint Petersburg, 1993, September 27 October 1. SPb. 1993. P. 54–63.

12. Кробка Н.И. О некоммутативных кинематических эффектах и их проявлениях в трехосных лазерных гироскопах // Гироскопия и навигация. 1994. № 2. С. 88.

13. Кробка Н.И., Сапожников И.Н. Работы по лазерной гироскопии в научно-исследовательском институте прикладной механики имени акад. В.И. Кузнецова // I Санкт-Петербургская международная конференция по гироскопической технике, Санкт-Петербург, 25–26 мая 1994 г. СПб. 1994. С. 3–13.

14. Кробка Н.И. Некоммутативные кинематические эффекты и их особенности в лазерной гироскопии и бесплатформенной инерциальной навигации // II Санкт-Петербургская международная конференция по гироскопической технике и навигации, Санкт- Петербург, 24–25 мая 1995 г. Ч. I. СПб. 1995. С. 151.

15. Кробка Н.И. Об условиях интегрируемости кинематических уравнений Эйлера – Пуассона в квадратурах // V Санкт-Петербургская Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам, 25–27 мая 1998 г. СПб. 1998.С. 43–50.

16. Кробка Н.И. Решение кинематической задачи Эйлера // Гироскопия и навигация. 2005. №3. С. 105–122.

17. Кробка Н.И. Новый некоммутативный кинематический эффект и его проявления в бесплатформенных инерциальных системах ориентации на основе волоконно-оптических гироскопов // Гироскопия и навигация. 2009. №1. С. 36–51.

18. Кробка Н.И. Некоммутативные кинематические эффекты и закономерности накопления шумов волоконно-оптических гироскопов в бесплатформенных инерциальных системах ориентации // XVI Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Сб. материалов. Санкт-Петербург, 25–27 мая 2009 г. СПб. 2009. С. 69–72.

19. Кробка Н.И. Особенности калибровки трехосных лазерных гироскопов на одном общем вибраторе и на реверсивно вращающемся основании (30 и 20 лет спустя) // XVII Санкт-Петербургская Междунар. конф. по интегрированным навигационным системам, Санкт-Петербург, 31 мая – 02 июня 2010 г.: Сб. матер. СПб. 2010. С. 60–63.

20. Малыкин Г. Б., Харламов С. А. Топологическая фаза в классической механике // УФН. 2003. Т. 173, №9. С. 985–994.

AN EXPERIMENTAL-COMPUTATIONAL TECHNIQUE TO DETERMINE NATURAL FREQUENCIES OF A STRUCTURE

N.I. Krobka

Non-commutative kinematic effects of solid body rotation around a point, observed by the author (during the period from 1980 to 2010) in the process of research and development of strapdown inertial orientation systems and a strapdown inertial navigation system based on a laser gyro and fiber-optic gyros, as well as clarifying the physical effect of preventing the integrability in quadratures of the kinematic equations are presented.

Keywords: solid body, rotation, noncommutativity, the kinematic equations, integrability, strapdown inertial system, a laser gyroscope, fiber-optic gyroscope.

УДК 517.977

МЕТОДЫ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ОБРАЩЕНИЯ

А.В. Кряжимский[1], *В.И. Максимов*[2]

[1]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва
[2]Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

kryazhim@iiasa.ac.at

Поступила в редакцию 15.06.2011

Обсуждаются три типа задач – отслеживание управления, отслеживание траектории, а также управление динамической системой при наличии неконтролируемых возмущений. Приводятся алгоритмы решения указанных задач, устойчивые к информационным помехам и погрешностям вычислений. Алгоритмы, ориентированные на компьютерную реализацию, позволяют осуществлять процесс решения в режиме «реального» времени. Они адаптивно учитывают неточные измерения и являются регулирующими в том смысле, что конечный результат тем лучше, чем точнее поступающая информация. Основная цель исследования – показать, что для решения столь разных по своей структуре задач может быть использован единый подход, основанный на известном в теории гарантированного управления методе экстремального сдвига Н.Н. Красовского.

Ключевые слова: динамическое обращение, экстремальный сдвиг.

Для исследования трех довольно разных по своей природе задач – отслеживания эталонного движения, робастного управления и динамического восстановления входа – может быть использован единый подход, развитый в работах [1–3]. Суть обсуждаемых задач состоит в следующем. Рассматривается уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(u(t) - v(t)),$$
$$t \in T = [t_0, \vartheta], \qquad (1)$$

где $x \in R^n$ – фазовое пространство; $u, v \in R^k$; $x(t_0) = x_0$; B – $n\times k$-мерная матрица, функция f – липшицева по совокупности аргументов; $v(t)$ – помеха, $u(t)$ – управление.

На промежутке времени T фиксирована равномерная сетка $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^{m}$, $\tau_i = \tau_{i-1} + \delta$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_m = \vartheta$. Решение уравнения (1) $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot))$ зависит от изменяющегося во времени управления $u(\cdot)$ и неизвестного возмущения $v(\cdot)$. Функция $x(\cdot)$ также неизвестна. В моменты $\tau_i \in \Delta$ измеряется с ошибкой все фазовое состояние $x(\tau_i)$ системы (1) или его часть $x_1(\tau_i) \in R^l$ $(l < n)$. Результаты измерений – векторы $\xi_i^h \in R^n$ $(\psi_i^h \in R^l)$, $i \in [0 : m-1]$ – удовлетворяют неравенствам

$$|\xi_i^h - x(\tau_i)|_{R^n} \le h, \quad (|\psi_i^h - x_1(\tau_i)|_{R^l} \le h).$$

Здесь $h \in (0, 1)$ – величина информационной погрешности.

Задача отслеживания эталонного движения

Предполагается, что в правой части уравнения (1) $v = v(t) = 0$, $t \in T$. Задано число $\varepsilon > 0$. Имеется эталонное движение, которое описывается также уравнением вида (1), в котором, однако, $v \equiv 0$, а $u = u^*(t)$. При этом как функция $u^*(\cdot)$, так и решение эталонного уравнения $g(\cdot)$, неизвестны. Известно лишь, что $u^*(\cdot) \in L_2(T; R^k)$. В моменты $\tau_i \in \Delta$ наряду с $x(\tau_i)$ измеряется (с ошибкой) состояние $g(\tau_i)$. Результаты измерений неточны. Требуется указать алгоритм формирования по принципу обратной связи управления $u = u(\cdot)$ такой, что решение уравнения (1) останется при всех $t \in T$ в некоторой «ε-окрестности» эталонного движения.

Задача отслеживания эталонного управления

Пусть в правой части (1) управление равно нулю, то есть $u = u(t) = 0$, $t \in T$. Требуется построить динамический алгоритм, который позволяет восстановить неизвестный вход (возмущение) $v = v(\cdot)$ в «реальном времени».

Задача робастного управления

Пусть P и Q – фиксированные множества, $u(t) \in P$, $v(t) \in Q$. И пусть заданы два семейства замкнутых множеств: $(M_t)_{t\in T} \subset R^n$, $(N_t)_{t\in T} \subset R^n$, $M_t \subset N_t$, $\forall t \in T$. Требуется указать алгоритм формирования по принципу обратной связи управления $u = u(t, \psi_i^h) \in P$, $t \in T$. уравнением (1), обладающий следующими свойствами. Каково бы ни было возмущение $v(\cdot)$ ($v = v(t) \in Q$, $t \in T$), «рас–стояние» от фазового состояния $x(\tau) = x(\tau;\, t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot))$ в некоторый момент $\tau \le \vartheta$ до множества M_τ не должно превышать значения ε. При этом $x(t) \in N_t$, $t \in [0, \tau]$.

Для решения всех трех типов задач, описанных выше, может быть использован единый подход, основанный на методе вспомогательных позиционно-управляемых моделей. При этом законы выбора управлений в моделях основываются на тех или иных модификациях принципа экстремального сдвига. Метод экстремального сдвига – один из эффективнейших методов исследования задач управления по принципу обратной связи – был предложен Н.Н. Красовским [1]. В дальнейшем он широко применялся, в том числе и при исследовании задач игрового управления.

Приведем один из результатов, для простоты остановившись на случае, когда размерность управления (входа) и фазового вектора системы совпадают, т.е. $n = k$. Рассмотрим задачу отслеживания эталонного управления. В этом случае траектория системы зависит лишь от возмущения $v(\cdot)$. Задача состоит в построении алгоритма приближенного восстановления $v(\cdot)$, обладающего свойствами динамичности и устойчивости. Таким образом, необходимо сконструировать алгоритм приближенного вычисления управления $u^h(\cdot)$, играющего роль приближения $v(\cdot)$.

Возьмем некоторое семейство разбиений

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h},\ \tau_{h,0} = t_0,\ \tau_{h,m_h} = \vartheta,\ \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h)$$

отрезка T с шагом $\delta(h)$ и функцию

$$\alpha(h)\colon R^+ \to (0,1),\ R^+ = \{r \in R\colon r > 0\},$$

такие, что при $h \to 0$

$$\delta(h) \to 0, \quad \alpha(h) \to 0, \quad (h + \delta(h))/\alpha(h) \to 0. \quad (2)$$

Затем введем вспомогательную управляемую систему (ее часто называют моделью), описываемую линейным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot w^h(t) = f(\tau_{h,i}, \xi_i^h) - Bu^h(t), \quad t \in \delta_{h,i} = [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}),$$
$$i \in [0 : m-1] \quad (3)$$

с начальным условием $w^h(t_0) = x_0$.

До начала работы алгоритма фиксируем величину h и разбиение Δ_h. Работу алгоритма разобьем на $m - 1$ ($m = m_h$) однотипных шагов. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_{h,i}$, выполняются следующие операции. Сначала в момент τ_i вычисляется вектор

$$u_i^h = \operatorname{argmin}\{2(\xi_i^h - w^h(\tau_{h,i}), Bv) + \alpha|v|^2_{R^n} :$$
$$v \in R^n\} = -\frac{1}{\alpha} B'(\xi_i^h - w^h(\tau_{h,i})).$$

Здесь штрих означает транспонирование. Затем на вход системы (3) при $\tau \in \delta_{h,i}$ подается управление $u^h(t) = u_i^h$. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

Теорема. *Пусть матрица B является невырожденной. Пусть также выполнены условия* (2). *Тогда имеет место сходимость* $u^h(\cdot) \to v(\cdot)$ *в* $L_2(T;\, R^k)$ *при* $h \to 0$.

Если функция $v(\cdot)$ является функцией ограниченной вариации, то может быть выписана оценка скорости сходимости алгоритма.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 11-01-00042.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.

2. Osipov Ju.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995.

3. Maksimov V.I. Dynamical inverse problems of distributed systems. VSP, Utrecht, 2000.

EXTREMAL CONTROL METHODS AND DYNAMIC INVERSION PROBLEMS

A.V. Kryazhimskii, V.I. Maksimov

In the report, three types of problems (the control tracking problem, the trajectory tracking problem, and the control problem for a dynamical system under uncontrolled disturbances) are under discussion. Algorithms for solving the problems above, which are stable with respect to informational noises and computational errors, are suggested. The algorithms oriented to computer realization allow us to implement the solving process in «real time» mode. They adaptively take into account inaccurate measurements and are regularizing in the sense that the more precise is incoming information, the better is final result. The main goal of the report is to show that one integrated approach can be used to solve such different problems as ones above. This approach is based on the extremal shift method by N.N.Krasovskii, which is known in the theory of guaranteed control.

Keywords: dynamic inversion, extremal shift.

УДК 517.977.8

ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ В КЛАССЕ НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ПОЗИЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

Д.Р. Кувшинов

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

evetro.here@gmail.com

Поступила в редакцию 16.05.2011

Представлен численный алгоритм построения равновесных (и, в частности, неулучшаемых) по Нэшу решений неантагонистической позиционной дифференциальной игры двух лиц с терминальными показателями качества, геометрическими ограничениями на управления игроков и динамикой с разделяющейся по управлениям игроков правой частью. Формализация стратегий игроков и порождаемых ими движений основывается на формализации и результатах теории позиционных антагонистических дифференциальных игр, разработанной Н.Н. Красовским и его научной школой. Задача нахождения решений игры сводится к решению нестандартных задач оптимального управления. Численный алгоритм задействует ряд алгоритмов вычислительной геометрии.

Ключевые слова: неантагонистическая игра, дифференциальная игра, равновесное по Нэшу решение, численное решение.

Постановка задачи

Рассматривается позиционная дифференциальная игра двух лиц с фиксированным моментом окончания θ и динамикой вида

$$\dot{x} = f_1(t,x,u) + f_2(t,x,v), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $x \in \mathbf{R}^n$ – фазовый вектор, векторы u из компакта P – управление первого игрока, v из компакта Q – управление второго игрока. Пусть G – компактное подмножество $[t_0,\theta]\times\mathbf{R}^n$, содержащее позицию (t_0, x_0), такое, что все траектории системы, начавшиеся в произвольной позиции (t^*, x^*) из G, остаются в G при $t^* < t \le 0$. Пусть в G выполнены стандартные условия существования, единственности и продолжимости решения. Предположим также, что в любой позиции (t,x) из G множество $\{f_1(t,x,u)+f_2(t,x,v) \mid u\in P, v\in Q\}$ выпукло.

Пусть заданы непрерывные функции σ_i: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, множества уровня которых выпуклы. Показатели качества игроков заданы как

$$I_1 = \sigma_1(x(\theta)) \to \max_{u(\cdot)}, \quad I_2 = \sigma_2(x(\theta)) \to \max_{v(\cdot)}.$$

Оба игрока имеют полную информацию о текущей реализующейся позиции игры $(t,x(t))$. Используемая формализация стратегий игроков и порождаемых ими решений в неантагонистической игре опирается на формализацию, введенную для антагонистических позиционных дифференциальных игр в [1, 2], и подробно изложена в [3]. Чистая стратегия U (далее – *стратегия*) игрока 1 определяется как пара $\{u(t, x, \varepsilon), \beta_1(\varepsilon)\}$, где $u(t,x,\varepsilon)$ – произвольная функция позиции и положительного параметра точности ε, принимающая значения из P. Функция $\beta_1 : (0,\infty) \to (0,\infty)$ является непрерывной, монотонной и удовлетворяет условию $\beta_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Она имеет следующий смысл: при фиксированном ε величина $\beta_1(\varepsilon)$ служит ограничением сверху на шаг разбиения отрезка $[t_0, \theta]$, используемого игроком 1 при построении ломаных Эйлера. Стратегия V игрока 2 определяется аналогично, как пара $\{v(t, x, \varepsilon), \beta_2(\varepsilon)\}$.

В общем случае каждый игрок может выбрать свое значение параметра ε_i. Далее полагается согласованность движений: $\varepsilon_i = \varepsilon_i = \varepsilon$. При построении численных решений для обоих игроков выбирается общее разбиение временного отрезка $[t_0, \theta]$. Множество $X(t_0, x_0, U, V)$ движений $x(t; t_0, x_0, U, V)$, определяемых как равномерный предел ломаных Эйлера, непусто.

Определение 1. Пара стратегий (U^N, V^N) – *равновесное по Нэшу решение игры* (*N-решение*), если для любого движения $x^*(\cdot)$ из $X(t_0,x_0,U,V)$, любого τ из $[t_0,\theta)$ и любых стратегиях U и V выполнены неравенства (максимумы и минимумы берутся по соответствующим множествам движений)

$$\max \sigma_1(x(\theta;\tau,x^*(\tau),U,V^N)) \le$$
$$\le \min \sigma_1(x(\theta;\tau,x^*(\tau),U^N,V^N)),$$

$$\max \sigma_2(x(\theta;\tau,x^*(\tau),U^N,V)) \le$$
$$\le \min \sigma_2(x(\theta;\tau,x^*(\tau),U^N,V^N)).$$

Траектории, порожденные N-решениями, будем называть N-траекториями.

Задача 1. Построить аппроксимацию множества всех N-решений.

Определение 2. Пара стратегий (U^P, V^P) – *неулучшаемое равновесное по Нэшу решение игры* (P-решение), если при переходе от нее к любой другой паре стратегий, составляющей N-решение, строгое увеличение выигрыша одного из игроков возможно лишь при строгом уменьшении выигрыша другого. Траектории, порожденные P-решениями, будем называть P-траекториями.

Задача 2. Построить аппроксимацию множества всех P-решений.

Краткое описание алгоритма

Задача нахождения N-решений сводится к решению нестандартной задачи оптимального управления [3], которая формулируется так: найти допустимые программные управления обоих игроков такие, что вдоль порождаемой ими траектории оба игрока не ухудшают свой гарантированный выигрыш. При решении нестандартной задачи применяются известные процедуры построения максимальных стабильных мостов [4, 5] в некоторых вспомогательных играх сближения–уклонения, в качестве цели в которых используются множества уровня функций $\sigma_i(\cdot)$. Все пространственные множества аппроксимируются многогранниками. В ходе вычисления используется ряд алгоритмов вычислительной геометрии, в частности объединение и пересечение многогранников, что накладывает дополнительное ограничение $n < 4$.

Алгоритм построения аппроксимации множества концов всех N-траекторий (и, в частности, P-траекторий) возник как обобщение алгоритма построения решений Штакельберга [6]. Приведем краткое описание этого алгоритма. Он может быть представлен в виде внешнего и внутреннего циклов, перебирающих определенным образом значения выигрышей игроков. Для каждой фиксированной пары выигрышей находятся концы N-траекторий (если таковые существуют), доставляющие заданные выигрыши, при этом строится *множество незапрещенных позиций*, которое используется при восстановлении решения игры, порождающего N-траекторию, по заданному концу этой траектории. Управления игроков аппроксимируются кусочно-постоянными функциями времени.

Во внешнем цикле происходит одновременный перебор (в сторону увеличения) выигрышей игрока 1 и игрока 2, заканчивающийся, когда построенные участки границы множества концов N-траекторий пересекутся. Для каждого выбранного значения выигрыша игрока i производится максимизация выигрыша игрока $(3 - i)$ в рамках нестандартной задачи управления, при этом попутно находятся концы N-траекторий, на которых достигаются эти выигрыши.

При аппроксимации множества концов всех N-траекторий производится перебор выигрышей игрока $(3 - i)$ (в сторону уменьшения), начиная с найденного максимального значения. В процессе перебора находятся концы соответствующих N-траекторий.

Также возможен поиск только P-решений, менее затратный в смысле машинного времени и требуемого объема оперативной памяти. Более ранние результаты работы над описываемым алгоритмом отражены в [7, 8].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 09-01-00313.

Список литературы

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

2. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.

3. Клейменов А.Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993. 184 с.

4. Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В.С. Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр (материалы по мат. обеспечению ЭВМ). Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР. 1984. С. 127–158.

5. Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П. Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51 (2). С. 216–222.

6. Осипов С.И. О реализации алгоритма построения решений для класса иерархических игр Штакельберга // Автоматика и телемеханика. 2007. №11. С. 195–208.

7. Кувшинов Д.Р. Алгоритм численного построения решений по Нэшу в позиционной дифференциальной игре двух лиц // Вестник Удмуртского ун-та. 2009. №3 (Математика. Механика. Компьютерные науки). С. 81–90.

8. Клейменов А.Ф., Кувшинов Д.Р., Осипов С.И. Численное построение решений Нэша и Штакельберга в линейной неантагонистической позиционной дифференциальной игре двух лиц // Труды ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15, №4. С. 120–133.

**NUMERICAL CONSTRUCTION OF SOLUTIONS
IN A CLASS OF NON-ANTAGONISTIC POSITIONAL DIFFERENTIAL GAMES**

D.R. Kuvshinov

The report is devoted to a numerical algorithm for the construction of Nash equilibrium solutions (including non-improvable ones) in a non-antagonistic positional differential game with two players, terminal payoff functionals, geometric constraints on choice of controls and dynamics with separating right part. Formalization of the players's strategies and motions generated by those strategies is based upon formalization and results of the theory of antagonistic positional differential games developed by N.N. Krasovskii and his scientific school. The problem of game solutions construction is reduced to the solution of non-standard optimal control problems. The numerical algorithm uses a number of computational geometry algorithms.

Keywords: non-antagonistic game, differential game, Nash equilibrium solution, numerical solution.

УДК 62.50;681.5

МАКСИМАЛЬНО РОБАСТНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ВДОЛЬ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ ЗА ЗАДАННОЕ ВРЕМЯ С МИНИМАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

***В.В. Кулагин*[1]*, Н.О. Слесарь*[2]**

[1]Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург
[2]Санкт-Петербургский госуниверситет

wkoula@gmail.com

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается задача управления в условиях неопределенности – для случая, когда множество возможных значений параметра неопределенности также не определено, то есть не известно и может быть любым. Для выбора управления предложен критерий максимальной робастности. А именно, для каждого допустимого управления строится множество значений параметра неопределенности, при которых выполняются ограничения на траекторию системы и ее оптимальность, называемое множеством робастности. Множество робастности характеризует управление и максимизируется (в определенном смысле) на множестве допустимых управлений. Критерий применен к управлению движением материальной точки.

Ключевые слова: управление механической системой в условиях неопределенности, неограниченная неопределенность, робастность управления, максимальная робастность, материальная точка.

1. Введение

В [1] (с. 368) рассмотрена задача перемещения материальной точки ограниченной по величине силой из состояния покоя в начале отрезка в состояние покоя в конце этого отрезка за заданное время и с минимальной по абсолютной величине скоростью.

В данной работе величина отрезка предполагается неопределенной. Неопределенность в задачах управления означает, что наряду с управлением *u* имеется часть системы *v*, которую выбирает случай, природа, противник, а траектории системы и функционалы, заданные на них, зависят от двух независимых переменных – *u*, *v*. Особенность неопределенности в данной задаче (величина отрезка может быть любой) не позволяет применить методы работы с неопределенностью, в которых предполагается ограниченность множества возможных значений параметра неопределенности. Исходя из этого, применяется критерий максимальной робастности. Он позволяет установить предельные возможности системы оставаться управляемой (соблюдать ограничения и условие оптимальности) при наличии неопределенности данного типа. Считается, что допустимое управление обладает свойством робастности, если оно обеспечивает системе управляемость для множества значений длины отрезка. Максимально робастным называется управление с максимальным (в уточняемом ниже смысле) множеством робастности.

2. Постановка задачи

Уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} = u, \quad t \in [0,T], \quad |u| \le 1, \quad x(0) = x_0,$$
$$\dot{x}(0) = 0, \quad x(T) = 0, \quad \dot{x}(T) = 0.$$

Параметром неопределенности *v* является начальное положение x_0. Вводится множество *R* пар (u, x_0), для которых существует траектория $x(t;u,x_0)$, $\dot{x}(t;u,x_0)$:

$$R = \{(u,x_0) | x(0;u,x_0) = x_0; \dot{x}(0;u,x_0) = 0;$$
$$x(T;u,x_0) = 0; \dot{x}(T;u,x_0) = 0\}.$$

При фиксированном начальном положении x_0 задача оптимального управления [1] имеет вид

$$J_{x_0}(u) \to \min_{|u| \le 1}, \tag{1}$$

где $J_{x_0}(u)$ – сечение функции

$$J(u,x_0) = \max_t |\dot{x}(t;u,x_0)|. .$$

Далее вводится множество оптимальных (в смысле (1)) пар (u, x_0):

$$R^+ = \left\{ (u,x_0) \middle| u = \arg \min_{u \in U(x_0)} J_{x_0}(u) \right\},$$

где $U(x_0) = \{u | (u,x_0) \in R\}$, и множество робастности управления *u*, являющееся характеристикой этого управления:

$$X_0(u) = \{x_0 \big| (u, x_0) \in R^+\}.$$

Задача о максимально робастном управлении имеет вид: найти управление u^* такое, что

$$X_0(u^*) \supseteq X_0(u), \quad \forall u.$$

3. Решение задачи

Построено управление $u^*(x,\dot{x})$ как поверхность над фазовой плоскостью со значениями $+1$, -1, 0, с линиями переключений в виде парабол, а именно: +1 ниже линии $AB0ED$, -1 выше линии $AC0FD$, значение 0 на остальной части области L, которая определяется множеством R допустимых пар (u, x_0), рис. 1.

Множество L^+ робастности данного управления $-$ отрезок $[-0.25T^2, 0.25T^2]$ содержит множества робастности любого другого управления вида $u(t; x, \dot{x})$, то есть данное управление является максимально робастным управлением.

4. Заключение

Построено управление, решающее задачу Варги (1) для любого отрезка из числа удовлетворяющих условиям на его концах и фиксированности времени процесса.

Рассмотренная задача максимально робастного управления является задачей синтеза оптимального управления, поставленной для случая неопределенности части начального вектора движения и при наличии фазовых ограничений [5].

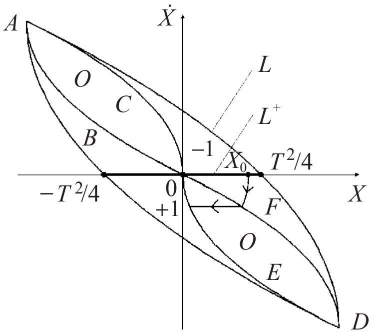


Рис. 1

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-01-00360.

Список литературы

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.

2. Кулагин В.В. Максимальная робастность в задаче оптимального управления // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тез. докл. X Междунар. семинара. М.: ИПУ РАН, 2008.

3. Кулагин В.В. Задача математического программирования для функции с избыточным аргументом // Математическое программирование и приложения: Тез. докл. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2007.

4. Кулагин В.В., Проурзин В.А. Амортизатор, максимально робастный к изменению массы защищаемого объекта // Изв. РАН. МТТ. 2005. №1. С. 34–44.

5. Кулагин В.В, Слесарь Н.О. К синтезу оптимального управления // Дифференциальные уравнения и топология: Тез. докл. конф. к 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина. М.: МГУ, 2008.

MAXIMUM ROBUSTNESS MOVEMENT OF A SINGLE MASS POINT ALONG THE SEGMENT FOR A GIVEN TIME WITH A MINIMUM VELOCITY

V.V. Koulaguin, N.O. Slesar

A control problem for the case when a set of admissible values of a parameter is unknown is considered. For a control choice, the criterion of maximum robustness is suggested. Namely, for any admissible control, the set of the values of the parameter, named a robustness set, is constructed. For any control belonging to this set the constraints imposed on a trajectory of the system are to be held. The robustness set characterizes control and is maximized (in certain sense) on a set of admissible controls. The control of a mass point as an example is given.

Keywords: control design problem under uncertainty, unbounded uncertainty, robustness, maximum robustness, a single mass point.

УДК 531.36

О ДВИЖЕНИИ ОЛОИДА ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

А.С. Кулешов

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

kuleshov@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматривается задача о движении по неподвижной горизонтальной плоскости твердого тела, состоящего из двух дисков, соединенных перпендикулярно друг с другом так, что окружность первого диска проходит через центр второго и наоборот. Такое тело известно в западной литературе под названием олоид. Получены уравнения траекторий точек касания олоида с плоскостью.

Ключевые слова: олоид, качение, система с одной степенью свободы.

Основные системы координат

Рассмотрим движение олоида по горизонтальной плоскости. Олоид представляет собой твердое тело, состоящее из двух взаимно перпендикулярных дисков, причем окружность первого диска проходит через центр второго и наоборот. Впервые олоид был упомянут в работах немецкого геометра Пауля Шаца [1]. Необычные геометрические свойства олоида исследовались в работе [2]. На основе олоида сконструированы специальные машины для перемешивания различных жидкостей [3]. При движении по горизонтальной плоскости олоид демонстрирует необычное поведение, нуждающееся в исследовании.

Для описания движения олоида введем две системы координат: неподвижную $OXYZ$, оси OX и OY которой лежат в плоскости движения, а ось OZ перпендикулярна ей, и подвижную $Gx_1x_2x_3$, жестко связанную с олоидом. Начало системы $Gx_1x_2x_3$ совпадает с центром масс олоида, ось Gx_2 проходит через центры дисков, составляющих олоид, ось Gx_3 перпендикулярна плоскости первого диска, а ось Gx_1 перпендикулярна плоскости второго диска. Обозначим через φ угол между осями Gx_3 и OZ (рис. 1).

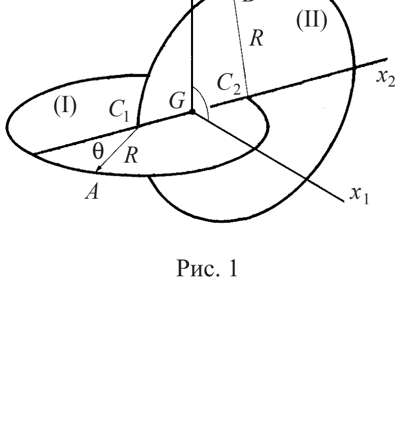


Рис. 1

Пусть A и B – точки касания олоида с горизонтальной плоскостью. Положение тела на плоскости будем определять углом θ между отрицательным направлением оси Gx_2 и направлением из центра C_1 первой окружности в точку A. Заметим, что угол θ связан простейшей формулой с натуральным параметром s – длиной дуги окружности диска: $s = R\theta$.

Введем дополнительно два единичных вектора: $\boldsymbol{\tau}_1$, касательный к плоскости первой окружности в точке A, и $\boldsymbol{\nu}_1$, перпендикулярный $\boldsymbol{\tau}_1$ и равный $\nu_1 = [\mathbf{e}_Z \times \tau_1]$. Заметим, что система $A\tau_1\nu_1\mathbf{e}_Z$ является репером Френе для кривой – траектории точки A на опорной плоскости.

Траектория точек касания

Теперь мы можем вычислить координаты точек A и B в системе координат $Gx_1x_2x_3$ как функции угла θ:

$$A: \left(R\sin\theta, -\frac{R}{2} - R\cos\theta, 0 \right),$$

$$B: \left(0, \frac{R}{2} - \frac{R\cos\theta}{1+\cos\theta}, \pm\frac{R\sqrt{1+2\cos\theta}}{1+\cos\theta} \right).$$

Из условия отсутствия проскальзывания в точках A и B следует, что угловая скорость всегда коллинеарна вектору $\mathbf{AB}$, то есть:

$$[\omega \times \mathbf{AB}] = 0 \text{ или } \omega = \omega_1\tau_1 + \omega_2\nu_1.$$

С другой стороны, используя теорему сложения угловых скоростей [4] и некоторые идеи из дифференциальной геометрии, можно получить другое выражение для угловой скорости олоида:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}\tau_1 + \frac{\sin\varphi}{R}\nu_1 + \left(K - \frac{\cos\varphi}{R} \right)\mathbf{e}_Z.$$

Здесь K – кривизна траектории точки A на опорной плоскости. Сравнивая два выражения для угловой скорости, находим

$$K = \cos\varphi / R. \qquad (1)$$

Уравнение (1) позволяет найти K как функцию угла θ:

$$K = \frac{\sqrt{1+2\cos\theta}}{2R\cos\theta/2}.$$

В дальнейшем можно получить выражения для координат X_A, Y_A точки A в системе координат $OXYZ$ по формулам:

$$dX_A/d\theta = R\cos\alpha, \quad dY_A/d\theta = R\sin\alpha,$$
$$d\alpha/d\theta = KR.$$

В явном виде для X_A, Y_A имеем:

$$X_A = \frac{2R\sqrt{3}}{9}\left[\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\theta/2)\right) + \right.$$
$$\left. + \arcsin\left(\frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{3}\cos(\theta/2)}\right) + 2\sin(\theta/2)\sqrt{1+2\cos\theta}\right],$$
$$Y_A = 4R\sqrt{3}\sin^2(\theta/2) - \frac{2R\sqrt{3}}{9}\ln\cos(\theta/2),$$
$$-2\pi/3 < \theta < 2\pi/3.$$

Аналогично для абсолютных координат точки B получаем

$$X_B = \frac{2R\sqrt{3}}{9}\left[\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\theta/2)\right) + \right.$$
$$\left. + \arcsin\left(\frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{3}\cos(\theta/2)}\right) - \frac{\sin(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)}\sqrt{1+2\cos\theta}\right],$$
$$Y_B = \frac{R\sqrt{3}}{3} + \frac{44R\sqrt{3}}{9}\sin^2(\theta/2) - \frac{2R\sqrt{3}}{9}\ln\cos(\theta/2),$$
$$-2\pi/3 < \theta < 2\pi/3.$$

На рис. 2 изображены траектории точек A (кривая (I)) и (кривая (II)).

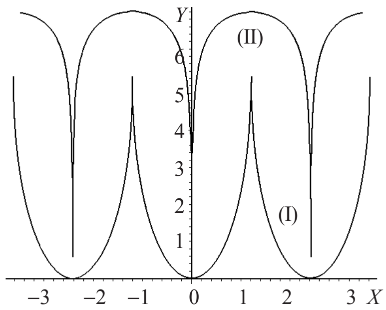


Рис. 2

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 10-01-00292.

Список литературы

1. Schatz P. // Deutsches Reichspatent Nr. 589 452 in der allgemeinen Getriebeklasse.
2. Dirnbok H., Stachel H. The Development of the oloid // J. Geometry. Graphics. 1997. V. 1. P. 105–118.
3. Bioengineering AG. Sagenrainstr. 7 Wald 8636 Ch. Switzerland.
4. Болотин С.В. и др. Теоретическая механика. М.: Академия, 2010. 430 с.

MOTION OF THE OLOID ON THE HORIZONTAL PLANE

A.S. Kuleshov

We present a kinematic analysis and dynamic simulation of the toy known as the oloid. The oloid is defined by the convex hull of two equal radius disks whose symmetry planes are at right angles with the distance between their centers equal to their radius. The no-slip constraints of the oloid are integrable, hence the system is essentially holonomic. In this paper we present analytic expressions for the trajectories of the ground contact points, basic dynamic analysis, and observations on the unique behavior of this system.

Keywords: oloid, rolling motion, one degree-of-freedom system.

УДК 533.6013.42:534.1

НЕЛИНЕЙНЫЙ ПАНЕЛЬНЫЙ ФЛАТТЕР. РЕЗОНАНСЫ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ – ОДНА ИЗ ВОЗМОЖНЫХ ПРИЧИН ЖЕСТКОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

А.Н. Куликов

Ярославский госуниверситет им. П.Г. Демидова

kulikov_d_a@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Предложен новый механизм возбуждения колебаний пластины под воздействием сверхзвукового потока газа при малом коэффициенте демпфирования. Жесткий режим возбуждения колебаний возможен при скоростях, близких к тем, при которых реализуется резонанс собственных частот 1:1, 1:2, 1:3. Эти скорости существенно меньше, чем скорость флаттера в традиционной ее трактовке.

Ключевые слова: флаттер, резонансы, нелинейная краевая задача, докритические бифуркации, жесткое возбуждение колебаний.

Введение

Математическое моделирование колебаний прямоугольной пластины, которая обтекается сверхзвуковым потоком газа со скоростью U приводит к необходимости исследования нелинейной краевой задачи [1–3]. В случае цилиндрического изгиба она принимает следующий вид:

$$w_{tt} + g_1 w_t + g_2 w_{txxxx} + w_{xxxx} + c w_x = F(w_t, w_x, w_{tx}, w_{xx}), \qquad (1)$$

$$w(t,0) = w_{xx}(t,0) = w(t,1) = w_{xx}(t,1) = 0. \qquad (2)$$

Здесь $t \geq 0$, $x \in [0, 1]$, $w(t, x)$ – нормированное трансверсальное перемещение серединной поверхности пластины, $g_1 > 0$ – нормированный коэффициент демпфирования, коэффициент $g_2 \geq 0$ характеризует вязкоупругое трение. Неотрицательный коэффициент c пропорционален U^2, если для учета аэродинамических сил использована формула Аккерета, или U, если такой учет опирается на закон плоских сечений А.А. Ильюшина («поршневой» теории). Наконец, F – достаточно гладкая функция, имеющая в нуле порядок малости выше первого. Следуя [1–3], обычно полагают

$$F(w_t, w_x, w_{tx}, w_{xx}) = \left(b_1 \int_0^1 w_z^2 dz + b_2 \int_0^1 w_z w_{tz} dz \right) w_{xx} - b_3 (w_t / c_\infty + \mathrm{M} w_x)^2 - b_4 (w_t / c_\infty + \mathrm{M} w_x)^3,$$

где c_∞ – скорость звука в невозмущенной среде, М – постоянная Маха, коэффициенты $b_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3, 4$, зависят от параметров обтекающего газа. Далее будем считать, что коэффициенты g_1, g_2 малы. Предположение естественно, так как они пропорциональны E^{-1}, где E – модуль упругости – достаточно большая величина для многих материалов ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м^2 для стали). Поэтому положим $g_1 = 2\varepsilon g_3$, $g_2 = 2\varepsilon^2 g_4$, $g_3, g_4 \geq 0$, ε – малый неотрицательный параметр.

Анализ задачи в линейной постановке

Линеаризация дифференциального уравнения (ДУ) (1) при $\varepsilon = 0$ приводит к уравнению

$$w_{tt} + A(c) w = 0, \quad A(c) w = w_{xxxx} + c w_x. \qquad (3)$$

Пусть $\mu(c)$ точка спектра устойчивости краевой задачи (3), (2) а $\lambda(c)$ – собственное значение (СЗ) линейного дифференциального оператора (ЛДО) $A(c)$. Тогда $\mu^2(c) + \lambda(c) = 0$.

В работах [4–6] было показано существование таких положительных постоянных $c_3 < c_2 < c_1$, что

1) при $c \in [0, c_1]$ все собственные значения ЛДО $A(c)$ действительные и простые;

2) при $c = c_1$ существует двукратное собственное значение $\lambda_1 > 0$;

3) при $c = c_2$ у ЛДО $A(c_2)$ существует пара СЗ $\lambda_1(c_2)$, $\lambda_2(c_2)$ для которых $\lambda_1(c_2):\lambda_2(c_2) = 1:4$;

4) при $c = c_3$ у ЛДО $A(c_3)$ существует пара СЗ $\lambda_1(c_3)$, $\lambda_2(c_3)$ для которых $\lambda_1(c_3):\lambda_2(c_3) = 1:9$.

При выборе краевых условий шарнирного опирания (2) оказалось, что

$$c_1 = 343.36, \quad c_2 = 225.04, \quad c_3 = 121.10.$$

Вопрос о существовании таких c_j и соответствующих $\lambda_k(c_j)$ может быть сведен к исследованию системы уравнений. При выборе краевых условий шарнирного опирания (2) приходим к системе вида:

$$P(\alpha,\beta)=0, \quad c=4\alpha(\beta^2-\alpha^2),$$

$$\lambda=(\alpha^2+\beta^2)(\beta^2-3\alpha^2),$$

$$P(\alpha,\beta)=(3\alpha^2+\beta^2\sigma^2)\operatorname{sh}\sigma\sin\beta+$$

$$+2\alpha\beta\sigma(\operatorname{ch}2\alpha-\cos\beta\operatorname{ch}\sigma), \quad \sigma=\sqrt{\beta^2-2\alpha^2}.$$

Нелинейная краевая задача

Пусть $c=c_3+a_0\varepsilon, a_0\in R$, т.е. рассмотрим краевую задачу (1), (2) вблизи резонанса собственных частот 1:3. Используя идею и технику метода квазинормальных форм [4–7], исследование аттракторов варианта краевой задачи (1), (2) можно свести к аналогичным вопросам уже для системы ДУ для двух комплексных функций $z_j(s),\ j=1{,}2,\ s=\varepsilon t$:

$$z_1'=(-g_3+ia_0a_{10})z_1+a_{11}z_1|z_1|^2+$$
$$+a_{12}z_1|z_2|^2+a_{13}z_1^2z_2,$$
$$z_2'=(-g_3+ia_0a_{20})z_2+a_{21}z_2|z_1|^2+$$
$$+a_{22}z_2|z_2|^2+a_{23}z_1^3, \tag{4}$$

где $a_{10,}a_{20}\in R, a_{jk}\in C,\ j=1,2,\ k=1,2,3.$ Они определяются в процессе реализации алгоритма получения нормальной формы (4). Система ДУ (4) допускает автомодельные периодические решения вида

$$z_1(s)=\rho_1\exp(i\sigma s), \quad z_2(s)=\rho_2\exp(i\sigma s+\varphi_0),$$
$$\varphi_0\in R,$$

одно из которых с необходимостью неустойчиво. Последнее означает, что в достаточно малой окрестности состояния равновесия краевой задачи (1), (2) есть неустойчивый цикл и, следовательно, граница устойчивости состояния равновесия «опасная». В случаях, близких к резонансам собственных частот 1:2, 1:3, получены аналогичные результаты. И здесь в окрестности состояния равновесия существуют неустойчивые циклы. Анализ краевой задачи (1), (2) также сводится к анализу обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений – соответствующей резонансной нормальной форме.

Напомним, что при $c>c_0$ происходит потеря устойчивости нулевого состояния равновесия линеаризованной краевой задачи (3), (2), где c_0 принято называть скоростью флаттера. Отметим, что $c_3<c_2<c_1<c_0$, и поэтому можно утверждать, что при малом коэффициенте демпфирования возможно жесткое возбуждение колебаний при скоростях, меньших c_0.

Список литературы

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1991. 337 с.

2. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.

3. Holmes P.J., Marsden J.E. Bifurcation to divergence and flutter in flow – induced oscillations: an infinite-dimensional analysis // Automatica. 1978. V. 14, No 4. P. 367–384.

4. Куликов А.Н. Бифуркация автоколебаний пластины в сверхзвуковом потоке газа при малом коэффициенте демпфирования // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 2. С. 271–281.

5. Kulikov A.N. Resonance of proper frequencies 1:2 as a reason for hard excitation of oscillations for the plate in ultrasonic gas flow // ENOC-2008. Saint - Petersburg, Russia. P. 1638–1643.

6. Куликов А.Н. Нелинейный панельный флаттер. Резонанс 1:3 как одна из причин жесткого возбуждения колебаний // Труды Воронежской зимней математической школы С.Г. Крейна. Воронеж, 2010. С.111–118.

7. Мищенко Е.Ф. и др. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005. 430 с.

NON-LINEAR PANEL FLUTTER. RESONANCES OF EIGENFREQUENCIES ARE ONE OF THE POSSIBLE CAUSES OF HARD EXCITATION OF OSCILLATIONS

A.N. Kulikov

A new mechanism of hard excitation of oscillations of a plate with slight damping in a supersonic flow is proposed. A hard excitation of oscillations is possible if the speeds close to those when the resonances of eigenfrequencies 1:1, 1:2,1:3 are realized. These speeds are sufficiently lower, than the speed of a flutter in its conventional understanding.

Keywords: flutter, resonances, non-linear boundary value problem, subcritical bifurcations, hard excitation of oscillations.

УДК 531.36:534.1

АВТОКОЛЕБАНИЯ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ, ЛОКАЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ

Д.А. Куликов

Ярославский госуниверситет им. П.Г. Демидова

kulikov_d_a@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Изучены автоколебания двух идентичных связанных осцилляторов. Найдены аналитически все автомодельные циклы. Исследована их устойчивость и локальные бифуркации.

Ключевые слова: связанные осцилляторы, автомодельные циклы, устойчивость, бифуркации, нормальные формы.

Введение

Рассматривается система из двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{x}_k - 2\varepsilon\dot{x}_k + \omega^2 x_k + f(x_k, \dot{x}_k) + (-1)^{k+1}[\beta\varepsilon(x_1 - x_2) + \gamma\varepsilon(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)] = 0, \; k = 1,2, \tag{1}$$

где ε – малый параметр, $f(y,z)$ – достаточно гладкая функция, имеющая в нуле порядок малости выше первого. Без нарушения общности можно считать $\omega = 1$. Система (1) описывает динамику двух слабосвязанных осцилляторов [1–3]. Так, например, если $f(y,z) = a_1 y^2 z + a_2 y^3$, то речь идет о двух слабосвязанных осцилляторах Ван-дер-Поля – Дуффинга. При $\varepsilon < 0$ и $f(y,z) = \sin y - y + a_3 y^2 z$, $a_3 > 0$ речь идет о двух слабосвязанных физических маятниках, в которых учтена диссипация (трение).

Пусть $x(t) = \mathrm{colon}(x_1(t), x_2(t))$. Сразу отметим, что система (1) допускает решение вида $x_1(t) = x_2(t)$, где $x_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{x}_1 - 2\varepsilon\dot{x}_1 + x_1 + f(x_1, \dot{x}_1) = 0. \tag{2}$$

Если уравнение (2) имеет периодическое решение, то оно порождает цикл системы дифференциальных уравнений (1) $x(t) = \mathrm{colon}(x_1(t,\varepsilon), x_2(t,\varepsilon))$, который принято называть синхронным циклом (СЦ). Можно указать условия существования противофазного цикла (ПЦ): $x(t) = \mathrm{colon}(\psi(t,\varepsilon), -\psi(t,\varepsilon))$.

Тем не менее, остается ряд вопросов при рассмотрении системы (1). Первый из них – наличие или отсутствие иных, отличных от СЦ и ПЦ, асимметричных циклов (АЦ). Второй – устойчивость циклов. Наконец, третий вопрос состоит в изучении их локальных бифуркаций.

Решение системы (1) будем искать в виде

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} u_1(t,s) + \varepsilon u_2(t,s) + \varepsilon^{3/2} u_3(t,s) + \ldots, \tag{3}$$

где $\varepsilon > 0$ (при $\varepsilon < 0$ следует в слагаемых (3) сделать замену $\varepsilon \to -\varepsilon$), $u_k(t, s)$ – достаточно гладкие двумерные вектор-функции, имеющие по переменной t период 2π, $s = \varepsilon t$,

$$u_1(t,s) = z_1(s)E_1(t) + \bar{z}_1(s)\bar{E}_1(t) + z_2(s)E_2(t) + \bar{z}_2(s)\bar{E}_2(t),$$

$$E_1(t) = \mathrm{colon}(\exp(it), 0), \quad E_2 = \mathrm{colon}(0, \exp(it)).$$

Комплексные функции $z_1(s)$, $z_2(s)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$z'(s) = d\exp(-i\alpha)Dz(s) + z(s) - (1+ic)z^2\bar{z} \tag{4}$$

при $\varepsilon > 0$. Здесь $z(s) = \mathrm{colon}(z_1(s), z_2(s))$, $z^2\bar{z} = \mathrm{colon}(z_1^2\bar{z}_1, z_2^2\bar{z}_2)$, $d = 0.5\sqrt{\gamma^2 + \beta^2}$, α – аргумент комплексного числа $\gamma + i\beta$,

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

При $\varepsilon < 0$ получаем систему, аналогичную (4):

$$z'(s) = -d\exp(-i\alpha)Dz(s) - z(s) - (1+ic)z^2\bar{z}. \tag{5}$$

Исследования систем (4), (5) аналогичны, но их удобно рассматривать раздельно. Первая из них была получена в случае диссипативной связи, а вторая – при изучении активной связи. Системы (4), (5) были получены путем подстановки суммы (3) в систему (1) с последующим применением алгоритма получения нормальных форм, который основан на развитии метода Крылова – Боголюбова. Достаточно подробное изложение реализации этого алгоритма имеется в работах [4, 5].

Случай диссипативной связи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (4). Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Система* (4) *имеет цикл* $z(s) = e_0\exp(-ics)$, $e_0 = \mathrm{colon}(1,1)$, *соответствующий СЦ системы* (1). *СЦ устойчив, если* $d \in (d_1, \infty)$, *и неустойчив при* $d \in (0, d_1)$, $d_1 = c\sin\alpha - \cos\alpha$, *если* $d_1 > 0$. *При* $d_1 \le 0$ *он устойчив всегда.*

Теорема 2. *Противофазный цикл существует, если* $1 - 2d\cos\alpha > 0$. *Он устойчив, если выполнены неравенства*

$$1 - 4d\cos\alpha > 0, \; d(d + d_1\rho^2) > 0, \qquad (6)$$

где $\rho^2 = 1 - 2d\cos\alpha$. *Если хотя бы одно из неравенств заменено на противоположное, то ПЦ неустойчив.*

Периодические решения вида $z_1(s) = y_1 \times \exp(i\sigma s)$, $z_2(s) = y_2\exp(i\sigma s)$, если $|y_1| \ne |y_2|$, уместно называть АЦ. Вопрос их сосуществования удается свести к рассмотрению решений квадратного уравнения

$$\eta^2 + (4p - q^2(1 + h^2))\eta + 4(p^2 - q^2) = 0, \qquad (7)$$

для которого выполнено неравенство $\eta > 0$, $(1 - d\cos\alpha)(\eta + 2p) > 0$. Здесь

$$p = 1 + \cos^2\alpha - c\sin\alpha\cos\alpha, \quad q = d_1(1 - d\cos\alpha)/d,$$
$$h = b_1/d_1, \quad b_1 = c\cos\alpha + \sin\alpha.$$

Теорема 3. *Каждому подходящему решению квадратного уравнения* (7) *соответствует АЦ системы дифференциальных уравнений* (1). *При* $d \in (0, d_4)$ *АЦ неустойчив, а при* $d \in (d_4, \infty)$ *устойчив.*

В [4–6] приведены формулы, позволяющие восстанавливать параметры АЦ системы (1), асимптотические формулы для этих решений и алгоритм, позволяющий вычислять d_4.

Случай активной связи

Система дифференциальных уравнений (5) не имеет СЦ. Это справедливо и для системы (1).

Теорема 4. *ПЦ существует, если* $-1 + 2d \times \cos\alpha > 0$. *Если выполнены неравенства:* 1) $d_1 \le 0$ *или* 2) $d_1 > 0$, $1 - 2d_1\cos\alpha > 0$, *то ПЦ устойчив при всех значениях коэффициента d.*

При одновременном выполнении неравенств $d_1 > 0$, $1 - 2d_1\cos\alpha < 0$ он устойчив, если $d \in (0, d_3)$, $d_3 = -d_1/(1 - 2d_1\cos\alpha)$ и неустойчив, если $d \in (d_3, \infty)$.

Вопрос о существовании АЦ для системы (5) сводится к исследованию алгебраического уравнения, аналогичного (7). При активной связи осцилляторов характерно наличие устойчивого ПЦ. Именно это было отмечено Гюйгенсом в известном эксперименте с двумя связанными физическими маятниками.

Бифуркации автомодельных циклов

Детальное изложение результатов содержится в работах [4, 5]. Методами теории бифуркаций было показано, что от СЦ и ПЦ бифурцируют АЦ. Впрочем, в рамках нормальной формы существование АЦ носит нелокальный характер. Они существуют только в малой окрестности СЦ.

Исследование бифуркаций АЦ сводится к применению бифуркационной теоремы Андронова – Хопфа для вспомогательной трехмерной системы. При ее рассмотрении были использованы результаты работ Н.Н. Баутина, где была вычислена ляпуновская величина для произвольной системы из трех дифференциальных уравнений в критическом случае пары чисто мнимых собственных значений [7].

Список литературы

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртц Ю. Синхронизация. Фундаментальное явление. М.: Техносфера, 2003. 431 с.

2. Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators // Phisika D. 1990. Vol. 41. P. 403–449.

3. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 894 с.

4. Куликов Д.А. Автомодельные периодические решения и бифуркации от них в задаче о взаимодействии двух слабосвязанных осцилляторов // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 2005. Т. 5. С. 120–132.

5. Куликов Д.А. Автомодельные циклы и их локальные бифуркации в задаче о двух слабосвязанных осцилляторах // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 4. С. 543–559.

6. Куликов Д.А. Периодические решения разностной аппроксимации уравнения Курамото – Цузуки // Диффер. уравн. 2007. Т. 43, № 7. С. 992–994.

7. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.

SELF-OSCILLATIONS OF TWO COUPLED OSCILLATORS. SELF-SIMILAR SOLUTIONS, LOCAL BIFURCATIONS

D.A. Kulikov

Self-oscillations of two identical oscillators are studied. All the self-similar cycles are found analytically. Their stability is investigated as well as the local bifurcations of the self-similar cycles when there is a change in stability.

Keywords: coupled oscillations, self-similar cycles, stability, bifurcations, normal forms.

УДК 539.3.6

КИНЕМАТИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНТИНУАЛЬНО-ДИСКРЕТНОЙ МНОГОПРОЛЕТНОЙ БАЛКИ

Х.П. Культербаев

Кабардино-Балкарский госуниверситет им. Х.М. Бербекова, Нальчик

kulthp@mail.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Рассматриваются кинематически возбуждаемые поперечные колебания многопролётной балки с присоединёнными сосредоточенными массами при учёте инерционных сил вращения. Получена математическая модель колебаний, основу которой составляют три системы дифференциальных уравнений. Первая система описывает колебания континуальных участков балки, вторая и третья – линейные и угловые перемещения дискретных сосредоточенных масс. Найдена вектор-функция перемещений при гармонических возмущениях опор. Изучено влияние сдвига фаз гармонических возмущений одинаковой частоты на колебания.

Ключевые слова: кинематически возбуждаемые колебания, дискретно-континуальная система, гармонические возмущения, сдвиг фаз.

1. Введение

Рассматривается установившийся режим поперечных колебаний балки (рис. 1) в виде континуально-дискретной системы, состоящей из участков, каждый длиной l_j (j = 1, 2,..., n), площадью поперечного сечения S_j, осевым моментом инерции поперечного сечения J_j, из материала с модулем упругости E и плотностью ρ, при коэффициенте линейно-вязкого трения η. На балке расположены сосредоточенные массы M_j (j = 1, 2,..., N; $N = n + 1$) с осевыми моментами инерции I_j относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа. Балка поддерживается упругими опорами с коэффициентами жесткости c_j и демпферами с соответствующими коэффициентами линейно-вязкого сопротивления μ. В продольном направлении балка растягивается силой P. Источниками колебаний балки являются перемещения опор $z_j(t)$.

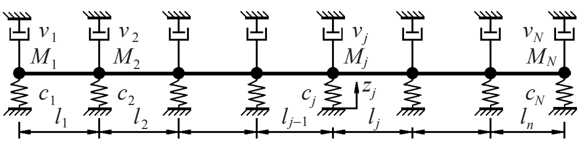


Рис. 1

Положения континуальных участков определяются с помощью вектор-функций векторного и скалярного аргументов $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, соответствующих смещениям балки в поперечном направлении. Используется локальная система пространственных координат $x_j\,[0, l_j]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Движения сосредоточенных масс являются плоскопараллельными с полюсом в центре масс. Положения сосредоточенных масс определяются линейными координатами $\mathbf{y}(t)$, отсчитываемыми по вертикали от положения статического равновесия. Математическая модель поперечных колебаний будет в виде трех систем дифференциальных уравнений. Первая из них описывает континуальные участки

$$\mathbf{B} \circ \mathbf{u}'''' - P\mathbf{u}'' - \mathbf{R} \circ \ddot{\mathbf{u}}'' + \mathbf{m} \circ \ddot{\mathbf{u}} + \eta \mathbf{m} \circ \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0},$$
$$\mathbf{x} \in (0, \boldsymbol{l}),\ t > -\infty. \qquad (1)$$

Здесь и далее значок $\circ$ означает операцию поэлементного перемножения векторов, так что $\mathbf{c} = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} \Rightarrow c_k = a_k b_k$; $\mathbf{m}$ – вектор погонных масс пролетов балки, $m_j = \rho S_j$; $\mathbf{B}$ – вектор жесткостей балки на изгиб, $B_j = EJ_j$; $\mathbf{R}$ – вектор осевых моментов инерции распределенной массы на единичной длине, $R_j = \rho J_j$; $\mathbf{0}$ – нуль-вектор. В левой части уравнения в порядке следования слагаемых учтены силы упругости, осевая продольная сила, силы инерции вращающейся массы, силы инерции от линейных перемещений, силы линейно-вязкого трения.

Вторая система является совокупностью обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующих вертикальным движениям множества дискретных масс:

$$\mathbf{M} \circ \ddot{\mathbf{y}} + \mu \mathbf{M} \circ (\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{z}}) + \mathbf{c} \circ (\mathbf{y} - \mathbf{z}) + \mathbf{b}(\mathbf{u}) = \mathbf{0},$$
$$t > -\infty. \qquad (2)$$

Первое слагаемое в левой части соответствует инерционной силе, второе учитывает диссипативные силы, третье – упругие силы в гибких опорах, четвертое – поперечные силы в сечениях балки слева и справа от сосредоточенных масс.

Третья система уравнений состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих вращательные движения сосредоточенных масс:

$$\mathbf{I}\circ\ddot{\boldsymbol{\varphi}}+\sigma\mathbf{I}\circ\dot{\boldsymbol{\varphi}}+\mathbf{d}(\mathbf{u})=\mathbf{0}. \qquad (3)$$

Здесь σ – коэффициент вязкого трения при вращении масс. Первое слагаемое учитывает момент сил инерции вращающейся массы, второе – момент сил сопротивления, третье – изгибающие моменты в сечениях балки слева и справа от сосредоточенной массы.

Задача о собственных значениях и функциях ($\mathbf{z}(t)\equiv 0$), порождаемая системой (1)–(3), подробно рассмотрена в [1].

2. Кинематически возбуждаемые колебания при гармонических возмущениях

Возмущения $\mathbf{z}(t)$ являются гармоническими с разными частотами ω_k, амплитудами a_k и начальными фазами α_k:

$$z_k(t)=a_k e^{i(\omega_k t+\psi_k)}=A_k e^{\lambda_k t},\quad A_k=a_k e^{j\psi_k},$$
$$\lambda_k=i\omega_k,\ k=1,2,\ldots,N. \qquad (4)$$

Здесь A_k – комплекснозначные амплитуды, образующие вектор $\mathbf{A}$.

Уравнения (1)–(3) с учетом (4) имеют общее решение

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\mathbf{H}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})\mathbf{z}(t),\quad \boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N)^T,$$
$$\mathbf{x}\in(\mathbf{0},\boldsymbol{l}),\ t>-\infty, \qquad (5)$$

где $\mathbf{H}(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda})$ – матрица передаточных функций, элементы которой суть реакции пролетов балки на единичные гармонические возмущения опор. Например, $h_{jk}(x_i,\lambda_k)$ является комплексной амплитудой колебаний j-го пролета балки при автономном гармоническом единичном возмущении k-й опоры $\zeta_k(t)=e^{\lambda_k t}$ и имеет вид

$$h_{jk}(x_i,\lambda_k)=A_{jk}\sin a_{jk}x_j+B_{jk}\cos a_{jk}x_j+$$
$$+C_{jk}\operatorname{sh} b_{jk}x_j+D_{jk}\operatorname{ch} b_{jk}x_j. \qquad (6)$$

Здесь A_{jk}, B_{jk}, C_{jk}, D_{jk} – постоянные интегрирования, которые являются элементами прямоугольной матрицы $\mathbf{E}$ размерности $4n\times N$. Граничные условия и условия сопряжения участков балки дают матричное уравнение для их определения

$$\mathbf{GE}=\mathbf{F}.$$

Матрицы $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$ формируются процедурами преобразований при подстановке (4)–(6) в систему (1)–(3).

Представление (5) позволяет рассмотреть три типа вынужденных колебаний: непериодические негармонические; периодические негармонические; гармонические. При гармонических колебаниях ($\omega_1=\omega_2=\ldots=\omega_N$) изучено влияние сдвига фаз возмущений на амплитуду колебаний.

Функции амплитуд $a_u(x)$ для конкретной трехпролетной стальной балки из двутавров двух типов представлены кривыми на рис. 2. В первом случае все возмущения синфазные, $\boldsymbol{\Psi}=(0,0,0,0)$, форма колебаний – почти прямая линия. Во втором случае возмущения с четными и нечетными номерами имеют сдвиг фаз $\pi/2$, $\boldsymbol{\Psi}=(\pi/2,\ 0,\ \pi/2,\ 0)$. Поэтому в упругой линии появляются существенные кривизны, приводящие к повышению внутренних сил в сечениях балки. В третьем случае нечетные и четные возмущения находятся в противофазе, $\boldsymbol{\Psi}=(\pi,0,\pi,0)$. Амплитуды колебаний меньше, чем в предыдущих случаях. Но при этом повышается кривизна изогнутой оси балки, что увеличивает изгибающие моменты в сечениях и, как следствие, опасность таких колебаний.

Общий вывод состоит в том, что сдвиг фаз возмущений существенно влияет на амплитуды и формы изогнутой оси, а следовательно, и на прочность балки.

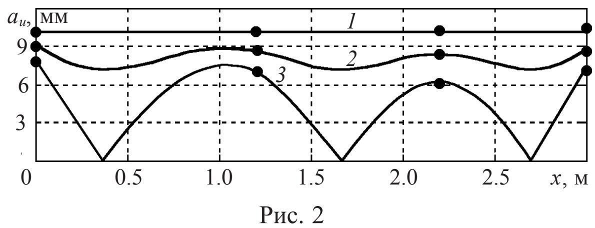


Рис. 2

Список литературы

1. Культербаев Х.П., Чеченов Т.Ю. Свободные колебания континуально-дискретной многопролетной балки при учете инерционных сил вращения // Наука, техника и технология XXI века (НТТ – 2009): Матер. IV Междунар. научно-технич. конф. Нальчик, КБГУ. 2009. С. 313–317.

KINEMATICALLY EXCITED OSCILLATIONS OF CONTINUOUS-DISCRETE MULTISPAN BEAMS

Kh.P. Kulterbaev

Cinematically excited transverse oscillations of multi-span beams with attached concentrated masses are analyzed, taking into account the inertia of rotation. The mathematical model of oscillations is presented, which is based on three systems of differential equations. The first system describes the vibration of the continual parts of the beam, and the second and the third ones describe linear and angular displacements of the discrete concentrated masses. The vector-function of the displacements during the harmonic disturbances of the supports is determined. The effect of a phase shift of harmonic perturbation of the same oscillations frequency is studied.

Keywords: kinematics excited oscillations, discrete-continual system, harmonic disturbances, the phase shift.

УДК 539.3

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ НАГРУЖЕННЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Н.Ю. Культина

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

natalia.kultina@gmail.com

Поступила в редакцию 16.05.2011

Показана особенность спектра собственных частот некоторых нагруженных тонких упругих оболочек. При увеличении нагрузки обнаруживается возможность резонансных соотношений для собственных частот и отвечающих им форм колебаний, то есть внутреннего резонанса. Рассмотрен случай, когда резонансная частота и форма представляют собой сумму двух собственных частот и форм колебаний. Число внутренних резонансов зависит от нагрузки и толщины оболочки. Указанную особенность спектра собственных частот следует учитывать при исследовании задач нелинейной динамики нагруженных оболочек. В частности, внутренний резонанс приводит к неустойчивости.

Ключевые слова: тонкая упругая оболочка, устойчивость оболочек, внутренний резонанс, взрывная неустойчивость, собственные частоты оболочек.

Известно, что ряд распределенных механических систем, рассматриваемых в линейном приближении (в том числе нагруженные упругие оболочки), обладает следующей особенностью: при увеличении нагрузки собственные частоты, отвечающие высоким формам колебаний (большим номерам волновых чисел) меняются быстрее, чем частоты на низких формах. Вследствие этого в спектре собственных частот возможно выполнение резонансных соотношений. Внутренним резонансом называют появление на взаимодействующих формах колебаний новых комбинационных частот, близких к собственным. В простейшем случае одна из собственных частот является суммой или разностью двух других. Еще один отличительный признак рассматриваемого класса систем – появление при асимптотическом рассмотрении точек сгущения в спектре собственных частот. Эти особенности требуют проведения исследования динамики указанных систем в нелинейной постановке задачи.

Существуют проблемы, возникающие как при теоретическом, так и экспериментальном исследовании механических систем указанного класса. Расчет предельно допустимых нагрузок (нахождение границ области устойчивости в пространстве характерных параметров) не приводит к удовлетворительным результатам. В частности, для круговой цилиндрической оболочки, находящейся под действием осевого сжатия, наблюдается значительное расхождение между экспериментальными данными и теоретическими результатами, полученными с помощью исследования приближенных математических моделей [1]. Предельно допустимая (или критическая) нагрузка, зафиксированная при нагружении опытных образцов, существенно ниже теоретически прогнозируемых по линейной модели значений, кроме того, наблюдается широкий разброс экспериментальных показаний критической нагрузки [2–4].

Общих критериев для расчета предельно допустимых нагрузок не существует. В большинстве работ предлагается усложнять математическую модель оболочки, например путем учета малых геометрических и физических несовершенств, неравномерности распределения нагрузки по торцу оболочки и т.д. [2, 4]. Такое построение сложных математических моделей не дает удовлетворительного объяснения наблюдаемым явлениям и аналитическому методу надежной оценки допустимых нагрузок.

Предлагается проводить исследование динамики рассматриваемых объектов с учетом характерной особенности подобных механических систем – возможности образования в спектре их собственных частот внутренних резонансов.

Рассматривается поведение спектра частот в зависимости от нагрузки и толщины оболочки. Для круговой цилиндрической оболочки, сжатой по оси, и сферической оболочки под действием равномерного всестороннего сжатия численно показано, что в спектре собственных частот оболочки существует большое число внутренних резонансов, основная масса которых отвечает формам, близким к форме потери устойчивости при верхнем критическом давлении. В значениях нагрузки, соответствующих внутренним резонансам, наблюдается широкий разброс. Внутренние резонансы присутствуют в интервале нагрузок от 0.1 до 0.9 от верхней критической, при этом их число растет с уменьшением толщины оболочки.

Образование внутренних резонансов существенно влияет на динамику систем и может приводить к потере устойчивости взрывным образом, когда амплитуды колебаний систем неограниченно нарастают за конечный промежуток времени [5, 6]. Взрывной характер нарастания амплитуд колебаний наглядно демонстрируется на простых дискретных моделях [7, 8], которые позволяют оценить область притяжения внутреннего резонанса, то есть допустимого значения расстройки частот, при котором система теряет устойчивость. Существенно, что нагрузки, при которых происходит образование резонансных частот, могут быть значительно меньше критических величин, определяемых с помощью классических приближенных моделей.

Большим числом внутренних резонансов, в частности, можно объяснить широкий разброс в экспериментальных показаниях: устойчивость теряется, когда частоты колебаний оболочки «попадают» в один из внутренних резонансов.

Предлагается при оценке критической нагрузки ориентироваться на величины, отвечающие появлению в спектре собственных частот внутренних резонансов. Такое нахождение предельно допустимых нагрузок выполняется в линейной модели, что существенно упрощает исследование устойчивости.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-01-00411).

Список литературы

1. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971.
2. Donnell L.H., Wan C.C. Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression // ASME, Journal of Applied Mechanics. 1950. Vol. 17, No 1. P. 73–83.
3. Tennyson R.C., Muggeridge D.B. Buckling of axisymmetric imperfect circular cylindrical shells under axial compression // AIAA Journal. 1969. V. 7, No 11. P. 2127–2131.
4. Weingarten V.I., Morgan E.J., Seide P. Elastic stability of thin-walled cylindrical and conical shells under axial compression // AIAA Journal. 1965. Vol. 3, No 3. P. 500–505.
5. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О взрывной неустойчивости механических систем // Механика твердого тела. 1997. № 2. С. 169–175.
6. Новиков В.В. О неустойчивости упругих оболочек как проявлении внутреннего резонанса // Прикладная математика и механика. 1988. Т. 52, вып. 6. С. 1022–1029.
7. Денисов Г.Г., Новиков В.В, Культина Н.Ю. О взрывной неустойчивости механических систем // Вестник Нижегородского госуниверситета. Серия Механика. 2004. Вып. 1. 5–12.
8. Новиков В.В., Культина Н.Ю. К проблеме устойчивости механических систем, нагруженных позиционными неконсервативными силами // Вестник Нижегородского госуниверситета. Серия Мат. модел. и оптим. управление. 2006. Вып. 3. С. 48–54.

ON THE NATURAL FREQUENCY SPECTRUM OF A CLASS OF THIN ELASTIC SHELLS

N.Yu. Kultina

A distinct property of the natural frequency spectrum of a class of thin elastic shells is considered. New combinational frequencies and corresponding modes can be generated in the frequency spectrum with time due to increasing load. Those new frequencies and modes are equal to the natural ones of the shell. Generation of such combinational frequencies is known as internal resonance. This feature is illustrated by the example of a spherical shell under radial compression and a cylindrical shell under axial compression. A situation when a resonant frequency is the sum of two natural frequencies (and the same is true for corresponding modes) is analyzed. Formation of resonant frequencies can lead to buckling when small nonlinear factors are taken into consideration. This effect is demonstrated using examples of simple discrete models.

Keywords: thin elastic shell, stability of shells, internal resonance, explosive instability, natural frequencies of shells.

УДК 534.1

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ И РЕЛАКСАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРОВ РЭЛЕЯ И ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

С.А. Кумакшев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

kumak@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Построены и исследованы периодические движения существенно нелинейных автоколебательных систем, описываемых уравнениями Рэлея и Ван-дер-Поля. На основе метода Ляпунова – Пуанкаре с помощью разработанного алгоритма ускоренной сходимости и процедуры продолжения по параметру вычислены период и начальная величина скорости системы, определяющие автоколебания осцилляторов для малых и умеренно больших значений коэффициентов обратной связи. С гарантированной относительной и абсолютной погрешностями также построены траектории и предельные циклы. Установлены качественные особенности автоколебаний, вызванные увеличением коэффициентов самовозбуждения; дано сопоставление осцилляторов. Приведено сравнение результатов численного исследования периодических решений уравнения Рэлея с известными решениями для квазилинейной постановки.

Ключевые слова: автоколебания, осциллятор Ван-дер-Поля, коэффициент самовозбуждения.

Рассматривается задача высокоточного построения предельных циклов и траекторий для уравнений Рэлея при умеренно больших значениях параметра задачи [1–7]:

$$\begin{gathered}\ddot{x}-\varepsilon(1-\dot{x}^2)\dot{x}+x=0, \quad 0\le\varepsilon\le\varepsilon^*, \\ \varepsilon\approx 10, \quad x(0)=x(2T), \quad \dot{x}(0)=\dot{x}(2T).\end{gathered} \tag{1}$$

Полупериод T неизвестен и подлежит определению совместно с другими характеристиками автоколебаний. Построение единственного устойчивого периодического решения проводится на основе метода Ляпунова – Пуанкаре [4]. Проводится замена аргумента t на τ с целью явного выделения зависимости от неизвестной T. В силу центральной симметрии, достаточно ограничиться рассмотрением задачи на полупериоде $\Delta\tau = \theta$, где $\theta > 0$ – любое фиксированное число; удобно положить $\theta = 1$. В результате имеет место краевая задача

$$\begin{gathered}\ddot{x}-\varepsilon T(1-T^{-2}\dot{x}^2)\dot{x}+T^2x=0, \quad x=x(\tau,\varepsilon), \\ x(0,\varepsilon)=0, \quad \dot{x}(0,\varepsilon)=b, \quad x(1,\varepsilon)=0, \\ \dot{x}(1,\varepsilon)=-b, \quad T=T(\varepsilon), \quad b=b(\varepsilon), \ 0\le\tau\le 1.\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь и далее точками сверху обозначены производные по аргументу τ.

Изложим весьма кратко процедуру численно-аналитического решения задачи (2). Представим уравнение в стандартной форме Коши введением переменной скорости $y=\dot{x}$. Кроме того, введем функции чувствительности (p, w), (q, z) – производные решения (x, y) по параметрам T, b; получим соотношения (зависимость неизвестных функций и параметров от ε для сокращения записи не указывается):

$$\begin{gathered}\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-T^2x+\varepsilon T(1-T^{-2}y^2)y; \\ x(0)=x(1)=0, \quad y(0)=b, \quad y(1)=-b, \\ \dot{p}=q, \quad \dot{q}=-T^2p+\varepsilon T(1-3T^{-2}y^2)q, \\ p=\partial x/\partial b; \quad p(0)=0, \quad q(0)=1, \\ \dot{w}=z, \quad \dot{z}=-T^2w-2Tx+ \\ +\varepsilon T(1-3T^{-2}y^2)z+\varepsilon(1+T^{-2}y^2)y, \\ w=\partial x/\partial T, \quad z=\partial y/\partial T; \quad w(0)=z(0)=0.\end{gathered} \tag{3}$$

Краевая задача для x, y формально не зависит от неизвестных p, q, w, z. После определения $x(\tau)$, $y(\tau)$, T эти функции находятся интегрированием двух независимых линейных задач Коши второго порядка, см. (3).

Однако введенные функции чувствительности (p, w), (q, z), т.е. их значения при $t = 1$, позволяют уточнять недостающие значения параметров T, b в итерационной процедуре ускоренной сходимости типа Ньютона на основе некоторых оценок $T_0(\varepsilon)$, $b_0(\varepsilon)$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ можно взять значения, отвечающие нулевому приближению в методе возмущений: $T_0(0)=\pi$, $b(0)=2\pi/\sqrt{3}$, $a(0)=2/\sqrt{3}$. Последовательным увеличением параметра ε в сочетании с экстраполяцией величин $T(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$, $a(\varepsilon)$ посредством быстросходящегося метода ускоренной сходимости [8] на основе высокоточного интегрирования задач Коши (3) могут быть построены периодические функции $x(t,\varepsilon)$, $\dot{x}(t,\varepsilon)$

и искомые величины $T(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$, $a(\varepsilon)$ с требуемой относительной и абсолютной точностью для умеренно больших значений ε: $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 \approx \approx 10...10^2$.

Остальные характеристики колебаний определяются интегрированием задачи Коши.

На рис. 1 сплошными кривыми представлены полупериод колебаний T и указанное значение скорости b как функции коэффициента самовозбуждения ε, $0 \le \varepsilon \le 10$. Изложенный алгоритм позволяет проводить точные расчеты для существенно больших $\varepsilon_0 \approx 10^2...10^3$.

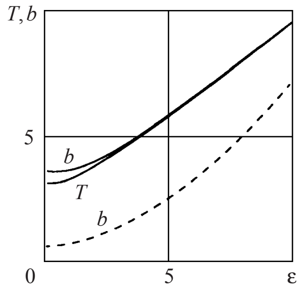


Рис. 1

Графики функций $x(\tau)$, $y(\tau)$ на интервале, равном полному периоду $0 \le \tau \le 2$ ($0 \le t = 2T$ в исходном времени), для характерных значений ε изображены на рис. 2. Как отмечалось, эти функции удовлетворяют условию $x(\tau - 1) \equiv -x(\tau)$, $y(\tau - 1) \equiv -y(\tau)$; поэтому можно ограничиться интервалом $0 \le \tau \le 1$, т.е. $0 \le t \le T$. При $\varepsilon \le 1$ колебания $x(\tau)$ «близки» к гармоническим, см. кривую для $\varepsilon = 1$ на рис. 2*а*. Для $\varepsilon > 1$ наблюдаются значительные резкие отклонения, особенно функция скорости $y(\tau)$, см. рис. 2*б*, значительно отличается от косинусоиды. Начиная с $\varepsilon = 3$, наблюдается релаксационный (по переменной $y(\tau)$) характер колебаний, который при $\varepsilon \ge 5$ становится резко выраженным, см. рис. 2*б*.

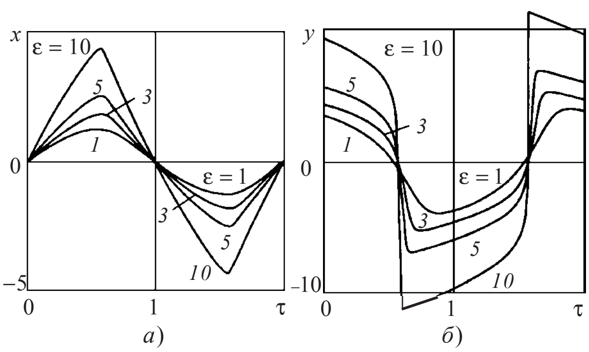


Рис. 2

Отмеченные свойства автоколебаний довольно наглядно проявляются на графиках рис. 3, изображающих предельные циклы на фазовой плоскости (x, y) для разных значений ε. В качестве «естественного» аргумента взят параметр $\tau = t/T$, $0 \le \tau \le 2$, связанный с «собственным» периодом колебаний. При $\varepsilon \le 1$ предельные циклы «близки» к эллипсу с полуосями $(b/T, b)$, $b = 2\pi/\sqrt{3}$. С увеличением ε ($\varepsilon \ge 5$) во втором и четвертом квадрантах наблюдаются резкие (типа угловых точек) повороты касательных к кривым (большая локальная кривизна), связанные с практически релейным изменением переменной $y(\tau)$ (см. рис. 2*б*).

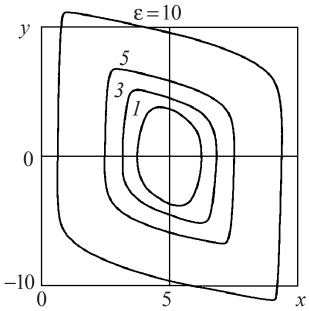


Рис. 3

Решение уравнения Ван-дер-Поля получается дифференцированием по t уравнения (1) и переобозначениями $\sqrt{3}\dot{x} \to x$, $\sqrt{3}\ddot{x} \to \dot{x}$. Таким образом, предельный цикл $(x(t), \dot{x}(t))$ – траектория на фазовой плоскости – для уравнения Ван-дер-Поля эквивалентен кривой $\sqrt{3}(\dot{x}(t),\ \ddot{x}(t))$ в задаче (1). Это приводит к дополнительной существенной неустойчивости расчетов при больших ε, в частности $\varepsilon \approx 10$ (начиная с $\varepsilon \approx 5$. Алгоритм вычислений для решения этого уравнения аналогичен вышеизложенному для осциллятора Рэлея.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00472, 11-01-00247, 09-01-00582) и по программе государственной поддержки научных школ НШ-64817.2010.1.

Список литературы

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
2. Блакьер О. Анализ нелинейных систем. М.: Мир, 1969. 400 с.
3. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 247 с.
4. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
5. Дородницын А.А. Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля // ПММ. 1947. Т. 11. Вып. 3. С. 313–328.
6. Cartwright M.L. Van der Pol's equation for relaxation oscillations // Contribut. to Theory Nonlinear Oscillations. Ann. Math. Studies. 1952. N. 29. P. 3–18.

7. Krogdahl W.S. Numerical solutions of the Van der Pol equation // Z. Angew. Math. Phys. 1960. V. 2, N 1. P. 59–63.

8. Акуленко Л.Д., Кумакшев С.А., Нестеров С.В. Эффективное численно-аналитическое решение изопариметрических вариационных задач механики методом ускоренной сходимости // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 5. С. 723–741.

INVESTIGATION OF REGULAR AND RELAXATION OSCILLATIONS IN THE RAYLEIGH AND VAN DER POL OSCILLATORS

S.A. Kumakshev

Periodic motions of the essentially nonlinear self-oscillation systems governed by Rayleigh's and Van-der-Pol's equations are constructed and studied. On the basis of the Lyapunov – Poincare method combined with an accelerated convergence numerical method and continuation with respect to a parameter, the period and the initial velocity that correspond to self-sustained oscillations are calculated for small and moderately large values of the feedback gains. The phase trajectories and the limit cycles are constructed with a guaranteed accuracy. Qualitative features of the self-sustained oscillations that appear as the self-excitation coefficients increase are discovered. A comparison of the behavior of both oscillators is given. The results of the numerical analysis of periodic solutions of Rayleigh's equation are compared with the already available solutions in the quasi-linear approximation.

Keywords: nonlinear systems, self-sustained oscillations, Van-der-Pol oscillator, self-excitation coefficient.

УДК 621.01+534.1

О МОДЕЛИРОВАНИИ СИСТЕМЫ «РОТОР–ЖИДКОСТЬ–ФУНДАМЕНТ»

А.Б. Кыдырбекулы, Л.А. Хаджиева

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы

almatbek@list.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Предложена обобщенная математическая модель, позволяющая исследовать взаимосвязанные колебания системы «ротор–жидкость–фундамент» при наличии упругих связей между ними и фундаментом машины.

Ключевые слова: роторная система, жидкость, динамика, колебательный процесс, динамическая модель, устойчивость,скорость, резонанс.

Исследуются колебания и устойчивость стационарного вращения вертикального гибкого стато-динамически неуравновешенного ротора с полостью, частично заполненной жидкостью, установленного на упругом фундаменте. Экспериментальные исследования таких динамических систем, как роторные системы, показывают важность учета вибрации фундамента и необходимость разработки мер по их снижению.

1. Уравнения движения системы

Для построения динамической модели системы «ротор–жидкость–фундамент», наиболее полно отражающей ее реальное состояние, учитываются такие факторы, как колебания фундамента, колебания жидкости, влияние несимметричности установки ротора на валу, анизотропность опор вала и фундамента, статическая и динамическая неуравновешенности ротора, внешнее трение, внутреннее трение вала. Масса жидкости считается постоянной во времени, а ее количество – достаточным для того, чтобы полностью смочить цилиндрические стенки полости даже при больших отклонениях ротора. Угловая скорость вращения вала Ω постоянна и достаточно велика, так что на свободной поверхности жидкости гравитационное ускорение оказывается пренебрежимо малым по сравнению с центробежным ускорением, и свободная поверхность представляет собой цилиндр относительно оси вращения. Задемпфированный фундамент в движении системы перемещается в горизонтальной плоскости. Движение жидкости описывается в цилиндрической системе координат, связанной с вращающимся ротором. В состоянии динамического равновесия ротор и жидкость вращаются как единое твердое тело. Решение данной задачи усложняется тем, что движение вращающегося ротора и движение жидкости в его полости взаимосвязаны, это обусловливает изменение частоты вынужденных колебаний и возникновение неустойчивости. Решаемая система уравнений состоит из связанных уравнений движения твердого тела, уравнений сплошной среды и граничных условий для жидкости. Прогибы оси вала в направлении осей x и y неподвижной системы координат полагаются малыми. Отклонения жидкости от положения равновесия, производные по времени от всех амплитуд колебаний также принимаются малыми. Таким образом, для оценки устойчивости связанной системы в целом рассматривается система линеаризованных дифференциальных уравнений:

$$m\ddot{x} + (n_e + n_i)\dot{x} + p_1 x + \Omega n_i y - q_1\alpha + \sigma_1 x_k =$$
$$= m\varepsilon\Omega^2 \cos\Omega t + F_x,$$
$$m\ddot{y} + (n_e + n_i)\dot{y} + p_2 y - \Omega n_i x - q_2\beta + \sigma_2 y_k =$$
$$= m\varepsilon\Omega^2 \sin\Omega t + F_y,$$
$$A\ddot{\alpha} + C\Omega\dot{\beta} + (\mu_e + \mu_i)\dot{\alpha} - r_1 x + \Omega\mu_i\beta + s_1\alpha + \sigma_3 x_k =$$
$$= (C - A)\delta\Omega^2 \sin(\Omega t - \chi) + M_\alpha,$$
$$A\ddot{\beta} - C\Omega\dot{\alpha} + (\mu_e + \mu_i)\dot{\beta} - r_2 y - \Omega\mu_i\alpha + s_2\beta + \sigma_4 y_k =$$
$$= (A - C)\delta\Omega^2 \cos(\Omega t - \chi) + M_\beta,$$
$$M\ddot{x}_k + p_3 x_k + r_3 x + s_3\alpha + n_1\dot{x}_k = 0,$$
$$M\ddot{x}_k + p_3 x_k + r_3 x + s_3\alpha + n_1\dot{x}_k = 0,$$
$$M\ddot{y}_k + p_4 y_k + r_4 y + s_4\beta + n_2\dot{y}_k = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial t} - 2\Omega V - \nu(\Delta U - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{U}{r^2}) =$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \ddot{x}\cos(\Omega t + \varphi) - \ddot{y}\sin(\Omega t + \varphi) +$$

$$+z[\ddot{\alpha}\sin(\Omega t+\varphi)-\ddot{\beta}\cos(\Omega t+\varphi)-$$
$$-\delta\Omega^2\cos(\Omega t+\varphi-\chi)],$$
$$\frac{\partial V}{\partial t}+2\Omega U-\nu\left(\Delta V-\frac{2}{r^2}\frac{\partial U}{\partial\varphi}-\frac{V}{r^2}\right)=$$
$$=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial\varphi}+\ddot{x}\sin(\Omega t+\varphi)-\ddot{y}\cos(\Omega t+\varphi)+$$
$$+z[\ddot{\alpha}\cos(\Omega t+\varphi)+\ddot{\beta}\sin(\Omega t+\varphi)+$$
$$+\delta\Omega^2\cos(\Omega t+\varphi-\chi)],$$
$$\frac{\partial W}{\partial t}-\nu\Delta W=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+r(-\ddot{\alpha}\sin(\Omega t+\varphi)+$$
$$+\ddot{\beta}\cos(\Omega t+\varphi)-2\Omega\dot{\alpha}\cos(\Omega t+\varphi)-$$
$$-2\Omega\dot{\beta}\sin(\Omega t+\varphi)+\delta\Omega^2\cos(\Omega t+\varphi-\chi)),$$
$$\frac{\partial(rU)}{\partial r}+\frac{\partial V}{\partial\varphi}+r\frac{\partial W}{\partial z}=0,\ \rho=\text{const},$$

с соответствующими граничными условиями прилипания и непроницаемости на стенке, верхней и нижней границах ротора; на свободной поверхности жидкости – отсутствие касательного напряжения, кинематическое условие, динамическое условие равенства нулю нормального напряжения.

2. Решение системы

Для исключения времени из аргументов тригонометрических и показательных функций при решении основных уравнений движения относительная скорость частицы жидкости и функция давления принимаются пропорциональными $\exp i(\sigma t-\varphi)$, где σ есть комплексное собственное значение, что приводит к целесообразности построения частных решений с такой же зависимостью от времени. В результате определены функция давления и составляющие скорости частицы жидкости для любой точки объема, а также выражения для гидродинамического момента и силы реакции жидкости.

Уравнения движения роторной системы и граничные условия к ним, линеаризованные вблизи стационарного вращения, допускают решения, пропорциональные $\exp(i\Omega t)$ и $\exp(i\omega t)$, где ω есть характеристическое число. Решение первого вида дает возможность расчета вынужденных колебаний ротора, обусловленных его собственной неуравновешенностью, и вынужденных колебаний фундамента. С помощью решения второго вида получено характеристическое уравнение системы, учитывающее пространственное движение жидкости и определяющее зоны неустойчивости движения системы. Искомая частота колебаний ротора ω в общем случае является комплексной величиной, действительная часть которой определяет частоту автоколебаний, а мнимая часть характеризует степень неустойчивости системы. Устойчивость стационарного движения системы определяется по мнимой части комплексных корней характеристического уравнения. Режим стационарного вращения неустойчив, если возможные значения ω имеют отрицательную мнимую часть. Появление трех зон неустойчивости является прямым следствием несимметричности установки ротора на валу, колебаний фундамента, анизотропности опор и внутреннего сопротивления.

3. Заключение

Построена и решена аналитически обобщенная динамическая модель системы «ротор–жидкость–фундамент», общность которой позволяет при моделировании динамики роторных систем с частичным жидким заполнением переходить к различным по полноте моделям, в частности к частичной или полной ее линеаризации, плоским или пространственным случаям движения.

Создана аналитическая методика анализа динамики роторных систем с моделированием различных динамических условий, позволяющая произвести расчет амплитуды и фазы вынужденных колебаний, критических скоростей, границ зоны неустойчивости систем. Решен комплекс задач динамики роторных систем с полостями, частично заполненными жидкостью, с рассмотрением различных по полноте динамических моделей с целью определения влияния параметров системы на их динамику.

Установлено, что упругая установка фундамента имеет преимущество, позволяющее ввести внешнее демпфирование, необходимое для получения лучших характеристик, чем при жесткой установке, и может позволить достичь значительно больших рабочих скоростей, нежели те, которые допустимы при абсолютно жестко установленном фундаменте.

Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований РК № ГР 0103РК00547, № ГР 0106РК00642.

ON MODELING OF THE SYSTEM «ROTOR-LIQUID-FOUNDATION»

A.B. Kydyrbekuly, L.A. Khajiyeva

A generalized mathematical model is suggested for the investigation of interrelated vibrations of the «rotor–liquid–foundation» system in the presence of elastic coupling between them and the machine foundation.

Keywords: rotor system, fluid, dynamics, oscillatory process, the dynamic model, stability, frequency, speed, resonance.

УДК 681.5

ВЛИЯНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПИД-РЕГУЛЯТОРА НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОДВЕСА РОТОРА

С.В. Лебедева

Волжская государственная академия водного транспорта, Нижний Новгород

vim@aqua.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматривается устойчивость системы электромагнитного подвеса ротора на электромагнитных подшипниках с использованием интегральной составляющей в ПИД-регуляторе без дополнительных мероприятий по линеаризации системы и упрощающих анализ предпосылок.

Ключевые слова: анализ, устойчивость, электромагнитный подшипник, ротор, система управления.

Введение

Интегральная составляющая в структуре ПИД-регуляторов обычно используется при необходимости повышения точности позиционирования ротора. В линейных системах электромагнитного подвеса ротора (например в системах с токами смещения [1–3 и др.]) устойчивость с интегральной составляющей определяется выбранными параметрами системы. При наличии в системе квадратичной нелинейности и необходимости работы при нулевых значениях переменных системы введение интегральной составляющей может привести к неустойчивости состояния равновесия, в том числе и при любых коэффициентах интегральной составляющей автоматического регулятора. Например, анализируя фазовый портрет электромагнитного подвеса в предположении разделения на быстрые и медленные движения и учете апериодической неустойчивости по углу наклона ротора от осевой силы подшипника, Е.Ф. Сабаев показал, что использование интегральной составляющей может привести к неустойчивости состояния равновесия. На рис. 1 приведен фазовый портрет системы электромагнитного подвеса ротора при наличии интегральной составляющей в регуляторе.

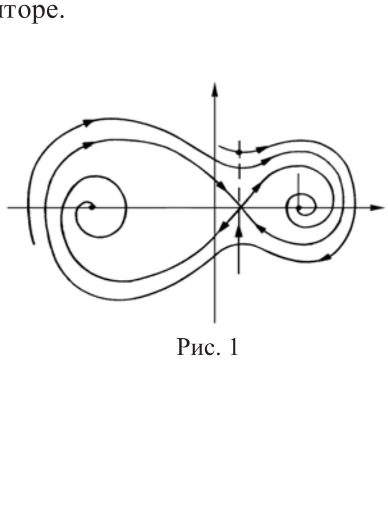


Рис. 1

Математическая модель системы

Рассмотрим устойчивость системы электромагнитного подвеса ротора на электромагнитных подшипниках с использованием интегральной составляющей в ПИД-регуляторе:

$$m\ddot{X} = -KI\,|I|, \qquad (1)$$

$$I = K_p X + K_d \dot{X} + K_i \int X dt, \qquad (2)$$

где X – перемещение ротора, m – масса ротора, K – коэффициент пропорциональности между силой и током управления в электромагнитном подшипнике, I – ток управления, K_p, K_d, K_i – пропорциональный, дифференциальный и интегральный коэффициенты автоматического регулятора. Последовательно дифференцируя уравнение (2) и подставляя значение

$$\ddot{X} = -\frac{K}{m} I\,|I|,$$

получим уравнение

$$m\ddot{I} + K\left(K_p I|I| + K_d (I|I|)'_t + K_i \int I|I|\,dt\right) = 0. \qquad (3)$$

Анализ устойчивости системы

После преобразований получаем функцию Ляпунова и ее производную

$$\nu = \frac{1}{2}(m\dot{I} + KK_d I\,|I|)^2 + \frac{K^2}{2} K_i\, K_d \left(\int I\,|I\,dt\right)^2 + \\ + \frac{mKK_p}{3} I^2 |I| + mKK_i\, I \int I\,|I\,dt,$$

условием знакоопределенности которой является соотношение коэффициентов

$$2\sqrt{(mKK_i K_d K_p\,|I|/6)} > mK_i$$

или

$$\frac{2}{3m}KK_dK_p\,|I|>K_i,$$

что в состоянии равновесия $I=0$ не может быть реализовано. Таким образом, можно говорить только о том, что $v=0$ при $I>0$, $dv/dt=-K^2\times\times K_dK_p(I|I|)^2+mKK_iI^2\,|I|$. Очевидно, что знак производной от функции Ляпунова в окрестности состояния равновесия положительный (поскольку в окрестности нуля второе слагаемое всегда больше первого), сама функция не знакопостоянная. В соответствии с теоремой Четаева [4] нулевое состояние равновесия неустойчиво.

Для обеспечения устойчивости системы возможно предусмотреть зону нечувствительности в регуляторе по току управления. В этом случае производная от функции Ляпунова будет иметь нужный знак при некоторой величине тока управления.

Таким минимальным значением тока управления в зависимости от выбранных коэффициентов системы управления должна быть величина $|I|>3mK_i/(2KK_dK_p)$. При этом значении обеспечивается знакопостоянство функции Ляпунова (функция положительна) и условие знакоопределенности ее производной ($K_i<KK_pK_d\,|I|/m$). Таким образом, требуется корректировка исходной математической модели. Уравнение (1) должно быть записано в следующем виде:

$$m\ddot{X}=\begin{cases}-KI\,|I|, & \text{если}\quad I>|I_0|,\\ 0, & \text{если}\quad I<|I_0|,\end{cases}$$

но дальнейший анализ и результаты сохраняются для условия $I>|I_0|$. При отсутствии управляющего сигнала движение ротора будет определяться начальными условиями, с которыми ротор войдет в зону нечувствительности.

Точно такое же ограничение действует по оси y. В результате получается окружность (ограничение не меняется при повороте осей), внутри которой ротор не управляется, а в любой точке за пределами этой окружности система асимптотически устойчива (некоторый аналог предельного цикла).

Заметим, что для случая горизонтального ротора, когда сила тяжести должна отрабатываться системой управления (так же, как и для осевого подшипника), полученные результаты остаются справедливыми, поскольку исходное уравнение движения должно быть записано в приращениях $(X=X_0+\Delta X$ и $I+I_0+\Delta I)$, а сила тяжести компенсируется некоторой величиной постоянной составляющей тока I_0. В этом случае вид уравнений и полученные результаты сохраняются.

Исследования показали, что для обеспечения устойчивости системы электромагнитного подвеса вертикального ротора в случае использования интегральной составляющей необходимо введение зоны нечувствительности по заданному току управления. Получено соотношение между коэффициентами системы и величиной зоны нечувствительности по току управления для обеспечения устойчивости системы.

В условиях реальной турбомашины осевая сила зависит от скорости вращения ротора. Поэтому появляется необходимость изменять величину тока, компенсирующего вес ротора. Наиболее простым способом реализации компенсации силы веса является введение интегральной составляющей в ПИД-регулятор.

Список литературы

1. Schweitzer G., Maslen E.Y. Magnetic Bearings. Springer, 2009.

2. Журавлев Ю.Н. Активные магнитные подшипники. Теория, расчет и применение. СПб.: Политехника, 2003. 236 с.

3. Gronek M., Düesterhaupt S., Worlitz F. Advantages of a hybrid magnetic bearing concept for the suspension of brover rotors // Prague. 2010. P. 037.

4. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний. М.: Высш. школа, 2001. 388 с.

THE INFLUENCE OF THE INTEGRAL COMPONENT OF THE PID REGULATOR ON THE STEADINESS OF THE ELECTROMAGNETIC PENDANT OF THE ROTOR

S.V. Lebedeva

The steadiness of the system of the electromagnetic pendant of the rotor on the electromagnetic bearings with the use of the integral component of the PID regulator without additional measures concerning linearization and preconditions simplifying the analysis is considered.

Keywords: analysis, steadiness, electromagnetic bearing, rotor, control system.

УДК 539.3:534.1

ГИДРООПОРЫ В СИНХРОНИЗУЮЩИХСЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

А.В. Леонтьева, А.Б. Гордеев, Д.А. Ковригин

Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

aleonav@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Изучаются переходные режимы вращения ротора асинхронного электродвигателя ограниченной мощности под действием внешних вибрационных полей, которые могут генерироваться посторонними источниками вибрации. Показано, что в определенных режимах работы вибростенда возникает явление синхронизации угловой скорости вращения ротора с частотой внешнего вибрационного поля. Это приводит к затягиванию длительности переходных процессов, дополнительному потреблению электрической энергии и, как следствие, преждевременному износу узлов конструкции. Приведены результаты экспериментальных исследований по снижению уровня вибраций и шума с использованием гидравлических опор в качестве демпферов электродвигателей электровоза ВЛ-8ОС. Обоснованы экономические предпосылки применения гидроопор в энергоемких инженерных конструкциях.

Ключевые слова: переходный процесс, синхронизация, вибрация ротора, гидравлическая опора, эксперимент.

Захват угловой скорости вращения ротора электродвигателя частотами внешних источников вибрации происходит во время разгона ротора из состояния покоя. Переходный процесс может сопровождаться рядом нежелательных явлений, к примеру угловая скорость вращения ротора может и не достичь своего номинального значения, а останется в установившемся режиме гораздо меньшей (так называемое явление застревания). Это свидетельствует о вредном действии вибрационного момента на вал ротора, от которого необходимо освободиться либо, по возможности, свести к минимуму. Отмеченные явления существенно осложняются действием внешнего вибрационного поля даже тогда, когда частоты внешних возмущений не совпадают с номинальной угловой скоростью вращения ротора.

Одним из эффективных способов решения указанной проблемы по снижению уровня вибраций органов электромашин является использование гидравлических опор в качестве демпферов [1]. В настоящей работе приводятся результаты экспериментальных исследований по снижению уровня вибраций и шума с использованием гидравлических опор в качестве демпферов асинхронных электродвигателей. Обоснованы экономические предпосылки применения гидроопор в энергоемких инженерных конструкциях.

О явлении синхронизации в технике

Суть явления синхронизации состоит в том, что несколько электромеханических объектов, совершающих по отдельности колебательные или вращательные движения с различными частотами и угловыми скоростями, начинают двигаться синхронно с одинаковыми или соизмеримыми частотами и угловыми скоростями из-за наличия пусть даже весьма слабых связей или взаимодействий. При этом устанавливаются вполне определенные фазовые соотношения между колебательными и вращательными движениями [2–6]. Важно отметить, что подобные режимы движений весьма устойчивы, т.е. они возникают самопроизвольно при подходящих электромеханических параметрах конструкции, причем их можно трактовать как в положительном, так и в отрицательном аспектах. Эффекты синхронизации угловых скоростей роторов электродвигателей, захвата частоты внешнего возбуждения экспериментально наблюдались и при исследовании вибрационных полей электровоза ВЛ-80С в переходных режимах работы. Для снижения динамических нагрузок на платформу электровоза применялись гидравлические опоры в качестве демпферов колебаний неуравновешенных электродвигателей.

Переходные режимы вращения ротора электродвигателя

Кинематическое описание переходного режима представляется в виде квазигармонического процесса с линейной частотной модуляцией [7].

Дисбаланс ротора всегда вызывает на опорах электродвигателя знакопеременные вибрационные нагрузки, которые тем значительнее, чем ближе мгновенная оборотная частота ротора к собственной частоте нагруженных кронштейнов крепления силовых агрегатов.

В реальных процессах условие линейности возрастания частоты вращения ротора электродвигателя соблюдается только в узких интервалах частот. В асинхронных электродвигателях мощностью порядка 40 кВт это условие соблюдается только на начальном участке пусковой характеристики, примерно до 60% номинального значения угловой скорости вращения ротора [8]. Эта область переходного режима является наиболее динамичной – при возрастании угловой скорости вращения ротора и с увеличением нагрузки на вал скольжение увеличивается, но вращающий момент двигателя уменьшается, поэтому скольжение еще более возрастает, следовательно, потребление энергии из сети также резко повышается. Время работы электродвигателя в области переходного режима зависит от воздействия на опоры двигателя внешних вибрационных полей в тех случаях, когда номинальная угловая скорость ротора, или одна из гармоник частотно-модулированного сигнала [8] совпадает с частотой гармоник внешнего вибрационного поля. Дальнейший рост угловой скорости вращения ротора значительно замедляется и его можно аппроксимировать логарифмической зависимостью частоты от времени [9, 10]. В работе [9] показано, что время переходного процесса при пуске мощных асинхронных двигателей пропорционально моменту инерции ротора и установившемуся коэффициенту скольжения ротора.

Гидроопоры

В системах со многими источниками вибрации всегда возможна синхронизация на одной или нескольких частотах. Вследствие этого эффекта уровень виброактивности может резко возрасти. Для гашения повышенной вибрации необходимо прежде всего развязать между собою источники вибрации. Широко применяемые в настоящее время для гашения вибрации обычные резинометаллические демпферы не всегда удовлетворяют требованиям, предъявляемым к системам с повышенной виброактивностью. Принцип действия гидравлической виброопоры основан на эффекте поглощения энергии колебаний в вязкоупругих средах с реологическими свойствами путем создания в рабочих камерах турбулентных потоков в заданных направлениях [11].

Стендовые испытания асинхронного электродвигателя показали следующее: на частотах вибрации 10–55 Гц потребляемый пусковой ток возрастал до 3 А при номинальном токе 0.95 А. Время переходных процессов до установления номинального режима возрастало в пять раз. В спектре выходного сигнала появлялась низкочастотная составляющая 1–3 Гц, которая являлась диагностическим признаком биений. Биения являются наиболее негативными факторами действия вибрации на окружающую среду. Наиболее заметно это действие в системах, насыщенных мощным энергетическим оборудованием на мобильных объектах – в наземном и подземном электротранспорте. Это приводит к неоправданному росту затрат электроэнергии. При закреплении электродвигателя на платформе с гидроопорами его пусковой ток на частотах вибростенда 10–55 Гц превышал номинальный не более чем на 50%. Приведены данные о снижении уровней вибрации электрооборудования электровоза ВЛ-80С при использовании гидроопор, а также дан расчет экономической эффективности применения гидроопор в железнодорожном транспорте. Стендовые испытания показали, что демпфирующие характеристики гидроопор по сравнению с лучшими зарубежными фирмами (METZELER, MM-BOGE) на 3-4 дБ выше во всем частотном диапазоне испытаний, а резонансная частота при одинаковых нагрузках на 15 Гц ниже.

Работа выполняется при частичной финансовой поддержке РФФИ грант № 08-08-970557-Р_Поволжье.

Список литературы

1. Вибрации в технике. Т. 2. М.: Машиностроение, 1979. 351 с.
2. Фролов К.В. Колебания машин с ограниченной мощностью источника энергии и переменными параметрами // Нелинейные колебания и переходные процессы в машинах. М.: Наука, 1972. С. 5–16.
3. Блехман И.И. Синхронизация механических систем. М.: Наука, 1971.
4. Кононенко В.О. Нелинейные колебания механических систем. Киев: Наук. думка, 1980. 382 с.
5. Нагаев Р.Ф. Квазиконсервативные синхронизирующиеся системы. СПб.: Наука, 1996. 252 с.
6. Ходжаев К.Ш. Резонансные и нерезонансные случаи в задаче о возбуждении механических колебаний // ПММ. Т. 32, вып. 1. 1968. С. 85–100.
7. Гоноровский М.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. радио, 1986. 606 с.
8. Гордеев Б.А. и др. Системы виброзащиты с использованием инерционности и диссипации реологических сред. М.: Физматлит, 2004. 175 с.
9. Кацман М.М. Расчет и конструирование электрических машин. М.: Энергоатомиздат, 1984.

10. Брускин Д.Э., Зарохович А.Е., Хвостов В.С. Электрические машины. Ч. 1, 2. М.: Высш. школа, 1987.

11. Патент 2104424 РФ. Гидравлическая виброопора / Б.А. Гордеев, А.И. Весницкий, В.И. Марков, Е.И. Абакумов; заявл. 03.01.96; опубл. 10.02.98. Бюллетень №4.

ON UTILIZING HYDRAULIC DAMPERS IN MECHANICAL SYNCHRONIZING SYSTEMS

A.V. Leontyeva, A.B. Gordeyev, D.A. Kovriguine

The transient rotation of the asynchronous electric motor is studied under external loading generated by a vibration field. The present paper studies the synchronization effect between the angular velocity of the rotor and the frequency of external vibrations, which usually appears in practice under some defined conditions. This leads to the elongation of transient motions, as well as, to some electric energy loss. As a result the lifetime of the engineering structure falls down. Experimental studies of the problem of decreasing the vibration level are focused on using hydraulic dampers tested on the railway locomotive ВЛ-8ОС. Some economical benefits of using such dampers in practice are discussed.

Keywords: transient process, synchronization, rotor vibrations, hydraulic dampers, experiment.

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОНСТРУКЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЕХМЕРНОГО СЛУЧАЙНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

А.К. Любимов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

ljubimov@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Предложена экспериментально-расчетная методика определения собственных частот конструкции с использованием вибростенда Star28, обеспечивающего трехмерное псевдослучайное нагружение, и методов численного моделирования. Приведены результаты исследований для конструкции балочного типа.

Ключевые слова: вибростенд, трехмерное псевдослучайное нагружение, собственные частоты, конечно-элементный расчет, модальный анализ.

Введение

Уравнение колебаний линейной распределенной системы может быть представлено в виде [1] $L\mathbf{w} = \mathbf{q}$, где $\mathbf{w}(x, y, z, t)$ – вектор перемещения, $\mathbf{q}(x, y, z, t)$ – вектор внешних воздействий, L – линейный оператор. Известно [2], что энергия колебаний упругой конструкции при случайных внешних воздействиях со сплошным спектром сосредоточена в области собственных частот системы и в области, где располагаются пики спектральной функции внешнего воздействия. Таким образом, анализ спектральных плотностей ускорения дает возможность сделать выводы о собственных частотах конструкции.

Воздействие в эксперименте на упругую конструкцию нагрузкой, описываемой многомерным стационарным узкополосным процессом, и возможность определения спектральных характеристик позволяет установить в однократном эксперименте собственные частоты исследуемой конструкции.

Вибростенд Star28

Конструкция стенда обеспечивает случайные колебания рабочего стола с шестью степенями свободы. Возбуждение стола обеспечивают восемь пневматических вибраторов, каждый из которых генерирует псевдослучайное нагружение в диапазоне частот от 20 до 6500 Гц. Среднеквадратичное отклонение (СКО) ускорения может принимать значение от 3 до 30g. Входящее в состав стенда программное обеспечение предоставляет возможность задания истории нагружения, т.е. закона изменения величины СКО в процессе испытаний, определения численной оценки спектральной плотности, выполнения визуализации реализаций во времени величин ускорения и скорости, вычисления ряда других характеристик. Датчики ускорений (ДУ) позволяют проводить измерения в диапазоне частот от 2 до 10000 Гц.

Анализ вибрации стола стенда

Стол стенда представляет собой массивную квадратную металлическую плиту размером 711×711 мм с отверстиями для крепления испытываемого изделия. С целью изучения характера вибрации стола на него устанавливались три ДУ, позволяющие проводить измерения в трех взаимно ортогональных направлениях. Направления осей OX, OY были выбраны параллельно сторонам стола, а оси OZ – перпендикулярно плоскости стола. Программа нагружения задавалась в виде постоянного значения среднеквадратичного отклонения, равного 15g, в течение 5 минут. В результате проведенных экспериментов получены функции спектральной плотности $S_i(\omega)$, реализации величины скорости V_i и ускорения W_i, $i = x, y, z$, а также результаты обработки реализаций процесса ускорения методом «падающего дождя».

Полученные спектральные плотности по трем осям имеют четко выраженный пик, что позволяет сделать вывод об узкополосности случайных процессов, описывающих ускорение стола вдоль осей. Предположение об узкополосности подтверждается также характерной формой реализаций величины ускорения вдоль осей. Обработка реализаций процессов ускорений в направлении осей методом «падающего дождя» дает основание для вывода о том, что одномерные функции распределения значений случайного процесса могут описываться нормальным законом распределения.

Оценка собственных частот

Случайные колебания конструкции, испытываемой на стенде, носят пространственный характер, что затрудняет, а в ряде случаев исключает, возможность непосредственной интерпретации получаемых в эксперименте данных с целью определения собственных частот и постановке им в соответствие форм колебаний. Численные эксперименты, позволяющие моделировать поведение упругих конструкций, предоставляют эффективную возможность трактовки опытных данных.

Предложенная методика [3] экспериментально-расчетного определения собственных частот упругой конструкции включает в себя следующую последовательность этапов: создание расчетной схемы конструкции, учитывающей основные характерные черты геометрии, граничные условия и т.д.; проведение численных экспериментов (модального анализа) по оценке собственных частот и форм колебаний; определение с учетом полученных результатов места установки ДУ и их направления; проведение натурных испытаний для конструкции на вибростенде Star28 с учетом результатов численного эксперимента; проведение численных экспериментов (спектрального анализа) для оценки спектральных функций; интерпретация результатов натурного эксперимента на основе информации, полученной при выполнении численных экспериментов.

С использованием методики рассмотрена задача по определению собственных частот балки постоянного прямоугольного сечения, жестко защемленной на одном конце. Собственно балка крепилась к прямоугольному основанию, которое фиксировалось на рабочем столе. На свободном конце балки закреплялись с помощью стандартного устройства датчики ускорения, направленные вдоль оси балки (ось OY), ортогонально оси балки в плоскости стола (ось OX) и ортогонально плоскости стола (ось OZ).

Эксперименты выполнялись для балки длиной 85, 170 и 255 мм, шириной 20 и 50 мм. Толщина балки для всех вариантов равнялась 10 мм; материал, из которого выполнена балка – сталь 3. В результате проведенных испытаний для каждого варианта конструкции были получены реализации процессов ускорения и скорости в направлении осей OX, OY, OZ, спектральные плотности ускорения (рис. 1) и некоторые другие характеристики.

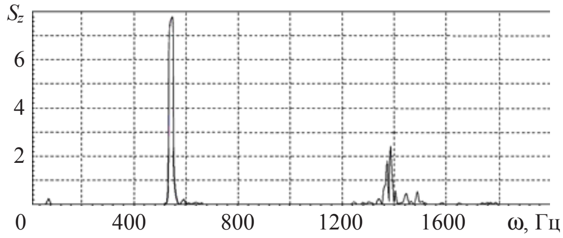


Рис. 1. Вид функции спектральной плотности $S_z(\omega)$ для балки длиной 255 мм, шириной 20 мм

Анализ вида функций спектральных плотностей, реализаций процессов изменения во времени скоростей, ускорений в направлении осей OX, OY, OZ для всех вариантов конструкции позволяет сделать вывод о том, что одномерные случайные процессы, описывающие изменение во времени величины ускорения, являются стационарными и узкополосными с нормальным законом распределения.

Предложенная методика, использующая технические и информационные возможности вибростенда Star28 в сочетании с численными экспериментами, позволяет эффективно определять собственные частоты упругих конструкций. При этом появляется возможность в однократном эксперименте определять несколько первых частот и мод, что значительно сокращает объемы и сроки испытаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 09-08-00827.

Список литературы

1. Болотин В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. Изд. 2-е, перераб. и дополн. М.: Стройиздат, 1981. 351 с.

2. Гладкий В.Ф. Прочность, вибрация и надежность летательных аппаратов. М.: Физматлит, 1975. 456 с.

3. Берендеев Н.Н., Жидков А.В., Любимов А.К. Экспериментально-расчетная методика определения собственных частот конструкции // Вестник ННГУ. 2010. №1. С. 144–151.

AN EXPERIMENTAL-COMPUTATIONAL TECHNIQUE TO DETERMINE NATURAL FREQUENCIES OF A STRUCTURE

A.K. Ljubimov

An experimental-computational technique is proposed to determine natural frequencies of a structure, using numerical simulation methods and a Star 28 shaker providing for 3D pseudorandom loading. The investigation results for a beam-type structure are presented.

Keywords: shaker, 3D pseudorandom loading, natural frequencies, finite element analysis, modal analysis.

Общая и прикладная механика
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (2), с. 217–218

УДК 531.391

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ И СТРУКТУРЫ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА ФРИКЦИОННЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ МЕТОДОМ ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

О.Л. Любимцева

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

mathstat2010@yndex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Исследуются области существования и устойчивости периодических решений и структура фазового пространства системы, совершающей одномерные вынужденные колебания с ударами о неподвижный ограничитель под действием силы сухого трения, которая меняется с изменением относительной скорости по кусочно-линейному закону. Задача представляет практический интерес, поскольку рассмотренная схема идеализирует работу вибротрамбовок и беспружинных вибромоторов.

Ключевые слова: точечное отображение, неподвижные точки, устойчивость.

1. Уравнения движения

Рассмотрим следующую механическую систему с одной степенью свободы (рис. 1): имеется подвижная масса m, которая двигается горизонтально с помощью ленточного механизма за счет силы сухого трения, зависящей от модуля относительной скорости $F(V)$, где $V = |V_0 - \dot{x}|$, V_0 – постоянная скорость ленты.

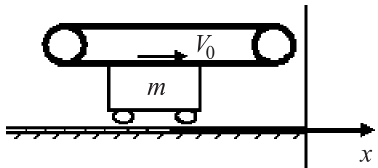


Рис. 1

Движение массы m перемежается ударами о неподвижную твердую стенку. Удары предполагаются мгновенными и характеризуются коэффициентом восстановления R, который находится в промежутке $0 \le R \le 1$. Считаем [1], что $F(V)$ определяется выражением

$$F(V) = \begin{cases} F_0 - \delta V, & 0 < V \le V_1, \\ F_0 - \delta V_1, & V > V_1, \end{cases} \qquad \delta = \text{const} > 0.$$

Уравнения движения такой массы можно при соответствующих предположениях, если только рабочим является падающий участок характеристики силы сухого трения (т.е. $V_1 \ge 2V_0$), записать в безразмерном виде:

$$\ddot{y} = 1 + \mu\dot{y} \quad \text{при} \quad y < 0, \dot{y} \ne 1, \qquad (1)$$

$$\ddot{y} = 0 \quad \text{при} \quad y < 0, \dot{y} = 1, \qquad (2)$$

$$\dot{y}_+ = -R\dot{y}_- \quad \text{при} \quad y = 0. \qquad (3)$$

Здесь и в дальнейшем $y = xF_0\alpha_0/(mV_0^2)$, $\tau = tF_0 \times \alpha_0/(mV_0)$ – безразмерное время, $\mu = (1-\alpha_0)/\alpha_0 \le 1$, $\eta_0 = (V_0 - V_1)/V_0 \le -1$, $\alpha_0 = F_*/F_0$; $F_* = F(V_0)$; α_0 характеризует крутизну зависимости $F(V)$ при $V = V_0$.

2. Точечное преобразование

Обозначим через $A(0, \dot{y}_0)$ начальную, а через $B(0, \dot{y})$ конечную точку точечного преобразования T. Ударными взаимодействиями (3) точка A переводится в точку $C(0, -R\dot{y}_0)$, затем точка C переводится фазовыми траекториями уравнения (1) в точку B. Таким образом, $\dot{y} = T(\dot{y}_0)$.

Общее решение уравнения (1), удовлетворяющее в начальный момент времени условиям $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = -R\dot{y}_0$, имеет вид:

$$y = \frac{1}{\mu}\left(\dot{y} + R\dot{y}_0 + \frac{1}{\mu}\ln\frac{1 - R\mu\dot{y}_0}{1 + \mu\dot{y}}\right). \qquad (4)$$

Положив в (4) $y = 0$, получим точечное отображение $\dot{y} = T(\dot{y}_0)$ для случая $\dot{y}_0 < 1$:

$$\dot{y} + R\dot{y}_0 + \frac{1}{\mu}\ln\frac{1 - R\mu\dot{y}_0}{1 + \mu\dot{y}} = 0.$$

Неподвижные точки этого преобразования получаются как решения $\dot{y}_0^*$ уравнения

$$(1+R)\dot{y}_0 + \frac{1}{\mu}\ln\frac{1 - R\mu\dot{y}_0}{1 + \mu\dot{y}_0} = 0.$$

Неподвижная точка $\dot{y}_0^*$ является притягивающей при выполнении неравенства

$$R^2(1 + \mu\dot{y}_0^*)/(1 - R\mu\dot{y}_0) < 1.$$

3. Периодические движения системы

В работе доказано, что в системе существуют устойчивые периодические движения с $\dot{y} = \dot{y}_0 = 1$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$1 + R + \frac{1}{\mu}\ln\frac{1-\mu R}{1+\mu} < 0. \tag{5}$$

Решения неравенства (5) образуют область (G), указанную на рис. 2. Для любой пары (R, μ) из этой области имеется вышеуказанный тип периодических движений. Точки (R, μ^*), принадлежащие разделительной кривой, есть решения уравнения

$$1 + R + \frac{1}{\mu}\ln\frac{1-\mu R}{1+\mu} = 0. \tag{6}$$

Они разбивают пространство параметров (R, μ) на две области и являются бифуркациями этого пространства. Для каждой точки (R, μ^*) имеем полуустойчивый цикл $\dot{y}_0^* = 1$.

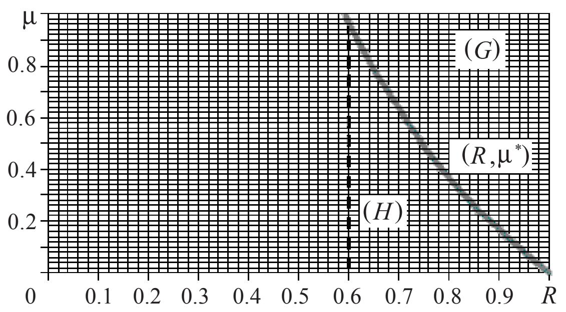


Рис. 2

Заметим, что для значений $R < R_{\text{кр}} \approx 0.59$ (см. рис. 2) не найдется значения $\mu \le 1$, при котором в системе имеется предельный цикл, отличный от тривиального притягивающего цикла $\dot{y}_0^* = 0$. Далее везде $R \ge R_{\text{кр}}$.

Пусть пара (R, μ) не является решением неравенства (5) (область (H) на рис. 2; точки (R, μ) для определенности будем выбирать на вертикальной прямой, содержащей точку (R, μ^*)). Тогда точечное преобразование имеет только одну неподвижную точку – притягивающую точку $\dot{y}_0^* = 0$, т.е. имеем затухающие движения. Если точка (R, μ) является решением неравенства (5) (область (G) на рис. 2), то точечное отображение имеет три неподвижные точки, две из которых являются притягивающими ($\dot{y}_0{}^* = 0$ и $\dot{y}_{02}^* = 1$), а третья – отталкивающая $(0 \ne \dot{y}_{01}^* < 1)$. Последнюю точку можно найти из равенства $\mu^* = \mu\dot{y}_0$, (в этом случае $\mu^* < \mu$), где μ^* – решение уравнения (6). Заметим, что в этом случае изображающая точка фазовой траектории для значений $0 < \dot{y}_0 < \dot{y}_{01}^*$ приближается к притягивающей точке $y_0^* = 0$. Если же $\dot{y}_{01}^* < \dot{y}_0 < 1$, то изображающая точка приближается к притягивающей точке $y_{02}^* = 1$. Все вышесказанное можно наглядно проиллюстрировать на соответствующих диаграммах Кенигса – Ламерея.

Список литературы

1. Баландин Д. В. Фрикционные автоколебания в зазоре // Изв. РАН. Сер. Механика твердого тела. 1993. № 1. С. 54–60.

2. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний // Изв. вузов. Радиофизика. 1958. Т. 1, № 1, 2.

THE STUDY OF PERIODIC MOTIONS AND THE STRUCTURE OF THE PHASE SPACE OF FRICTIONAL SELF-OSCILLATIONS USING THE METHOD OF POINT MAPPINGS

O.L. Lyubimceva

The paper investigates the existence and stability of periodic solutions and the structure of the phase space of the system undergoing a one-dimensional forced oscillation with impacts on a fixed limiter under the influence of dry friction force, which varies with the relative velocity according the piecewise-linear law. This problem is solved by point maps under the assumption that the falling portion of the characteristic of the dry friction force works. Using the method described above, the values of the coefficient of restitution of the velocity of the body impacting on the limiter, and the coefficient which characterizes the steepness of the dependence of the friction force for which can a stable periodic regime is possible in the system. The problem is of practical interest, since the considered scheme idealizes the work of vibrating tampers and springless vibration motors.

Keywords: point mapping, fixed points, stability.

УДК 519.21

СТОХАСТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ

А.Ф. Ляхов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

Lyakhov@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Показывается возможность применения метода стохастической аппроксимации Робинса – Монро и метода Мильштейна для решения краевой задачи баллистики с учетом случайного воздействия. Рассматриваются проблемы сходимости и устойчивости решения, оценивается энтропия решения.

Ключевые слова: случайный процесс, внешняя баллистика, стохастическая аппроксимация, энтропия.

Рассмотрим краевую задачу о попадании снаряда из начальной точки (0, 0) в точку $(1, b)$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -k(t,\omega)V_x^2, \\ \ddot{y} = -mg - k(t,\omega)V_y^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0)=0, \quad x(t_{\text{кон}})=1, \\ y(0)=0, \quad y(t_{\text{кон}})=b, \end{cases} \tag{1}$$

где $k(\omega)$ – коэффициент сопротивления, зависящий от случайной величины ω (рис. 1).

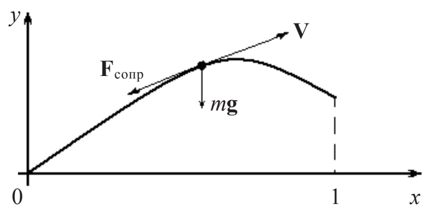


Рис. 1

Применяя «метод стрельбы», сводим данную задачу к задаче Коши с искомым параметром α:

$$\begin{cases} x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=V_0\cos(\alpha), \\ y(0)=0 \quad \dot{y}(0)=V_0\cos(\alpha). \end{cases}$$

В классической задаче решение сводится к поиску значения параметра α, при котором $x(t_{\text{кон}},\alpha)=1$, $y(t_{\text{кон}},\alpha)=b$, однако при учете случайного характера процесса это условие приобретает вид $M(x(t_{\text{кон}},\alpha))=1$, $M(y(t_{\text{кон}},\alpha))=b$, где $M(x(t_{\text{кон}},\alpha)), M(y(t_{\text{кон}},\alpha))$ – соответствующие математические ожидания случайных величин в краевой точке.

Полагая, что коэффициент сопротивления случайная функция, запишем соответствующие стохастические уравнения Ито:

$$\begin{cases} dV_x = -V_x^2 dw_1, \\ dV_y = -mgdt - V_y^2 dw_2, \end{cases}$$

где w_1, w_2 – винеровские процессы.

Для решения стохастической задачи Коши использовался метод Мильштейна при $r=2$

$$y_{p+1} = y_p + \sum_{i_1=1}^{m} \Sigma_{i_1} \hat{I}^{(i_1)}_{0_{\tau_{p+1},\tau_p}} + \Delta a +$$

$$+ \sum_{i_1,i_2=1}^{m} \Sigma_{i_1} G_0^{(i_2)} \hat{I}^{(i_1,i_2)}_{00_{\tau_{p+1},\tau_p}},$$

где $\hat{I}$ – аппроксимация повторных стохастических интегралов.

Предложенный алгоритм был реализован в программе, написанной в среде Matlab.

Вид траекторий в случае, когда моделирующий шум является стандартным винеровским процессом с нулевым математическим ожиданием, показан на рис. 2.

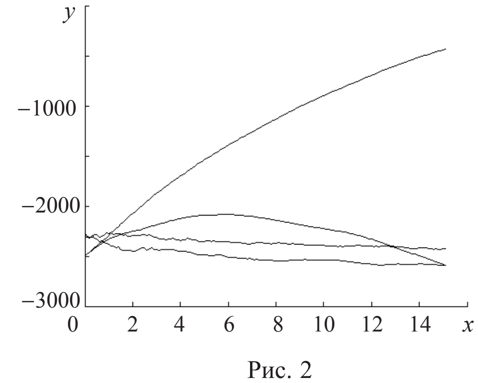


Рис. 2

Зная реализации, полученные с помощью

метода Мильштейна, ищем параметр α, используя процедуру стохастической аппроксимации.

На рис. 3 приведены графики увеличения разброса результатов в конечной точке при фиксированных начальных условиях.

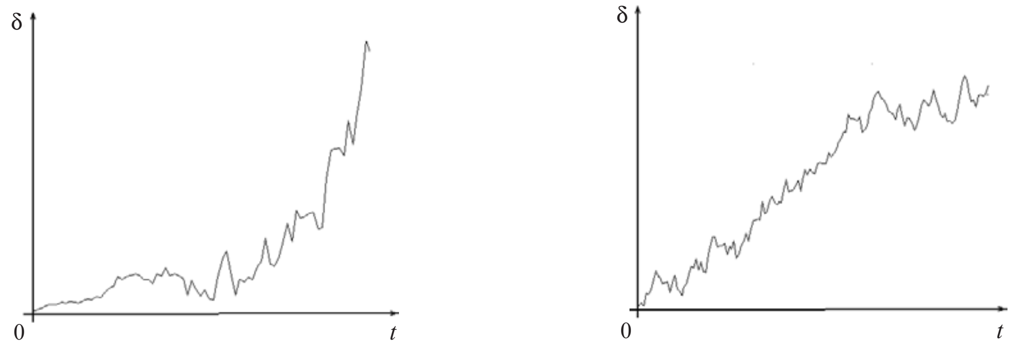


Рис. 3

При формальном применении классических численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений характер накопления ошибок экспоненциальный, а при использовании метода Мильштейна процесс накопления ошибок имеет линейный характер.

Использование метода Мильштейна численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений Ито позволяет получить результаты с энтропией, в три раза меньшей, чем при использовании стандартных методов.

Список литературы

1. Кузнецов Д.Ф. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. СПб.: Наука, 1999. 463 с.

2. Вазан М. Стохастическая аппроксимация М.: Мир, 1972. 295 с.

STOCHASTIC APPROXIMATION OF EXTERIOR BALLISTICS PROBLEM

A.F. Lyakhov

The possibility of applying stochastic approximation Robbins Monro method and Milstein method for solving boundary problems describing the ballistics problem accounting for random action is shown in the paper. Problems of convergence and stability of the solution are considered, the entropy of the solution is estimated.

Keywords: random process, exterior ballistics, stochastic approximation, entropy.

УДК 621.81

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ РОТОРА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОДВЕСЕ

С.А. Малкин

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

ser-malkin@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассмотрены вопросы управления движением ротора в электромагнитном подвесе (ЭМП), приведено описание объекта управления, построена математическая модель, описана модель системы управления ЭМП. Обсуждаются возможные пути физической линеаризации системы ЭМП в предположении управления по току, предложен метод альтернативной физической линеаризации. В расчетном эксперименте на примере реального стенда проведено сравнение линейной и нелинейной систем, показаны преимущества линейной системы.

Ключевые слова: электромагнитный подвес, управление, линеаризация обратной связью.

Введение

Как известно, система электромагнитного подвеса (ЭМП) изначально нелинейная [1]. Нелинейность вызвана квадратичной зависимостью силы электромагнита от тока и зазора, а также тем, что токи определяются прикладываемым к обмоткам напряжением. В ОКБМ была создана и эксплуатируется нелинейная система «ротор–ЭМП» [2]. К нелинейной системе электромагнитного подвеса, как и к любой другой нелинейной системе, невозможно применить хорошо разработанные и изученные методы синтеза законов управления, исследования устойчивости и т.д. [3]. Поэтому первостепенной задачей исследования нелинейной системы является ее линеаризация [4].

1. Объект управления

Объектом исследований является ротор на полном электромагнитном подвесе стенда «Минимакет» [3]. Подвес в осевом направлении описывается уравнением [1]

$$m\ddot{z} = -mg + \frac{L_0 S_0}{2}\left[\left(\frac{I_1}{S_0 - z}\right)^2 - \left(\frac{I_2}{S_0 + z}\right)^2\right], \quad (1)$$

где S_0, z – соответственно номинальный зазор в ЭМ и смещение ротора от центрального положения; I_1, I_2 – токи в верхней и нижней обмотках; L_0 – индуктивность при $z = 0$.

Подвес в радиальном направлении в предположении жесткого ротора описывается дифференциальными уравнениями:

$$J_x\ddot{\alpha} = -l_1(F_2^v - F_1^v) + l_2(F_2^n - F_1^n) - J_z\omega\dot{\beta},$$

$$J_y\ddot{\beta} = l_1(F_3^v - F_4^v) - l_2(F_3^n - F_4^n) + J_z\omega\dot{\alpha},$$

$$m\ddot{x} = F_3^v - F_4^v + F_3^n - F_4^n, \quad (2)$$

$$m\ddot{y} = F_2^v - F_1^v + F_2^n - F_1^n,$$

где x, y – координаты центра масс ротора; α, β – углы поворота ротора относительно осей y и x соответственно; l_1, l_2 – расстояния до верхнего и нижнего электромагнитных подшипников соответственно, индексы v и n указывают на электромагнитные силы, действующие на ротор со стороны верхних (v) и нижних (n) электромагнитных подшипников; J_x, J_y, J_z – главные моменты инерции ротора, ω – заданная угловая частота вращения ротора относительно оси z.

2. Управление ЭМП

Традиционно канал управления ЭМП, как осевого, так и радиального, состоит из датчика перемещений ротора, ПД-регулятора и исполнительного органа, состоящего из электромагнита.

Обычный способ избавиться от нелинейности токов при ПД-управлении – это введение так называемых токов смещения, которые симметрично прибавляются и вычитаются в каждой обмотке. Такой прием называется якобиан-линеаризацией и позволяет разложить функцию силы электромагнита в ряд Тейлора, тем самым математически линеаризуя систему. Очевидно, что считать систему линейной в этом случае можно только при небольших отклонениях от положения равновесия (нулевой точки). На практике при работе роторных машин на ЭМП амплитуда колебаний часто достигает значительных величин. Работоспособность машины при рассмотрении в условиях математической линеаризации невозможно гарантировать. Поэтому предпочтительно, чтобы электромагнитная сила линеаризовалась не математически, а физически.

В предположении управления по току (требуемое значение тока управления обеспечивается точно в любой момент времени) подберем токи управления осевым ЭМП таким образом, чтобы замкнутая система приняла вид линейного осциллятора, не проводя при этом математической линеаризации силы ЭМ [5] в (1):

$$m\ddot{z} = -az - b\dot{z}, \qquad (3)$$

где a, b – произвольные положительные коэффициенты, характеризующие жесткость и демпфирование. Такой прием называется линеаризацией обратной связью.

Если выбрать токи управления I_1, I_2 в виде

$$I_1 = \frac{I_0}{S_0}\begin{cases}\sqrt{1+\dfrac{(1+\varepsilon)|az+b\dot{z}|}{F_0}}(S_0-z) \text{ при } az+b\dot{z}<0,\\ \sqrt{1+\dfrac{\varepsilon|az+b\dot{z}|}{F_0}}(S_0-z) \text{ при } az+b\dot{z}\geq 0,\end{cases} \qquad (4)$$

$$I_2 = \frac{I_0}{S_0}\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\varepsilon|az+b\dot{z}|}{F_0}}(S_0+z) \text{ при } az+b\dot{z}<0,\\ \sqrt{\dfrac{(1+\varepsilon)|az+b\dot{z}|}{F_0}}(S_0+z) \text{ при } az+b\dot{z}\geq 0,\end{cases} \qquad (5)$$

где $\varepsilon \geq 0$ – неотрицательное число, служащее для введения токов смещения; $F_0 = mg$, а сила тока I_0 компенсирует силу тяжести и определяется из условия $L_0 I_0^2 / 2S_0 = mg$, то получим требуемое уравнение (3).

Аналогично осевому ЭМП линеаризуется система (2) для радиального движения ротора. После подстановки выражений для токов типа (4), (5) в исходную систему (2) можно получить линейную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} J_x\ddot{\alpha} &= -l_1 l_2\ (a\alpha + b\dot{\alpha}) - J_z\omega\dot{\beta},\\ J_y\ddot{\beta} &= -l_1 l_2\ (a\beta + b\dot{\beta}) + J_z\omega\dot{\alpha},\\ m\ddot{x} &= -(ax + b\dot{x}),\\ m\ddot{y} &= -(ay + b\dot{y}). \end{aligned} \qquad (6)$$

В соответствии с техническими требованиями, предъявляемыми к системе управления, возможны различные постановки задач выбора параметров a и b в системе (6).

Преимущество такой схемы по сравнению со схемой введения тока смещения является то, что внешняя линеаризация проводится только в той катушке, в которую подается ток управления. Поэтому уменьшаются потери потребляемой электрической энергии в ЭМ.

Список литературы

1. Schweitzer G., Maslen E. Magnetic Bearings. London: Springer, 2009.
2. Востоков В.С., Друмов И.В., Колесова Ю.А., Малкин С.А. Цифровая нелинейная система управления электромагнитным подвесом ротора турбогенератора для АЭС с газовым реактором // Вестник ННГУ. 2008. №5. С. 107–112.
3. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
4. Li L. Linearizing magnetic bearing actuators by constant current sum, constant voltage sum, and constant flux sum // IEEE Transaction on magnetic. 1999. V. 35, No 1. P. 528–535.
5. Kato Y., Yoshida T., Ohniwa K. Self-sensing active magnetic bearings with zero-bias-current control // Electrical Engineering in Japan. 2008. V. 165, No 2. P. 69–76.

MOTION CONTROL OF A MAGNETIC-SUSPENSION ROTOR

S.A. Malkin

Issues of motion control of a magnetic-suspension rotor are considered, a control object is described, a mathematical model is constructed, and an EMB control system model is described. Possible known methods of physical linearization of an EMB system in the assumption of the current-mode control are discussed, an alternative physical linearization method is proposed. Linear and non-linear systems are compared in an analytical experiment with reference to real test facility, and preferences of the linear system are shown.

Keywords: magnetic suspension, control, feedback linearization.

УДК 531.36

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

А.П. Маркеев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

markeev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Исследована нелинейная задача о движении динамически симметричного спутника относительно центра масс вблизи его относительного равновесия. Инерционные параметры спутника таковы, что на круговой орбите имеет место резонанс 1:1, а на орбите малого эксцентриситета резонанс 1:1:1.

Ключевые слова: спутник, равновесие, резонанс, периодическое движение, устойчивость.

Рассматриваются нелинейные колебания гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности ее устойчивого положения равновесия. Система либо автономна, либо близка к автономной из-за наличия малых внешних периодических сил. В случае когда система автономна, предполагается, что функция Гамильтона является знакоопределенной, а величины частот ее линейных колебаний равны или близки одна другой (резонанс 1:1). А если имеются внешние периодические силы, то их частота считается равной или близкой сразу к обеим частотам линейных колебаний порождающей автономной системы (двойной резонанс 1:1:1 в вынужденных колебаниях).

Исследование проводится на примере анализа движения спутника – твердого тела относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на круговой или на слабоэллиптической орбитах (эксцентриситет e орбиты центра масс равен нулю или мал). Предполагается, что спутник обладает динамической симметрией

На круговой орбите существует такое стационарное движение (отвечающее положению относительного равновесия спутника в орбитальной системе координат), при котором ось динамической симметрии тела направлена вдоль вектора скорости центра масс. Это положение относительного равновесия является частным случаем так называемой гиперболоидальной прецессии спутника, когда постоянная во все время движения проекция абсолютной угловой скорости спутника на его ось симметрии равна нулю [1–3]. Предполагается, что отношение α полярного и экваториального главных центральных моментов инерции тела равно числу 4/3 или близко к нему. При таком предположении на круговой орбите реализуется резонанс 1:1, а на слабоэллиптической – резонанс 1:1:1.

В случае круговой орбиты решена задача о существовании, бифуркациях и орбитальной устойчивости периодических движений спутника, рождающихся из его относительного равновесия.

Дан также анализ условно-периодических движений приближенной системы, учитывающей члены до четвертой степени включительно в нормализованном гамильтониане. При помощи КАМ-теории [4] показано сохранение этих движений при учете членов пятой и более высоких степеней в разложении функции Гамильтона в ряд в малой окрестности положения равновесия.

В случае слабоэллиптической орбиты подробно исследована нелинейная задача о существовании периодических движений оси симметрии тела с периодом, равным периоду движения его центра масс по орбите. Показано что в плоскости e, α параметров задачи из порождающей резонансной точки $e = 0$, $\alpha = 4/3$ исходят три кривые разветвления: $\alpha_i = 4/3 + e^{2/3}\delta_i + O(e)$ ($i = 1, 2, 3$), где

$$\delta_1 = 1/\sqrt[3]{2} \cong 0.79,$$
$$\delta_2 = \sqrt[3]{2/3} \cong 0.87,$$
$$\delta_3 = \sqrt[3]{26/3} \cong 2.05.$$

При переходе через эти кривые количество периодических движений меняется на 2 или на 4. Для значений параметров, не принадлежащих кривым разветвления, число периодических движений может равняться 5, 7, 11 или 15.

Исследована устойчивость по Ляпунову всех периодических движений в первом приближении. Для некоторых периодических движений рассмотрена нелинейная задача об устойчивости и получены выводы об их устойчивости для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий или о формальной устойчивости (устойчивости в приближении сколь угодно высокого конечного порядка). Обнаружено несколько случаев, когда периодические движения, устойчивые в первом приближении, на самом деле неустойчивы (из-за вторичных резонансов третьего и четвертого порядков).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №08-01-00363) и по гранту Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект № НШ-2975.2008.1).

Список литературы

1. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: МГУ, 1975.
2. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников // Итоги науки и техники. Сер. Исследование космического пространства. Т.11. М.: ВИНИТИ, 1978. 222 с.
3. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 396 с.
4. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 414 с.

NONLINEAR OSCILLATIONS OF A SATELLITE AROUND THE CENTRE OF MASS

A.P. Markeev

Nonlinear problem of the motion of a dynamically symmetrical satellite around the centre of mass in the vicinity of a relative equilibrium is investigated. Inertial parameters of the satellite are such that there are 1:1 – resonance in the circular orbit and 1:1:1 – resonance in an orbit of a small eccentricity.

Keywords: satellite, equilibrium, resonance, periodic motion, stability.

УДК 629.78

ВЛИЯНИЕ НЕПОСТОЯНСТВА АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО МОМЕНТА НА ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ В РЕЖИМЕ ГРАВИТАЦИОННОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

А.И. Маслова, А.В. Пироженко

Институт технической механики НАН Украины
и Национального космического агентства Украины, Днепропетровск

Maslova_anjyta@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассмотрено движение гравитационно-стабилизированных спутников относительно центра масс на высотах 550–750 км под действием переменного аэродинамического момента. Непостоянство аэродинамического момента обусловлено изменениями плотности атмосферы при движении спутника по орбите, зависимостью аэродинамического момента от ориентации спутника относительно набегающего потока и вращением атмосферы.

Ключевые слова: гравитационно-стабилизированный космический аппарат, аэродинамический момент, движение относительно центра масс.

Повышение точности стабилизации углового движения является важной задачей создания платформ космических аппаратов (КА). Ее решение предполагает тщательный анализ условий функционирования спутников и принятие обоснованных конструктивных решений, необходимых для обеспечения требуемой точности. Поэтому при разработке систем стабилизации является важным анализ влиянии одного из основных возмущающих воздействий на орбитах с высотами до 800 км – аэродинамического воздействия.

Исследованиям движения спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов посвящено множество работ. В работах В.А. Сарычева, В.В. Сазонова, В.М. Ковтуненко и др. указывалась необходимость учета в угловом движении КА как непостоянства плотности атмосферы при орбитальном движении, так и изменений ориентации КА относительно набегающего потока. Однако к настоящему времени системные исследования этих вопросов не были выполнены.

В [1] авторами была разработана модель аэродинамического момента, позволяющая выполнить анализ влияния переменности аэродинамического момента на динамику КА с гравитационной системой стабилизации (ГСС). ГСС представляет собой прикрепленную к КА штангу с гравитационным грузом на конце. В [2] были исследованы закономерности движения КА в плоскости круговой орбиты. Исследовалось движение КА в режиме гравитационной стабилизации, т.е. в таком режиме, при котором продольная ось КА движется в окрестности местной вертикали и амплитуды колебаний невелики. Показано, что в силу близости частот орбитального движения и колебаний спутника относительно центра масс (низкой динамической жесткости) вынужденные колебания КА из-за переменности плотности атмосферы могут быть весьма существенны и в несколько раз превосходить отклонения КА при стационарной плотности.

Представлена модель аэродинамического момента, учитывающая его непостоянство, и результаты исследований влияния переменности аэродинамического момента на пространственное движение осесимметричного КА с ГСС на кеплеровых круговых орбитах.

Моделирование аэродинамического момента

Рассматривается непостоянство аэродинамического момента на высотах 550–750 км, которое обусловлено изменениями плотности атмосферы при движении спутника по орбите, зависимостью аэродинамического момента от ориентации спутника относительно набегающего потока и вращением атмосферы. Учитываются изменения плотности по орбите, обусловленные суточным эффектом распределения плотности атмосферы и изменениями высоты орбиты в силу несферичности гравитационного поля Земли.

Аэродинамический момент, действующий на КА с ГСС, моделируется следующим образом [1]:

$$\mathbf{M}^a = a_0(1+\sigma_a\cos\beta)q\mathbf{b}_m,$$

где a_0 – постоянный коэффициент, характеризующий среднее аэродинамическое воздействие на КА; σ_a – постоянный коэффициент, характеризующий переменность аэродинамического момента в зависимости от ориентации КА к набегающему потоку; β – угол между продольной осью КА и вектором скорости КА относительно потока; $q=\rho V^2/2$ – скоростной напор, ρ – плотность атмосферы, $V = |\mathbf{V}|$, $\mathbf{V}$ – скорость КА относительно потока; $\mathbf{b}_m$ – орт, сонаправленный $\mathbf{k}\times\mathbf{e}_V$, где $\mathbf{k}$ – орт продольной оси КА, направленный от Земли, $\mathbf{e}_V = \mathbf{V}/V$.

Плотность атмосферы ρ при движении КА по орбите описывается следующим образом [1]:

$$\rho = b_0\left[1+\sum_{n=1}^{3}\mathbf{b}_n\cos(n\omega_0 t + f_n)\right] = b_0(1+\tilde{\rho}),$$

где b_0 – средняя на орбите плотность атмосферы; $\mathbf{b}_n$, f_n – коэффициенты, характеризующие распределение плотности при движении КА по орбите; ω_0 – угловая скорость орбитального движения; t – время; $\tilde{\rho}$ характеризует переменность плотности атмосферы на орбите.

Для рассматриваемых высот предполагается, что атмосфера полностью увлекается вращением Земли. Тогда можно записать

$$\mathbf{e}_V = \mathbf{e}_1\tilde{V} + \mathbf{e}_2\varepsilon\cos u, \quad V = \omega_0 R\sqrt{1-2\frac{\omega_3}{\omega_0}\cos i},$$

где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ – орты осей Ox и Oy орбитальной системы координат $Oxyz$ (ось Ox направлена по трансверсали к орбите, ось Oz – по радиусу-вектору КА $\mathbf{R}$, ось Oy добавляет систему до правой прямоугольной); $\tilde{V} = (\omega_0 R - \omega_3 R\cos i)/V$ – постоянная величина, близкая к единице; $R = |\mathbf{R}|$; ω_3 – угловая скорость вращения атмосферы; i – наклонение орбиты; $\varepsilon = (\omega_3/\omega_0)\sin i$ – малая величина; u – аргумент широты.

Результаты исследований

Исследования пространственных малых колебаний КА, в отличие от классических работ, проводятся с учетом смещенности квазистационарного положения оси симметрии КА. Это положение определяется равенством гравитационного и квазистационарного аэродинамического моментов.

Для построения скалярных уравнений пространственного движения осесимметричного спутника относительно центра масс уравнение изменения кинетического момента проектируется не на оси связанной с телом системы координат (как при выводе динамических уравнений Эйлера), а на оси полусвязанной системы координат (одна ось которой совпадает с осью симметрии КА, а другая лежит в плоскости орбиты). При этом используется известное свойство осесимметричного тела, что оси любой прямоугольной системы координат, одна ось которой лежит на оси симметрии, будут главными осями инерции тела. Такой подход к построению уравнений движения известен в теории динамики твердого тела и применялся, в частности, при исследовании движения твердого тела в случае Лагранжа. В рассматриваемом случае движения этот подход особенно удобен, поскольку гравитационный и аэродинамический моменты не влияют на вращение КА относительно оси симметрии и не зависят от поворота спутника относительно этой оси. Учет этого факта позволил достаточно просто построить скалярные уравнения движения, которые удобны для проведения линеаризации в случае смещенности квазистационарного положения КА.

Показано, что малые колебания КА в плоскости орбиты не зависят от поперечных колебаний и описываются уравнением, с высокой точностью совпадающим с уравнением малых колебаний, полученным при исследовании движения КА в плоскости орбиты [2]. Показано, что поперечные колебания КА так же, как и колебания в плоскости орбиты, описываются уравнением типа Хилла с периодической правой частью.

Проведен анализ возможности возникновения резонансов в движении КА с ГСС и показано, что в поперечных колебаниях КА возможен линейный и параметрические резонансы. Их причинами могут быть как колебания КА в плоскости орбиты, так и переменность плотности атмосферы, ее вращение и смещение квазистационарного положения оси симметрии КА.

Построено приближенное аналитическое решение уравнения малых поперечных колебаний в нерезонансном случае. Показано, что в нерезонансных случаях амплитуда вынужденных аэродинамических поперечных колебаний КА значительно меньше амплитуды колебаний в плоскости орбиты.

Список литературы

1. Маслова А.И., Пироженко А.В. К моделированию аэродинамического момента, действующего на спутник // Космические исследования. 2010. Т. 48, №4.

С. 371–379.

2. Маслова А.И., Пироженко А.В. Влияние переменности аэродинамического момента на динамику гравитационно-стабилизированного КА в плоскости круговой орбиты // Техническая механика. 2009. № 3. С. 87–97.

THE EFFECT OF THE AERODYNAMIC MOMENT INSTABILITY ON THE SPACECRAFT MOTION IN THE GRAVITATIONAL-STABILIZATION MODE

A.I. Maslova, A.V. Pirozhenko

The motion of a gravity-stabilized spacecraft relative to the centre of the mass at the height of 550–750 km under the action of variable aerodynamic moment is considered. The variability of the moment is conditioned by atmospheric density changes in the orbit, dependence of the aerodynamic moment on the spacecraft orientation relative to the incident flow, and rotation of the atmosphere.

Keywords: gravity-stabilized spacecraft, aerodynamic moment, motion relative to the center of mass.

УДК 517.977.58

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

***А.Р. Матвийчук*[1], *А.Г. Малев*[1], *А.А. Зимовец*[2]**

[1]Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург
[2]Уральский федеральный университет, Екатеринбург

matv@uran.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Предлагаются три численных метода решения некоторых задач управления протяженными подвижными объектами на плоскости при наличии пространственных ограничений. Первые два метода базируются на методе построения оптимального управления с поводырем, в основу третьего лег алгоритм Дейкстры.

Ключевые слова: оптимальное управление, множества достижимости, фазовые ограничения.

Постановка задачи

Рассмотрим управляемый подвижный объект Υ^* в евклидовом пространстве R^m. Центр объекта Υ^* обозначим некоторой точкой O внутри него. Динамика точки O описывается уравнением:

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad t_0 < \vartheta < \infty. \qquad (1)$$

Здесь x – m-мерный фазовый вектор системы, u – управление. Будем предполагать, что традиционные условия существования, единственности и продолжимости решений на весь промежуток времени $[t_0, \vartheta]$ для системы (1) выполняются.

Пусть вместе с системой (1) заданы фазовое ограничение Φ и целевое множество X_f из $[t_0, \vartheta] \times \times R^m$, а также стартовое множество X_0 из $\Phi(t_0)$. Фазовое ограничение имеет непустые сечения $\Phi(t) = \{x \in R^m : (t,x) \in \Phi\}$, $t \in [t_0, \vartheta]$. Предположим, что сечения $\Phi(t)$ и $X_f(t)$ меняются с течением времени непрерывно. Допустимым управлением $u(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, обозначим любую измеримую по Лебегу функцию такую, что $u(t) \in P$, $t \in [t_0, \vartheta]$, P – компакт в R^m.

Необходимо построить допустимое управление $u^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, которое приводит фазовый вектор системы $x(t)$ (траекторию центра O) системы (1) из X_0 в X_f за минимальное время так, чтобы подвижный объект $\Upsilon^* \subset \Phi(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Поставленную задачу будем решать приближенно, а именно, будем вести центр O на некоторую выбранную окрестность множества X_f таким образом, чтобы подвижный объект Υ^* оставался внутри заданной окрестности фазового ограничения $\Phi(t)$.

Общая схема приближенного численного решения методом многоугольников и сеточным методом состоит в следующем. Во-первых, мы переходим к рассмотрению задачи с подвижным центром O вместо задачи с подвижным объектом Υ^*. Это можно сделать, так как ориентация подвижного объекта фиксирована. С этой целью сужаем фазовое ограничение $\Phi(t)$ по определенному правилу и получаем фазовое ограничение $\Phi^*(t)$ уже для центра O. Во-вторых, переходим к дискретной модели времени путем разбиения временного интервала $t \in [t_0, \vartheta]$. После этого мы применяем трехэтапный метод построения управления. На первом этапе строятся множества достижимости, на втором строится ломаная-поводырь, которая проходит через множества достижимости. На третьем этапе вычисляется оптимальная по времени траектория движения центра O методом прицеливания на узлы ломаной-поводыря. Кратко опишем особенности каждого из трех методов.

Метод многоугольников

В этом методе все множества (подвижный многоугольник, стартовое и целевое множества, множества достижимости, фазовые ограничения) представлены в виде многоугольников. Многоугольники могут быть невыпуклыми. Каждый многоугольник определяется набором замкнутых ломаных линий. Одна из них задает внешнюю границу многоугольника, остальные – внутреннюю (в случае, если многоугольник имеет дыры). Все операции построения множеств достижимости базируются на операциях с многоугольниками (объединение, вычитание и пересечение). Поскольку все многоугольники сформированы набором замкнутых ломаных, это позволяет рационально использовать память ЭВМ и приводит к сокращению времени вычислений по сравнению с сеточными методами. С другой стороны, метод многоугольников имеет сравнительно сложную логику вычислений и требует очень высокой точности вычислений на ЭВМ. Кроме того, он применим только для задач на плоскости.

Сеточный метод

Сеточный метод использует не только дискретную модель времени, но и дискретную модель пространства, т.е. m-мерное пространство разбивается равномерной сеткой и все множества в нем представлены как множества ячеек этой сетки. Преимуществом данного метода является то, что он имеет простую логику вычислений множеств достижимости. С другой стороны, сеточный метод является очень затратным по времени и требует большого количества памяти ЭВМ (особенно для случая высокой точности вычислений). Это заставляет разрабатывать вспомогательные алгоритмы для уменьшения времени счета и уменьшения потребляемой памяти на ЭВМ. Одним из таких методов является алгоритм выделения границ, который позволяет исключить из расчетов внутренние ячейки множеств.

Метод, базирующийся на алгоритме Дейкстры

Для случая стационарной системы (1) где фазовое ограничение $\Phi(t)$ не меняется со временем, применяем некоторую разновидность сеточного метода – метод, основанный на алгоритме Дейкстры. Здесь также подменяем задачу подвижного объекта задачей подвижного центра O. В этом методе m-мерное пространство разбивается равномерной сеткой, и все множества представляются в виде множеств ячеек этой сетки. В отличие от предыдущего метода, здесь все ячейки рассматриваются как вершины некоторого взвешанного графа. Весом каждого ребра графа является время, необходимое для движения вдоль этого ребра. Ребра графа и их веса зависят от системы (1) и вида множества P. К преимуществам этого метода можно отнести относительно малое время вычислений и возможность рассмотрения изменяемой ориентации для подвижного объекта. В случае изменяемой ориентации приходится вводить дополнительные измерения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №10-01-96006-р_урал_а), по программе Президента РФ НШ-64508.2010.1 и программе Президиума РАН «Математическая теория управления» №29.

Список литературы

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Аппроксимация в дифференциальных играх. М.: Наука, 1974.
3. Матвийчук А.Р., Ушаков В.Н. О построении разрешающих управлений в задачах управления с фазовыми ограничениями // Теория и системы управления. 2006. №1. С. 2–20.
4. Незнахин А.А., Ушаков В.Н. Сеточный метод приближенного построения множества выживаемости для дифференциальных включений // ЖВМиМФ. 2000. Т.41, № 6. С. 895–908.
5. Saint-Pierre P., Quincampoix M. An algoritm for viability Kernels in Holderian case: approximation by discrete dynamical systems // J. Math. System Estim. Control. 1995. Vol. 5, No 1. P. 115–118.
6. Dijkstra E.W. A note on two problems in connection with graphs // Numerische Mathematik. 1959. V. 1. P. 269–271.

ON NUMERICAL METHODS FOR SOLVING SOME OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH PHASE CONSTRAINTS

A.R. Matviychuk, A.G. Malev, A.A. Zimovets

Three numerical methods of solving optimal control problems with space constrains are suggested. The first two methods are based on the methods of optimal control, the third method is based on Dijkstra algorithm.

Keywords: optimal control, attainability sets, phase constraints.

УДК 629.735

ОБ АВТОКОЛЕБАНИЯХ КОЛЕСА ОСНОВНОЙ ОПОРЫ ШАССИ САМОЛЕТА

В.С. Метрикин, М.А. Пейсель

НИИ прикладной математики и кибернетики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

v.s.metrikin@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Представлена физическая модель снабженного тормозом колеса основной опоры шасси самолета для анализа устойчивости качения. Разработана математическая модель возмущенного движения колеса. Показано, что при определенных параметрах тормоза возможна раскачка колебаний.

Ключевые слова: основная опора ЛА, математическая модель, тормозное устройство, устойчивость, шимми.

Известно, что для исключения возможности шимми – самовозбуждающихся колебаний колеса передней опоры шасси при движении самолета по земле – принимаются конструктивные меры на основании теоретических исследований [1, 2] и др. В настоящее время возникла необходимость анализа условий предотвращения колебаний колеса основной опоры шасси снабженного тормозом. Эта проблема рассматривалась в работах ряда авторов (см. [3–7] и приведенную в них литературу).Так, в [3] анализируются автоколебания четырехколесной основной опоры, снабженной тормозной системой, вызванные «ложными» (из-за нежесткости элементов шасси) срабатываниями инерционных датчиков автомата торможения. Показано, что эти колебания могут быть устранены введением специальных задерживающих фильтров. В [4] приведены особенности расчета тормоза на прочность при воздействии на колесо боковых перегрузок. Тормоз представлен в виде пакета тормозных дисков, свободно перемещающихся в пазах корпуса тормоза и обода колеса вдоль оси колеса. Показано, что в результате столкновения тормозного пакета с корпусом тормоза могут возникнуть большие осевые нагрузки на корпус. Пиковые значения тормозного момента уменьшают путем установки в тормозном пакете упругих демпфирующих элементов. В [5, 6] изучаются автоколебания при торможении катящихся колес, отличающиеся от шимми тем, что подводимая в колебательную систему зависит от определяемого боковыми движениями изменения тормозных моментов на колесах. Обратную связь образует дополнительный осциллятор – рабочая жидкость в трубопроводе, соединяющем колеса двухколесной опоры и сжатые упругие элементы тормозов. В определенных условиях обратная связь оказывается положительной, и при «резонансе» возникают условия для потери устойчивости. Исследованы условия возбуждения автоколебаний на примере одной из простейших моделей установки колес. В [7] предложена математическая модель колебаний тормозящихся колес основной опоры шасси, позволяющая исследовать условия возникновения как боковых и угловых, так и продольных колебаний двухколесной опоры. Исследовано влияние параметров опоры на расположение границ областей устойчивости на основе «падающей» характеристики тормозного момента при сжатом давлением жидкости пакете тормозов. Вследствие симметричности установки колес колебания в продольном направлении не связаны с крутильными и боковыми смещениями.

В перечисленных работах не изучены вопросы устойчивости качения несимметрично установленного колеса на телескопической подвеске, при установке пакета тормозных дисков с люфтом в корпусе тормоза, и при отсутствии давления в тормозной системе. Не исследовалась также влияние изменения тормозного момента, обусловленного поперечным смещением колеса, на продольные движения.

При выводе уравнений динамики рассматриваемой схемы опоры используем следующие предположения:

– самолет движется по земле с достаточно большой постоянной скоростью V прямолинейно и равномерно, и его основная опора находится под постоянной вертикальной нагрузкой;

– шток может поворачиваться относительно оси стойки Y' на угол θ, а конец штока перемещаться на величину x', при этом на стойку действуют момент $M_{Y'}$ и усилие $P_{X'}$, равные $M_{Y'} = C_\theta\theta + h_\theta\dot{\theta}$, $P_{X'} = C_{X'}x' + h_{X'}\dot{x}'$, где C_θ и $C_{X'}$ –

крутильная и лобовая жесткости стойки, h_θ и $h_{X'}$ – коэффициенты конструктивного демпфирования. Принимаем, что разница в углах поворота штока относительно осей Y, Y', а также между смещениями x, x' пренебрежимо мала;

– ось колеса имеет возможность перемещаться в боковом направлении на величину z, при этом на колесо действует усилие $P_Z = C_Z z + h_Z \dot{z}$, где C_Z, h_Z – боковая жесткость и коэффициент конструктивного демпфирования соответственно;

– при колебаниях по координатам x, θ, z колесо совершает дополнительные повороты на угол η относительно оси вращения;

– шина упругая в продольном направлении;

– качение происходит без проскальзывания центра контакта в поперечном и в продольном направлениях;

– кинематические связи и силы, действующие в поперечном и в продольном направлениях, определяются, как и в работе [1]. При этом величина радиуса R линии качения центра контакта достаточно велика и поэтому $R^{-1} \approx 0$;

– установка пакета тормозных дисков моделируется схемой, где масса пакета m_2 имеет возможность перемещаться относительно оси корпуса тормоза, жестко соединенного с ободом, на величину $u = z - \delta$ при этом сжимая упругие элементы c_δ переменной жесткости;

– между пакетом дисков и корпусом тормоза включен демпфер с характеристикой $\Phi_1 = h_\delta \dot{u}$;

– характеристика момента торможения зависит от усилия сжатия пакета дисков и от дополнительной угловой скорости вращения $\dot{\eta}$ и имеет вид $M_T = |k_1 \Phi(u)| - H\dot{\eta}$;

– смещение x при действии на колесо статического момента M_z может быть представлено в виде $C_X x = M_z / l$;

– давление жидкости в тормоз не подается;

– для возбуждения колебаний колесо принудительно отклоняется силой F_X, приложенной к центру колеса, а затем резко отпускается.

Выводы

1. Характер колебательного процесса при качении колеса с тормозным устройством после прекращения действия начального импульса обусловлен как взаимодействием упругой шины с землей, так и изменением тормозного момента вследствие боковых колебаний колеса.

2. В рассмотренных случаях качение колеса без учета действия тормозного устройства устойчиво.

3. Учет изменения тормозного момента вызывает раскачку колебательного процесса.

4. Увеличение массы пакета тормозных дисков приводит к раскачке колеса.

5. Повышение жесткости на кручение и коэффициента конструкционного демпфирования обеспечивает затухание начального отклонения даже при учете «падающей» характеристики тормозного момента.

6. Увеличение жесткостных и демпфирующих параметров опоры происходит с ростом величины обжатия штока опоры, поэтому при минимальном обжатии штока во время касания земли колесом при посадке создаются наиболее благоприятные условия для колебания колеса с тормозным устройством.

Список литературы

1. Гоздек В.С. Устойчивость качения сблокированных ориентирующихся колес шасси самолета // Труды ЦАГИ. 1976. Вып. 1196. 19 с.
2. Метрикин В.С., Пейсель М.А. О влиянии коррекции гидропривода передней опоры шасси самолета на устойчивость от шимми и управляемость // Изв. вузов. Авиационная техника. 2001. №3. С. 42–44.
3. Максимова Т.И., Привен В.Д., Томин Б.П. Колебания стоек шасси самолета при торможении // Теория и практика проектирования пассажирских самолетов. М. 1976. С. 337–345.
4. Зверев И.И., Кокенин С.С. Проектирование авиационных колес и тормозных систем. М.: Машиностроение, 1973. С. 61–64.
5. Гончаренко В.И. Об одном виде автоколебаний колес шасси самолета // Ученые записки ЦАГИ. 1985. Т. XV1, №5. С. 67–73.
6. Гончаренко В.И. Об одном виде автоколебаний в механической системе с качением // Прикладная механика. 1985. Т. 21, №7. С. 104–109.
7. Баландин Д.В., Пейсель М.А. О колебаниях стойки шасси самолета при торможении // Изв. вузов. Авиационная техника. 1996. №2. С. 21–26.

ON THE MODELLING OF VIBRATIONS OF THE MAIN SUPPORT OF THE CHASSIS OF A PLANE ACCOUNTING FOR THE EFFECT OF THE BRAKING FORCE

V.S. Metrikin, M.A. Peisel

A physical model of the wheel of the main support of the plane chassis equipped with a brake is presented for analyzing its rolling stability. A mathematical model of the disturbed motion of the wheel is developed. It is shown that, for certain parameters of the brake, vibration instability is possible.

Keywords: main support LA, mathematical model, breaking system, stability, shimmy.

УДК 531.381

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ СПУТНИКА С МОДЕЛЬНЫМ ДЕМПФИРОВАНИЕМ

***С.А. Мирер*[1]*, И.В. Прилепский*[2]**

[1]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва
[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)

mirer@keldysh.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматривается задача об оптимальном гашении угловой скорости твердого тела. Механизм демпфирования, названный модельным, предполагает, что на теле вдоль трех фиксированных осей установлены устройства, вырабатывающие моменты, пропорциональные величинам проекций угловой скорости тела на эти оси. Целью исследования является определение параметров системы, при которых скорость демпфирования максимальна. Оптимизация проводится аналитически по коэффициентам демпфирования и ориентации осей моментных устройств в теле. Доказано, что максимальная эффективность демпфирования достигается при расположении моментных устройств вдоль главных осей инерции тела. Кроме того, доказан ряд экстремальных свойств тензора инерции произвольного твердого тела.

Ключевые слова: модельное демпфирование, степень устойчивости, тензор инерции.

Обсуждается задача оптимального гашения малой угловой скорости твердого тела. В частности, это может быть космический аппарат (спутник) на достаточно большом удалении от притягивающего центра, когда действующими на него гравитационными моментами можно пренебречь. Предполагается, что на теле по трем осям установлены устройства, вырабатывающие управляющие моменты, пропорциональные проекциям угловой скорости на эти оси. Такая система может быть реализована, например, с применением маховиков при наличии датчиков угловой скорости. Подобный тип демпфирования уже рассматривался в [1], где был назван модельным. В качестве меры быстродействия в таких задачах традиционно используется величина степени устойчивости [2]. Аналитически определяются оптимальные параметры системы, при которых степень устойчивости максимальна.

Система с тремя моментными устройствами вдоль произвольных фиксированных в теле осей сводится к системе с устройствами, установленными вдоль трех взаимно перпендикулярных осей ($\mathbf{e}_i$), положение которых относительно главных центральных осей инерции тела ($\mathbf{E}_j$) определяется ортогональной матрицей направляющих косинусов $a_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{E}_j)$. Уравнения движения тела относительно центра масс имеют вид

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}=-\sum_{i=1}^{3}k_i(\boldsymbol{\omega},\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость тела, $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$ – тензор инерции в главных осях, k_i – коэффициенты моментных устройств. Характеристическое уравнение линеаризованной в окрестности положения равновесия системы записывается в виде:

$$I_1I_2I_3p^3+(k_1L_1+k_2L_2+k_3L_3)p^2+(k_1k_2J_3+ +k_2k_3J_1+k_3k_1J_2)p+k_1k_2k_3=0, \qquad (2)$$

где $J_i=I_1a_{i1}^2+I_2a_{i2}^2+I_3a_{i3}^2$ – момент инерции тела относительно оси $\mathbf{e}_i$; $L_i=I_2I_3a_{i1}^2+I_3I_1a_{i2}^2+ +I_1I_2a_{i3}^2$.

Экстремальные соотношения между элементами тензора инерции твердого тела

Теорема 1. *Для любого твердого тела* $I_1I_2I_3 \le J_1J_2J_3 \le [(I_1 + I_2 + I_3)/3]^3$, *причем правое равенство достигается только при коллинеарности осей* Ox_i *и* Oy_j *(порядок соответствия не имеет значения), а левое равенство имеет место при* $J_1 = J_2 = J_3$.

Полученный результат допускает геометрическую интерпретацию. Пусть имеется трехосный эллипсоид с полуосями a, b, c. Тогда всегда можно ввести декартову систему координат с началом в центре эллипсоида таким образом, что точки пересечения координатных осей с эллипсоидом окажутся на одинаковом расстоянии d от его центра, причем

$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

Для произвольного твердого тела доказаны также неравенства [3]:

$$L_1L_2L_3 \ge I_1^2I_2^2I_3^2, \quad J_1J_2J_3 \ge J_iL_i \ge I_1I_2I_3$$
$$(i=1,2,3).$$

Оптимальные параметры. Случай пропорциональности k_i соответствующему моменту инерции

Поиск оптимальных параметров, при которых степень устойчивости уравнения (2) максимальна, проводится в два этапа. На первом этапе при фиксированных коэффициентах демпфирования определяется оптимальное положение осей демпфирования, на втором этапе определяются оптимальные коэффициенты демпфирования.

Поскольку J_i характеризует меру инертности тела при воздействии на него управляющего момента по оси $\mathbf{e}_i$, представляется естественным поставить задачу выбора оптимальных значений коэффициентов $\bar{k}_i = k_i / J_i$. В этом случае характеристическое уравнение (2) принимает вид

$$I_1I_2I_3p^3 + (\bar{k}_1J_1L_1 + \bar{k}_2J_2L_2 + \bar{k}_3J_3L_3)p^2 + (\bar{k}_1\bar{k}_2 + \bar{k}_2\bar{k}_3 + \bar{k}_3\bar{k}_1)J_1J_2J_3p + \bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3J_1J_2J_3 = 0, \quad (3)$$

для которого доказана

Теорема 2. *Максимум степени устойчивости достигается в случае, когда оси демпфирования параллельны главным центральным осям. При этом* $\xi_1 = \max\limits_{a_{ij}} \xi = \min\limits_{i} \bar{k}_i$.

При оптимальных параметрах уравнение (3) имеет три вещественных корня, самый правый из которых определяет степень устойчивости.

Оптимальные параметры. Общий случай

Теорема 2 полностью решает вопрос об оптимальной степени устойчивости для уравнения (3). Однако для реальных демпфирующих устройств, как правило, существуют ограничения на параметры k_i, а не $\bar{k}_i = k_i / J_i$. В связи с этим больший практический интерес представляет оптимизация степени устойчивости уравнения (2). На первом этапе определяется оптимальное положение осей демпфирования в теле. При этом предполагается $k_1 \le k_2 \le k_3$, $I_1 \le I_2 \le I_3$,

Теорема 3. *Максимум степени устойчивости уравнения* (2) *определяется формулой*

$$\xi_1(k_1,k_2,k_3) = \max_{a_{ij}} \xi(k_1,k_2,k_3,a_{ij}) = \min\{k_1/I_1, k_2/I_2, k_3/I_3\}$$

и достигается при коллинеарности осей демпфирования и главных осей инерции тела.

По существу, теорема 3 дает строгое обоснование гипотезы о пропорциональности коэффициентов k_i величинам моментов инерции тела относительно осей демпфирования в оптимуме. При доказательстве теорем 2 и 3 использовался подход, предложенный в [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00431) и по программе Президента РФ государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-6700.2010.1).

Список литературы

1. Луканин К.В., Сарычев В.А. Модельная задача о быстродействии и точности системы гравитационной стабилизации спутников. Препринт №47. ИПМ АН СССР, 1971.

2. Цыпкин Я.З., Бромберг П.В. О степени устойчивости линейных систем // Изв. АН СССР. ОТН. 1945. №12. С. 1163–1168.

3. Мирер С.А. О некоторых экстремальных соотношениях между элементами тензора инерции твердого тела. Препринт №55. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2009.

4. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Оптимальные параметры пассивных систем ориентации спутников // Космические исследования. 1976. Т. 14, №2. С. 198–208.

OPTIMAL PARAMETERS OF A SATELLITE WITH MODEL DAMPING

S.A. Mirer, I.V. Prilepskiy

A problem of optimal damping of the angular velocity of a rigid body is considered. Model damping implies that three damping devices installed along three axes («damping axes» which are fixed in the body) produce control torques proportional to angular velocity projections on corresponding axes. This paper aims to determine the system parameters resulting in the maximum damping rate. Optimization is performed with respect to the damping coefficients and the attitude of damping axes. It is demonstrated that optimum is achieved when damping axes are parallel to the principal inertia axes of the body. In addition, several extremal properties of the inertia tensor of a rigid body are obtained.

Keywords: model damping, degree of stability, inertia tensor.

УДК 624.21+629.4.015+004.942

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ЭКИПАЖЕЙ И МОСТОВ

 Г.В. Михеев, Р.В. Ковалев, Е.А. Круговова

Брянский государственный технический университет

krugovova@umlab.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Представлена методика динамического анализа взаимодействия железнодорожных мостов и движущихся по ним экипажей. Методика реализована в программном комплексе «Универсальный механизм». Объект исследования рассматривается как гибридная модель, включающая абсолютно твердые и упругие тела. Уравнения движения упругого тела выводятся с использованием модального подхода. Рассматривается влияние числа и вида форм упругого моста на точность результатов. Сравниваются результаты расчетов полной и редуцированной конечноэлементных моделей мостов. Проводится сравнение с экспериментальными данными.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, динамика систем тел, динамика упругих тел, железнодорожный мост, подвижная нагрузка.

Повышение скоростей движения пассажирских и грузовых поездов, а также увеличение допустимой нагрузки на ось в последние десятилетия способствовали повышению научного интереса к проблеме анализа взаимодействия железнодорожных мостов и экипажей [1–3]. Основным объектом исследований может быть как мост, так и железнодорожный экипаж. Цель исследований – выявление опасных режимов движения и параметров поезда, а также особенностей конструкции моста, приводящих к резонансам. Большая амплитуда вибраций моста при резонансе может стать причиной потери контакта колес с рельсами и превышения уровня допустимых напряжений в элементах конструкций моста и экипажа.

Компьютерное моделирование – эффективный способ анализа динамики железнодорожных мостов при движении по ним поездов. Рассмотрена методика создания комплексной компьютерной модели, включающей в себя железнодорожный мост и поезд, для анализа их совместной динамики (рис. 1). Данный подход реа–лизован в программном комплексе «Универсальный механизм».

Железнодорожный мост и экипаж рассматриваются как механические системы, включающие абсолютно твердые и упругие тела [4].

Уравнения движения тел с учетом упругости строятся с использованием метода присоединенной системы координат [5]. Малые упругие перемещения тела описываются методом суперэлементов с использованием модального подхода [6]. В отличие от полных конечноэлементных моделей, такую модель будем называть редуцированной. Данные для редуцированной модели рассчитываются внешней конечно-элементной программой, после чего они импортируются в «Универсальный механизм».

Силы в контакте колесо–рельс приклады-

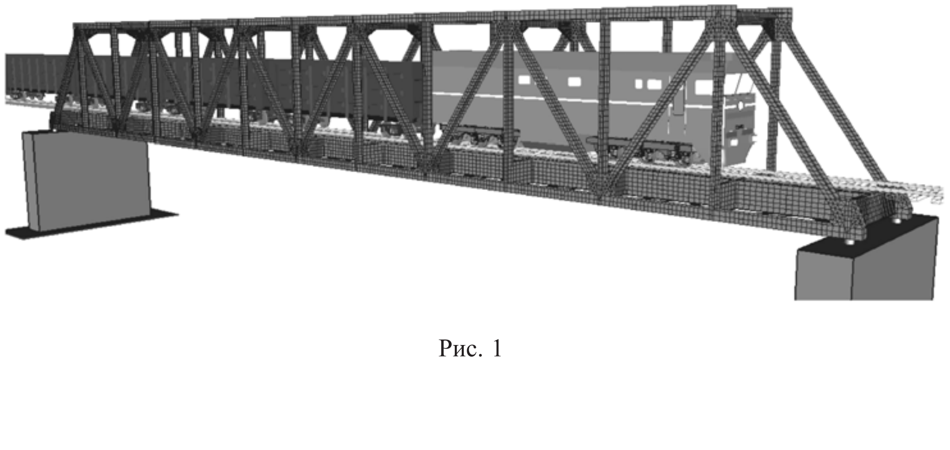


Рис. 1

ваются к упругому мосту как подвижная нагрузка. Поскольку силы могут быть приложены только в узлах конечно-элементной сетки, реализован простой алгоритм распределения силы, приложенной в произвольной точке моста, между ближайшими узлами.

Движение поезда по мосту может исследоваться в двух режимах, которые назовем раздельным и совместным моделированием. Совместная модель учитывает взаимное влияние динамики экипажа и моста. Раздельная, или упрощенная модель не учитывает прогибы и скорости точек моста при расчете сил в контакте колесо–рельс, то есть раздельная модель применяется только для анализа динамики мостов.

Представлены результаты моделирования движения высокоскоростного и грузового поездов по мостам. Приводится сравнение результатов расчета перемещений, ускорений и напряжений в контрольных точках моста, полученных с использованием раздельной и совместной моделей.

Точность моделирования с использованием представленного подхода оценивается путем сравнения с результатами расчетов полных конечно-элементных моделей моста, а также с экспериментальными данными. Обсуждается влияние числа и вида упругих форм, используемых для создания модели моста, на точность результатов.

Показано, что для моделирования с приемлемой точностью требуется, как правило, не более двухсот форм упругого моста. Результаты моделирования с использованием полных и редуцированных конечно-элементных моделей практически совпадают. Относительная разница измеренных в эксперименте и рассчитанных перемещений и напряжений моста составляет от 15 до 20 процентов.

Сравнение результатов совместного и раздельного моделирования для рассмотренных моделей не показало существенных отличий напряжений и прогибов – относительная разница не превосходит десяти процентов.

Список литературы

1. Gong L., Cheung M. S. Computer simulation of dynamic interactions between vehicle and long span box girder bridges // Tsinghua Science And Technology. 2008. V. 13. N 81.

2. Xia H., Zhang N., De Roeck G. Dynamic analysis of high speed railway bridge under articulated trains // Computers and Structures. 2003. V. 81. P. 2467–2478.

3. Yang Y.B., Yau J.D. Wu Y.S. Vehicle-bridge interaction dynamics. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004.

4. Погорелов Д.Ю. Введение в моделирование динамики систем тел: Учеб. пособие. Брянск: БГТУ, 1997. 156 с.

5. Shabana A.A. Flexible multibody dynamics: review of past and recent developments//Multibody System Dynamics 1. 1997. P. 189–222.

6. Craig R.R. JR. Coupling of substructures for dynamic analysis: an overview // In AIAA Paper, No 2000-1573, AIAA Dynamics Specialists Conference, Atlanta, GA. April 5, 2000.

THE COMPUTER MODELING OF RAILWAY VEHICLE – BRIDGE INTERACTION

G.V. Mikheev, R.V. Kovalev, E.A. Krugovova

The present paper describes the CAE-based approach for the analysis of dynamics of a coupled model of a flexible railway bridge and a train. The approach is implemented in Universal Mechanism software. The railway bridge is considered to be a flexible multi-body system. The dynamics of flexible bodies are simulated using data imported from finite element analysis software. An application of the approach to the investigation of dynamics of a railway vehicle and a bridge involves taking into account the flexibility of the bridge. Comparison of flexible deflections and stresses for the full and reduced FE-models are presented. The simulation results of flexible deflections and stresses are contrasted with experiment data.

Keywords: multi-body system dynamics, vehicle-bridge interaction, moving load.

УДК 629.78

ОСОБЫЕ РЕЖИМЫ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗВОРОТА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

***А.В. Молоденков*[1], *Я.Г. Сапунков*[2]**

[1]Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов
[2]Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского

molalexei@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматривается задача оптимального разворота космического аппарата как твердого тела произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости космического аппарата в кватернионной постановке. В качестве критерия оптимальности используется функционал, который объединяет время и интегральную величину модуля вектора управления, затраченных на разворот космического аппарата. Приводятся исследования особых режимов управления космического аппарата и их приложения в частном случае сферической симметрии космического аппарата, для которого получен новый класс аналитических решений. Даются подтверждающие численные примеры.

Ключевые слова: твердое тело, космический аппарат, оптимальное управление, особый режим управления, разворот.

Рассматривается задача оптимального разворота космического аппарата (КА) как твердого тела произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА с ограничением на модуль управляющего воздействия в кватернионной постановке. Функционал качества в задаче объединяет два критерия: время и интегральную величину модуля вектора управляющего воздействия, затраченных на разворот КА; при этом каждый из критериев умножен на свой весовой коэффициент. Аналитическое решение этой задачи при произвольных граничных условиях не найдено даже в случае сферической симметрии КА, не говоря уже о его произвольной динамической конфигурации. Известны лишь некоторые частные случаи решения задачи, при этом для сферически симметричных КА эти решения получены в классе плоских эйлеровых разворотов. В общем случае приводятся только численные решения задачи и особыми режимами управления в таких решениях, как правило, пренебрегают (хотя они возможны). Поэтому исследование особых режимов управления в задаче оптимального разворота КА является актуальным. А расширение на основе этого класса аналитических решений задачи оптимального разворота КА в замкнутой форме имеет не только теоретический, но и большой практический интерес, так как позволяет использовать на борту КА готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории.

Постановка задачи имеет традиционную форму, управление задано кусочно-непрерывной функцией. Следуя принципу максимума Л.С. Понтрягина, формируется функция Гамильтона – Понтрягина и сопряженная система уравнений. Из условия максимума определяется структура оптимального управления, при этом управление может состоять из активных участков, участков свободного движения или иметь особые режимы. Для неособого режима оптимальное управление представляется как функция сопряженных переменных, а для особого режима определяется только направление вектора оптимального управления. В связи с этим переходят к исследованию производных разных порядков функции Гамильтона–Понтрягина. С использованием этого подхода показано, что в зависимости от соотношения между весовыми коэффициентами функционала качества, граничными условиями задачи и заданной величиной, ограничивающей модуль вектора управления КА, особый режим в задаче возможен. При этом особый режим управления может не иметь изолированного характера, т.е. возможен переход от участков активного и свободного движения КА к участкам особого режима управления и обратно. Получены условия переходов вектор-функции управления с одного режима на другой, система пяти первых интегралов задачи, справедливых для участков особого управления, и явное выражение для управляющего момента через угловую скорость КА и сопряженные переменные задачи. Представлены численные примеры.

В частном случае сферической симметрии КА показано, что особый режим управления имеет изолированный характер, т.е. при определенных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА движение может происходить только с особым управлением. Для этих случаев получено новое аналитическое решение задачи в классе конических движений. Представлено явное выражение для вектора угловой скорости КА, траектория углового движения сферически симметричного КА при особом управлении представляет собой регулярную прецессию, вектор оптимального управления КА перпендикулярен вектору угловой скорости. Получено соотношение между весовыми множителями функционала оптимизации и максимальным значением модуля управляющего момента, которое должно выполняться в этих случаях. Приводится пример такого движения КА. Полученное решение задачи в классе конических движений может найти свое применение при построении систем управления КА, как и известное аналитическое решение задачи в классе плоских эйлеровых разворотов.

Исследование продолжает разработки, начатые в [1–3].

Работа поддержана РФФИ (проект № 08-01-00310).

Список литературы

1. Сапунков Я.Г., Молоденков А.В. Численное решение задачи оптимальной переориентации вращающегося космического аппарата // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 6. С.10–11.

2. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Исследование особого режима управления в задаче оптимального разворота сферически-симметричного космического аппарата // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. №6. С. 47–54.

3. Молоденков А.В., Сапунков Я.Г. Исследование особого режима управления в задаче оптимального разворота осесимметричного космического аппарата // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2010. №6. С. 61–69.

SPECIAL CONTROL MODES IN THE PROBLEM OF THE OPTIMAL TURN OF A SPACECRAFT AND THEIR APPLICATIONS

A.V. Molodenkov, Ya.G. Sapunkov

The problem of the optimal turn of a spacecraft as a rigid body with arbitrary dynamic configuration under arbitrary boundary conditions on the attitude and the angular velocity of a spacecraft in the quaternion statement is considered. The functional that combines the time and and the integral value of the modulus of the control vector required for turning the spacecraft is used as the optimality criterion. The investigation of a special control mode of a spacecraft and their application in the particular case of spherical symmetry of a spacecraft are presented. Confirming numerical examples are given.

Keywords: rigid body, spacecraft, optimal control, special control mode, turn.

УДК 534.1,517.9

О ГЛОБАЛЬНОМ ИССЛЕДОВАНИИ ДВУХЧАСТОТНЫХ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К НЕЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРИРУЕМЫМ

А.Д. Морозов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

morozov@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматриваются системы с 3/2 и двумя степенями свободы, близкие к нелинейным интегрируемым. Для систем с 3/2 степенями свободы приводятся результаты исследования структуры резонансных зон (проходимые, частично проходимые и непроходимые; невырожденные и вырожденные). Используется метод усреднения, а также методы качественной теории и теории бифуркаций динамических систем. Если для систем с 3/2 степенями свободы в резонансных случаях усредненные системы двумерные, то для систем с двумя степенями свободы – трехмерные, определенные на полнотории. Обсуждаются результаты по исследованию таких частично усредненных систем. Наряду с этим приводятся полностью усредненные системы и обсуждается проблема глобального поведения решений. Рассмотрение иллюстрируется на примере уравнений типа Дюффинга – Ван-дер-Поля.

Ключевые слова: резонансы, предельные циклы, усреднение.

Рассматриваются системы вида

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} + \varepsilon g(x,y,\nu t), \quad \dot{y} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} + \varepsilon f(x,y,\nu t), \tag{1}$$

$$\ddot{x} + a(x) = \varepsilon F(x,\dot{x},y,\dot{y}), \quad \ddot{y} + b(y) = \varepsilon G(x,\dot{x},y,\dot{y}), \tag{2}$$

где функции H, f, g, a, b, F, G – достаточно гладкие по своим аргументам и периодические $\varphi = \nu t$ с периодом 2π, ν – параметр, ε – малый положительный параметр. К системам такого вида приводит решение многочисленных прикладных задач. В то же время они играют важную роль в теории нелинейных колебаний. Если посмотреть литературу, в которой рассматриваются системы такого вида, то во многих случаях можно увидеть предположение о линейности невозмущенных систем. В наших исследованиях невозмущенные системы нелинейные.

Предположим, что невозмущенные системы имеют ячейки, заполненные замкнутыми фазовыми кривыми. В таких ячейках системы (1), (2) удобно записать в переменных действие–угол. Система (1) преобразуется к виду

$$\dot{I} = \varepsilon P(I,\theta,\varphi) \equiv \varepsilon[f(x,y,\varphi)x'_\theta - g(x,y,\varphi)y'_\theta],$$
$$\dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon Q(I,\theta,\varphi) \equiv \omega(I) + \varepsilon[-fx'_I + gy'_I], \tag{3}$$
$$\dot{\varphi} = \nu,$$

а система (2) – к виду

$$\dot{I} = \varepsilon A(I,J,\theta,\varphi), \quad \dot{J} = \varepsilon B(I,J,\theta,\varphi),$$
$$\dot{\theta} = \omega_1(I) + \varepsilon C(I,J,\theta,\varphi), \tag{4}$$
$$\dot{\varphi} = \omega_2(J) + \varepsilon D(I,J,\theta,\varphi),$$

где функции P, Q, A, B, C, D – периодические по угловым координатам θ, φ с периодом 2π. Говорят, что в рассматриваемых системах имеет место резонанс, если частоты соизмеримы. Для систем вида (3) условие резонанса имеет вид $\omega(I) = (q/p)\nu$, а для (4) – вид $\omega_1(I) = (q/p)\omega_2(J)$, где p, q – взаимно простые целые числа. Для системы (3) из условия резонанса находим резонансные уровни $I = I_{pq}$. При этом резонанс называют невырожденным, если $d\omega(I_{pq})/dI \neq 0$. В противном случае резонанс называют вырожденным. Для системы (4) условие резонанса определяет на плоскости (I, J) резонансные кривые. Здесь также можно определить невырожденные и вырожденные резонансы.

В окрестности резонансных значений «действия» система (3) приводит к двумерной автономной усредненной системе на цилиндре, а система (4) – к трехмерной системе на полнотории.

Следует отметить проблемы теоретического исследования рассматриваемых систем и, в первую очередь, систем вида (2). Во-первых, это связано с тем, что трудно найти решение невозмущенных осцилляторов. В простейших случаях решение представляется через эллиптические функции, что приводит к проблемам в вычислении усредненных систем. Во-вторых, частоты невозмущенных осцилляторов зависят от значений интеграла энергии невозмущенных систем, что приводит к существованию всюду плотного множества резонансных значений энергии. В этом случае установить глобальное поведение решений в рассматриваемых ячейках можно лишь при неконсервативных возмущениях. В-третьих, в границу ячеек у невозмущенных систем могут входить контуры, составленные из сепаратрис и седел. Тогда у возмущенных систем может существовать гомоклиническая структура Пуанкаре и сложное поведение решений.

Важную роль в исследовании резонансных структур играют предельные циклы: автономных систем – для (1) и несвязанных систем – для (2). Для системы (1) это система

$$\dot{x}=\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}+\varepsilon\bar{g}(x,y),$$

$$y=-\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}+\varepsilon\bar{f}(x,y),$$

где $\bar{g}$, $\bar{f}$ – средние значения по φ функций f и g соответственно.

Используя [1–4], планируется рассмотреть следующие вопросы.

1. Системы с 3/2 степенями свободы.

1.1. Невырожденные резонансы: проходимые, частично проходимые и непроходимые резонансы; синхронизация и прохождение через резонанс; полигармонические возмущения.

1.2. Вырожденные резонансы: существование вырожденных резонансов; существование максимальной сепаратрисной сети; анализ резонансных зон вблизи вырожденных уровней; существование «вихревых пар».

1.3. Глобальное поведение решений.

2. Системы с двумя степенями свободы.

2.1. Структура невырожденных резонансных зон.

2.2. Полностью усредненная система и обсуждение проблемы глобального поведения решений.

2.3. Пример: система двух уравнений Дюффинга–Ван-дер-Поля.

Результаты численного счета, полученные с помощью программы WInSet [5], иллюстрируют теоретические результаты.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №09-01-00356), программы «Кадры» №НК-13П-13, Правительства РФ (грант №111.G34.31.0039).

Список литературы

1. Морозов А.Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. М.-Ижевск: РХД, 2005. 422 с.

2. Morozov A.D. On degenerate resonances and «vortex pairs» // RCD. 2008. Vol. 13, No 1. P. 27–36.

3. Morozov A.D, Kondrashov R.E. On resonances in systems of two weakly connected oscillators // RCD. 2009. Vol. 14, No 2. P. 237–247.

4. Кондрашов Р.Е., Морозов А.Д. К исследованию резонансов в системе двух уравнений Дюффинга – Ван-дер-Поля // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6, №2. С. 241 254.

5. Морозов А.Д., Драгунов Т.Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. М.-Ижевск: Изд-во Инст. компьют. исслед., 2003. 304 с.

ON THE GLOBAL INVESTIGATION TWO- FREQUENCY SYSTEMS CLOSE TO NON-LINEAR INTEGRABLE

A.D. Morozov

The systems with 3/2 and two degrees of freedom close to nonlinear integrable are considered. For systems with 3/2 degrees of freedom the results of research of structure of resonant zones (passable, partially passable and impassable; non-degenerate and degenerate) are presented. The method of averaging, and also methods of the qualitative theory and the theory of bifurcation of dynamic systems is used. If for systems with 3/2 degrees of freedom in resonant cases the average systems are two-dimensional, for systems with two degrees of freedom are three-dimensional determined on solid torus. The results on research of such partially average systems are discussed. Alongside with it the completely average systems are resulted, and the problem of global behavior is discussed. The consideration is illustrated on an example of the equations such as Duffing – Van-der-Pole.

Keywords: resonances, limit cycles, averaging.

УДК 534.1

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С БЛИЗКИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

А.И. Муницын

Ивановский государственный энергетический университет

munitsyn@rambler.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Исследуются вынужденные колебания нелинейной системы с двумя степенями свободы в окрестности главного резонанса. Разница между двумя собственными частотами колебаний полагается малой. Решение получено методом возмущений в сочетании с методом усреднения. Нелинейные силы являются причиной взаимодействия форм колебаний, что приводит к многозначности получаемых решений.

Ключевые слова: вынужденные колебания, нелинейная система, собственные частоты, метод возмущений, взаимодействие форм колебаний.

Рассмотрим колебания механической системы с двумя степенями свободы:

$$\ddot{\varphi}_1+\varepsilon\eta\dot{\varphi}_1+\varphi_1+\varepsilon\gamma(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\varphi_1=\varepsilon f_1\cos(\mu t+\psi_1),$$
$$\ddot{\varphi}_2+\varepsilon\eta\dot{\varphi}_2+(1+\varepsilon\delta)\varphi_2+\varepsilon\gamma(\varphi_1^2+\varphi_2^2)\varphi_2= \quad (1)$$
$$=\varepsilon f_2\cos(\mu t+\psi_2).$$

Данная система описывает, например, пространственные колебания стержня с близкими значениями изгибной жесткости в двух ортогональных направлениях в одномодовом приближении. Здесь точками обозначено дифференцирование по безразмерному времени, полученному путем умножения размерного времени на первую собственную частоту малых колебаний $\tau=\omega_1 t; f_1$, f_2, η, γ – безразмерные значения амплитуд внешней нагрузки, коэффициентов диссипации и нелинейности. Разница между двумя собственными частотами колебаний $\varepsilon\delta$ полагается малой. Малый параметр ε может быть введен выбором масштаба двух неизвестных функций перемещений φ_1 и φ_2, что позволяет применить эффективные методы нелинейной механики.

Представим систему (1) в стандартной форме при помощи перехода к медленным переменным

$$\varphi_k=a_k\cos(t+\alpha_k),\quad \dot{\varphi}_k=-a_k\sin(t+\alpha_k),\quad (2)$$
$$k=1,2,$$

где a_k и α_k – амплитуды и фазы парциальных колебаний, колебания рассматриваются в малой окрестности единичной частоты $\mu=1+\varepsilon\lambda$, $\varepsilon\lambda\ll 1$. Применяя метод усреднения, получаем систему уравнений в медленных переменных

$$\dot{a}_k=-\frac{1}{2}\varepsilon\eta a_k+\frac{(-1)^k}{8}\varepsilon\gamma a_1^k a_2^{3-k}\sin 2\Delta\alpha-$$
$$-\frac{1}{2}\varepsilon f_k\sin(\alpha_k-\psi_k),$$
$$\dot{\alpha}_k=-\varepsilon\lambda+\frac{1}{2}\varepsilon\delta(k-1)+\frac{3}{8}\varepsilon\gamma a_k^2+ \quad (3)$$
$$+\frac{1}{8}\varepsilon\gamma a_{3-k}^2(2+\cos 2\Delta\alpha)-\frac{\varepsilon f_k}{2a_k}\cos(\alpha_k-\psi_k),$$
$$\Delta\alpha=\alpha_2-\alpha_1,\ k=1,2.$$

Далее будем рассматривать установившиеся колебания, что соответствует нулевым левым частям уравнений. Численное решение системы нелинейных алгебраических уравнений (3) может быть получено методом продолжения решения по параметру. Пусть для системы уравнений $U_i(r,\lambda)=0$ при некотором значении λ^k известно приближенное решение $r^k=(b_1^k,b_2^k,\alpha_1^k,\alpha_2^k)^{\mathrm{T}}$, тогда для значения $\lambda^{k+1}=\lambda^k+\Delta\lambda$ приближенное решение представляется в виде $r^{k+1}=r^k+\Delta r$. Подставляя в систему (3) и линеаризуя полученные уравнения, определяем приращения неизвестных из системы $G\Delta r=p^k+R^k$, где $p^k=(0,0,\lambda^k,\lambda^k)^{\mathrm{T}}$, R^k – вектор невязки на предыдущем шаге решения, элементы матрицы G имеют вид $g_{ij}=dU_i/dr_j$.

Для исследования устойчивости полученных решений на основе второго метода Ляпунова рассмотрим некоторое возмущенное решение системы уравнений (3): $\hat{r}(t)=r(t)+\Delta r(t)$. После подстановки в систему и линеаризации получаем уравнения возмущенного движения первого приближения $\Delta\dot{r}=G\Delta r$. Знак действительной части всех собственных значений матрицы G позволяет сделать вывод об устойчивости решения.

Решение системы нелинейных уравнений (3) сводится к решению последовательности систем линейных уравнений. На каждом шаге вычислений контролируется величина невязки, и если относительная погрешность превышает заданную точность, то шаг варьируемой переменной уменьшается. При численном решении проводится исследование сходимости при разных значениях заданной точности вычислений. В точках ветвления решений за независимый параметр принимается переменная с наибольшим по модулю приращением на предыдущем шаге, что позволяет найти все существующие решения и построить многозначные амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики.

Зависимости $a_2(\lambda)$ (кривые *1*, *2*) и $a_1(\lambda)$ (кривая *3*) представлены на рис. 1 для значений параметров задачи $\gamma = 1$, $\eta = 0.2$, $\delta = 0.5$, $f_1 = 0$, $f_2 = 1$, что соответствует возбуждению колебаний в плоскости большей жесткости для системы с жесткой нелинейностью. Жирной линией показаны устойчивые решения, штриховой линией – скелетные кривые. Кривой *1* соответствуют колебания системы в направлении возбуждения ($a_1 = 0$). На этой кривой существует несколько точек ветвления: A_1B_1, A_2B_2, A_4B_4. Точка B_4, соответствующая максимуму амплитуды плоских колебаний, на рисунке не показана. В случае, когда одна из двух точек, например, A_1B_1, принята в качестве начального приближения, построено решение $a_2(\lambda)$ (кривая *2*) и $a_1(\lambda)$ (кривая *3*), соответствующее пространственной форме движения системы. При увеличении частоты возбуждения плоские колебания плавно переходят в пространственные. Дальнейшее увеличение частоты приводит к срыву в точке A_3B_3 на плоскую форму движения. Решение, соответствующее плоской форме (кривая *1*), может быть получено из решения плоской задачи, при этом участок между точкой A_1 и максимумом амплитудно-частотной характеристики в точке A_4 будет соответствовать устойчивому решению.

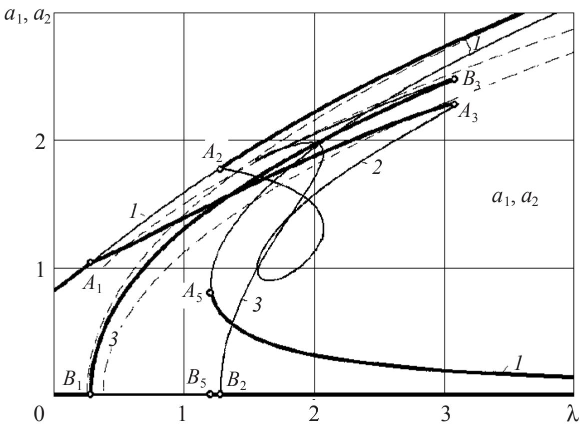


Рис. 1

В случае возбуждения колебаний в плоскости меньшей жесткости ($\delta = -0.5$ или $f_1 = 1, f_2 = 0$) получаем практически те же зависимости $a_2(\lambda)$ и $a_1(\lambda)$, но плоское решение между точками ветвления A_2B_2 и A_4B_4 является неустойчивым.

При отсутствии диссипативных сил можно получить аналитическое решение системы (3) для возбуждения колебаний под действием нагрузки f_2. Для этого вводится дополнительное предположение о наличии малой составляющей $f_1 \ll f_2$, на практике такая составляющая всегда присутствует, поскольку ни один источник гармонической нагрузки не является идеальным. Полученные решения подтверждают существование устойчивого участка на кривой *1*, соответствующего плоским колебаниям системы с большими амплитудами в резонансной области. Для системы с мягкой нелинейностью аналогичный устойчивый участок амплитудно-частотной характеристики существует только при возбуждении колебаний в плоскости меньшей жесткости.

FORCED OSCILLATIONS OF A NON-LINEAR SYSTEM WITH CLOSE VALUE OF NATURAL FREQUENCIES

A.I. Munitsyn

Forced oscillations of a non-linear system with two degrees of freedom in the neighborhood of the principal resonance are investigated using the asymptotic method. The difference between two natural frequencies is assumed to be small. The nonlinear forces are the reason of a relation between the oscillations in different directions.

Keywords: forced oscillations, non-linear system, natural frequencies, asymptotic method, relation between the modes.

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

М.А. Муницына

Московский госуниверситет инженерной экологии

Munitsyna@rambler.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Анализируются условия устойчивости установившихся движений тяжелого эллипсоида вращения на плоскости с вязким трением. Дается геометрическая интерпретация результатов. Проводится сравнение с соответствующими результатами в задачах движения эллипсоида на абсолютно гладкой и абсолютно шероховатой поверхностях.

Ключевые слова: устойчивость, стационарные движения, вязкое трение.

Рассматривается задача о безотрывном движении однородного тяжелого эллипсоида вращения на горизонтальной плоскости. Предполагается, что со стороны последней на тело в точке его контакта с плоскостью помимо нормальной реакции действует сила, пропорциональная скорости этой точки тела и противоположная ей по направлению (сила вязкого трения).

Вводится подвижная система отсчета с началом в центре масс эллипсоида и осями, направленными по его главным центральным осям инерции. В качестве уравнений движения эллипсоида выбраны уравнения из теорем об изменении количества движения и момента количества движения эллипсоида, условия постоянства единичного вектора восходящей вертикали и безотрывности эллипсоида от плоскости соответственно:

$$m\dot{\overline{v}} + [\overline{\omega}, m\overline{v}] = -mg\overline{\gamma} + N\overline{\gamma} + \overline{F}, \qquad (1)$$

$$J\dot{\overline{\omega}} + [\overline{\omega}, J\overline{\omega}] = [\overline{r}, N\overline{\gamma} + \overline{F}], \qquad (2)$$

$$\dot{\overline{\gamma}} + [\overline{\omega}, \overline{\gamma}] = 0, \qquad (3)$$

$$(\overline{u}, \overline{\gamma}) = 0. \qquad (4)$$

Здесь m – масса эллипсоида, $\overline{v}$ и $\overline{\omega}$ – соответственно векторы скорости центра масс и угловой скорости тела, g – ускорение свободного падения, N – величина нормальной составляющей реакции опоры, $J = \mathrm{diag}\,(J_1, J_2, J_3)$ – центральный тензор инерции эллипсоида, $\overline{r}$ и $\overline{u} = \overline{v} + [\overline{\omega}, \overline{r}]$ – соответственно радиус-вектор и вектор скорости точки касания эллипсоида с плоскостью, $\overline{F} = -mk\overline{u}$ – сила трения, k – коэффициент вязкого трения, $\overline{\gamma}$ – вектор восходящей вертикали ($\overline{\gamma} = -\mathrm{grad}\, f(\overline{r}) / \|\mathrm{grad}\, f(\overline{r})\|$, $f(\overline{r})$ – уравнение эллипсоида в главных центральных осях инерции).

Уравнения (1)–(4) допускают однопараметрические семейства решений:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \pm 1, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0,$$
$$\omega_3 = \omega = \mathrm{const}; \qquad (5)$$

$$\gamma_1 = \sin\psi, \quad \gamma_2 = \cos\psi, \quad \psi = \mathrm{const}, \quad \gamma_3 = 0,$$
$$\omega_1 = \omega\gamma_1, \quad \omega_2 = \omega\gamma_2, \quad \omega_3 = 0; \qquad (6)$$

$$\gamma_1 = \sin\theta \sin\omega t, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\omega t, \quad \gamma_3 = 0,$$
$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega = \mathrm{const}; \qquad (7)$$

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\omega_0 t, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\omega_0 t,$$
$$\gamma_3 = \cos\theta = \mathrm{const},$$
$$\omega_1 = \omega\gamma_1, \quad \omega_2 = \omega\gamma_2, \quad \omega_3 = \omega_0 + \omega\gamma_3, \qquad (8)$$

на которых проскальзывание отсутствует, а величина нормальной реакции опорной плоскости равна весу эллипсоида. Решениям (5) соответствуют равномерные вращения эллипсоида вокруг оси динамической симметрии, совпадающей с вертикалью. Решениям (6) соответствуют равномерные вращения эллипсоида вокруг вертикали, при которых ось его динамической симметрии горизонтальна. Решениям (7) соответствуют равномерные качения по плоскости экваториальным сечением эллипсоида. Решениям (8) соответствуют регулярные прецессии, при которых центр масс эллипсоида неподвижен, а точка его контакта с опорной плоскостью описывает окружность с угловой скоростью ω_0 на плоскости и окружность с угловой скоростью ω на поверхности эллипсоида [1]. Значения постоянных ω и ω_0 определяются углом нутации эллипсоида.

Находится критическое значение угловой скорости вращения эллипсоида ω_I такое, что вращения (5) вытянутых вдоль оси симметрии эллипсоидов (осевой радиус больше экваториального) устойчивы при угловых скоростях, больших критического значения, и неустойчивы в случае обратного неравенства. Вращения (5) сжатых эллипсоидов (осевой радиус меньше экваториального) устойчивы при $\omega < \omega_{\mathrm{I}}$ и неустойчивы при $\omega > \omega_{\mathrm{I}}$. От коэффициента вязкого трения устойчивость таких вращений не зависит.

Строятся области устойчивости вращений (6) на плоскости параметров (ω^2, k^2) для случаев сжатых и вытянутых вдоль оси симметрии эллипсоидов. Показано, что всегда существует одно критическое значение угловой скорости вращения ω_{II} такое, что вращения (6) вытянутых вдоль оси симметрии эллипсоидов устойчивы при угловых скоростях, меньших критического значения, и неустойчивы в случае обратного неравенства. Вращения (6) сжатых эллипсоидов устойчивы при $\omega > \omega_{\mathrm{II}}$ и неустойчивы при $\omega < \omega_{\mathrm{II}}$.

Находится критическое значение угловой скорости ω_{III} такое, что качения (7) вытянутых вдоль оси симметрии эллипсоидов устойчивы при угловых скоростях, меньших критического значения, и неустойчивы в случае обратного неравенства. Качения сжатых эллипсоидов устойчивы при $\omega > \omega_{\mathrm{III}}$ и неустойчивы при $\omega < \omega_{\mathrm{III}}$. От коэффициента вязкого трения устойчивость качений (7) не зависит.

Строятся области устойчивости прецессий (8) на плоскости параметров (ω^2, k^2) при различных значениях отношения осевого радиуса эллипсоида к экваториальному.

Устойчивость решений (5)–(8) исследуется также при $k = 0$ и $k = \infty$, соответствующих случаям абсолютно гладкой и абсолютно шероховатой плоскостей [2, 3], и сравнивается с полученными ранее результатами [4].

Дана геометрическая интерпретация полученных результатов. В трехмерном пространстве $(\omega_1^2 + \omega_2^2, \omega_3^2, \gamma_3^2)$ построены кривые изученных стационарных движений при различных значениях коэффициента вязкого трения и отношения осевого радиуса эллипсоида к экваториальному. Выделены устойчивые участки построенных кривых. На рис. 1 представлен случай вытянутых вдоль оси симметрии эллипсоидов при малых коэффициентах вязкого трения.

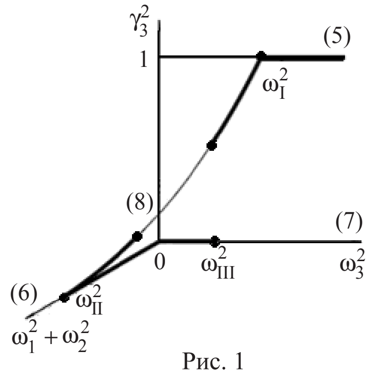


Рис. 1

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00292) и Совета по грантам Президента РФ (грант МК-698.2010.1).

Список литературы

1. Карапетян А.В. О регулярной прецессии тела вращения на горизонтальной плоскости с трением // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 568–573.
2. Карапетян А.В. О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 42–51.
3. Карапетян А.В. Об устойчивости стационарных движений систем с трением // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4.
4. Зобова А.А. Качественный анализ движения тела вращения на шероховатой плоскости: Дис… канд. физ.-мат. наук. М, 2008. 102 с.

THE STABILITY OF THE STEADY MOTION OF AN ELLIPSOID OF REVOLUTION ON A HORIZONTAL PLANE WITH VISCOUS FRICTION

M.A. Munitsyna

Conditions of stability of steady motion of a heavy ellipsoid of revolution on a horizontal plane with a viscous friction are analyzed. Comparison of results with similar problems of ellipsoid motions on absolutely smooth and absolutely rough surfaces is discussed. Geometrical interpretation of the results is given.

Keywords: stability, steady motion, viscous friction.

УДК 621.01:677.21

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМ ПРОЦЕССОМ ДЖИНИРОВАНИЯ

Д.М. Мухаммадиев

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз,
Ташкент (Узбекистан)

davlat_mm@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Создана автоматизированная система, исключающая забойные режимы пильных джинов, волокноочистителей и линтеров путем наблюдения процесса питания их хлопком. Найдены условия бесперебойного режима работы машин и механизмов, расположенных до и после пильных джинов, волокноочистителей и линтеров. Определены основные конструктивные, технологические и технико-эксплуатационные характеристики: повышение производительности, снижение затрат на переработку хлопка и сохранение качественных показателей выпускаемой продукции.

Ключевые слова: математическая модель, алгоритм управления, режим работ, механизм, машина, пильный джин, волокноочиститель, линтер, хлопок, питание, снижение затрат, сохранение качественных показателей волокна.

Принцип построения автоматизированной системы управления технологическими процессами джинирования

В иерархической системе управления производством хлопкоочистительной промышленности, которая должна насчитывать несколько ступеней, управление технологическими процессами находится на низшем уровне и должно обеспечить требуемое качество и количество продукции переработки хлопка-сырца (волокно, линт, семена) [1]. Это возможно при наличии совершенной системы управления технологическими процессами. Кроме того, совершенствование управления производством предоставляет комплексную задачу и требует системного подхода.

Необходимость системного подхода диктуется еще и тем, что применяемые в хлопкоочистительной промышленности технологические процессы представляют собой сложные объекты управления с большим числом входных и выходных параметров.

Сложные взаимосвязи между параметрами, характеризующими технологический процесс, наличие неоднородностей, распределенности в пространстве, нестационарности параметров, высокий уровень производственных шумов, недостаточная априорная информация о процессах и другие затруднения создают трудности в построении адекватных моделей технологических процессов и приходится уточнять математические модели объектов во время нормальной эксплуатации технологического оборудования [2].

Введение технологического процесса на хлопкоочистительном заводе должно удовлетворять нескольким, зачастую противоречивым требованиям, основными среди которых являются требования к качеству продукции и производительности установки.

Идентификация объектов хлопкоочистительного завода предусматривает решение задачи выбора структуры модели, оценки параметров, стационарности, линейности, выбора информативных переменных, оценки степени адекватности реальному объекту и т.п. Поэтому естественно стремление к объединению процессов идентификации и оптимального управления и к созданию общих подходов и алгоритмов, которые могут быть использованы для решения задач идентификации и оптимального управления. Адаптивный подход с использованием идентификатора как части блока управления по схеме объект–управляющее устройство–идентификатор дает возможность объединить решение задач идентификации и оптимизации. Проблема идентификации наряду с проблемой оптимизации является одной из основных в теории и практике управления технологическими процессами.

Алгоритмы функционирования технологических машин джинирования хлопка, волокноочистки и линтерования семян

Для определения основных факторов, влияющих на процесс джинирования, и нахождения оптимального рабочего состояния джина, при котором повысится качество выпускаемого продукта и возрастет производительность машин, необходим системный подход.

Одним из органов, обеспечивающих равномерное питание и требуемую производительность технологического оборудования, является питатель (рис. 1). Подачу хлопка в питатель регулируют изменением числа оборотов питающих валиков. Для организации бесперебойной работы необходимо оптимизировать режим работы питателя, что вызывает необходимость построения его математической модели. В качестве выходного параметра выбрана производительность Q питателя.

$$Q'=3186.7+872x_1+525.3x_2+133.3x_3+$$
$$+2266.7x_4+216x_1x_2+125.3x_2x_3+$$
$$+149{,}3x_2x_4-120x_1x_2x_3\,, \qquad (1)$$

где x_1 – влажность хлопка-сырца; x_2 – высота загрузки; x_3 – сорт хлопка-сырца, x_4 – скорость вращения питающих валиков.

Учитывая (1), можно описать производительность питателей по хлопку (Q_1 и Q_2) для двух пильных джинов и производительность волокноочистителя по волокну (q_1 и q_2), находящемуся на поточной линии:

$$Q_1=Q_2=2390+654x_1+394x_2+100x_3+1700x_4+$$
$$+162x_1x_2+94x_2x_3+112x_2x_4-90x_1x_2x_3\,,$$
$$q_1=q_2=796{,}7+218x_1+131.3x_2+33.3x_3+566.7x_4+$$
$$+54x_1x_2+31.3x_2x_3+37.3x_2x_4-30x_1x_2x_3\,. \qquad (2)$$

В результате найденные математические модели позволяют получить оптимальные варианты автоматизированного управления процесса джинирования, обеспечивающего бесперебойный режим работы машин и механизмов, расположен

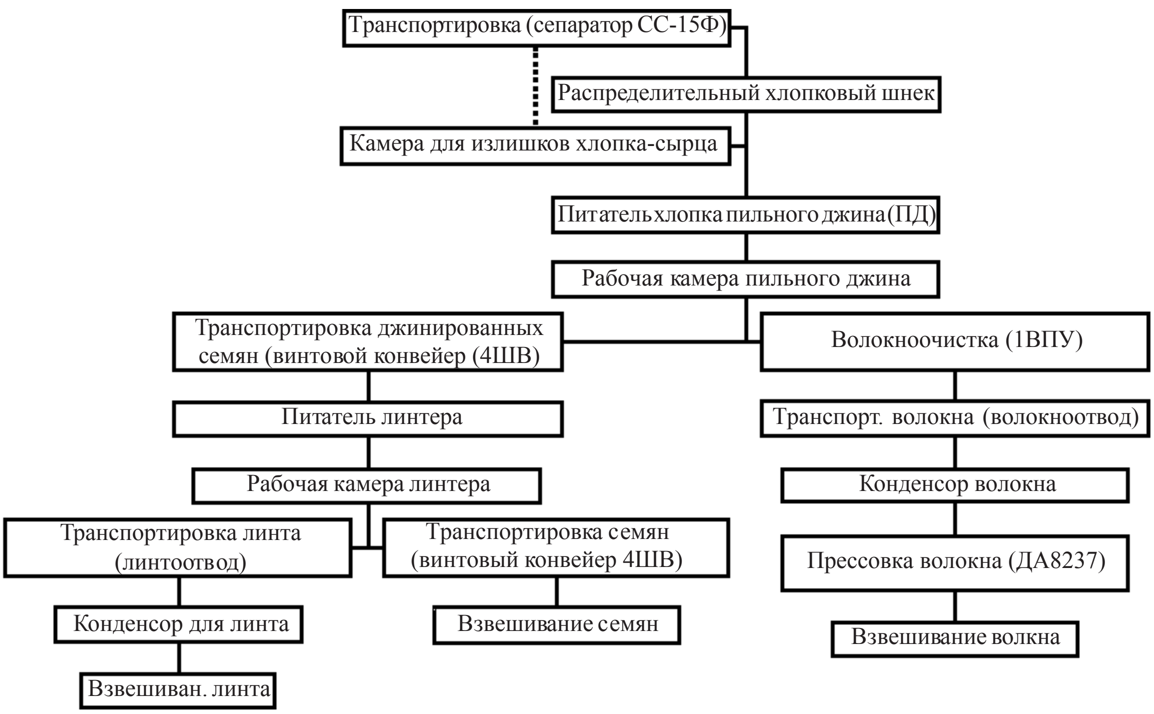


Рис.1. Последовательность операций при джинировании хлопка, очистке волокна и линтеровании семян

В результате обработки экспериментальных данных (ЦФЭ типа 24) была получена адекватная математическая модель производительности питателя хлопкоочистительной линии 4УХК по хлопку Q и математическая модель производительности линтеров семян Q':

$$Q=4780+1308x_1+788x_2+200x_3+3400x_4+$$
$$+324x_1x_2+188x_2x_3+224x_2x_4-180x_1x_2x_3\,,$$

ных до и после пильных джинов, в зависимости от влажности хлопка-сырца, высоты загрузки шахты, сорта хлопка-сырца и скорости вращения питающих валиков.

Список литературы

1. Салихов З.М., Камалов Н.З. К вопросу исследования и построения математической модели очисти-

тельного производства // Автоматизация с применением электротехнических устройств и автоматизированное управление производственными процессами в отраслях народного хозяйства: Тез. докл. науч.-техн. конф. Ташкент, 1978.

2. Омонов Ф.Б. Технологический регламент по первичной переработке хлопка (ПДИ 01-2007). Ташкент: «Paxtatozalash IIChB» OAJ, 2007. 81 с.

MATHEMATICAL MODELS AND AN ALGORITHM OF CONTROL OF TECHNOLOGICAL PROCESS OF GINNING

D.M. Mukhammadiev

An automated system preventing jamming of saw gins, fibrecleaners and linters by controlling the cotton feeding process is created. Conditions of uninterrupted operation of machins and mechanisms located before and after the saw gins, fibrecleaner and linters are determined. The basic design, technological and technique-operational characteristics aredefined: increasing the productivity, decreasing the expenses for processing of cotton, and maintaining the qualitative indicators of the production.

Keywords: mathematical model, mode algorithm, mode of works, mechanism, the machine, saw gin, fibrecleaner, linter, cotton, feeder, decrease in expenses, preservation of quality indicators of a fibre.

УДК 532.5.013.4

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ КОМПОНОВКИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ

А.Д. Мухин

Государственный космический научно-производственный центр им. М.В. Хруничева, Москва

a_mukhin@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Изложена методика анализа устойчивости ракет-носителей в пространстве параметров компоновки, характеризующих положение баков с жидкостью относительно некоторой характерной точки, с учетом влияния этих параметров на массово-инерционные и динамические характеристики изделий. Исследовано влияние основных параметров объекта управления и автомата стабилизации на положение границ устойчивости замкнутой системы.

Ключевые слова: ракета-носитель, компоновка, устойчивость, полости с жидкостью, система управления.

Задача анализа влияния параметров компоновки изделия на устойчивость его движения исследовалась рядом авторов в 1960–1970 годах. При этом для описания движения тела с учетом колебаний жидкости использовалась эквивалентная маятниковая модель, состоящая из абсолютно жесткого прямого стержня с укрепленными на нем математическими маятниками. Далее анализировалось влияние положения точек подвеса маятников на устойчивость системы. Таким образом, учитывалось перемещение колеблющихся масс жидкости относительно неизменного «твердого тела».

Современный уровень развития вычислительной техники позволяет сделать аналогичный расчет для уточненной модели, в которой реальный объем жидкости в баке представляет собой совокупность колеблющейся и «затвердевшей» массы, причем при изменении относительного положения бака меняется положение не только колеблющейся, но и «затвердевшей» массы жидкости, что приводит к изменению массово-инерционных характеристик изделия в целом (положения центра масс и момента инерции). Это изменение существенно при больших уровнях топлива в баках.

Под термином «затвердевшая» масса в данном случае подразумевается масса топлива, не участвующая в колебаниях. При этом момент инерции этой массы равен эквивалентному моменту инерции жидкости, рассчитанного с учетом того, что не вся масса жидкости участвует во вращательном движении.

В качестве эквивалентной маятниковой модели ракеты-носителя будем использовать абсолютно жесткий стержень с массово-инерционными характеристиками «сухого» изделия с закрепленными на нем колеблющимися маятниками и жестко связанными с точками их подвеса грузами, соответствующими «затвердевшим» массам жидкости в баках.

Ввиду того, что изменение положения маятников и связанных с ними неподвижных масс топлива приводит к изменению положения центра масс изделия, в качестве начала отсчета целесообразно выбрать некоторую неизменную точку. Введем систему координат $Oxyz$ с началом на пересечении продольной оси с плоскостью среза сопла изделия, а в качестве анализируемых переменных выберем расстояния от этой точки до некоторых характерных точек (полюсов) баков X_1 и X_2.

Значение координаты центра масс стержня с неподвижными грузами и закрепленными в положении равновесия маятниками при такой постановке задачи может быть представлено в виде линейной функции от исследуемых параметров:

$$X_C = \xi_1 X_1 + \xi_2 X_2 + \xi_0.$$

Аналогично в виде квадратичной функции может быть представлено значение поперечного момента инерции изделия:

$$J_{yy} = \eta_{11} X_1^2 + \eta_{12} X_1 X_2 + \eta_{22} X_2^2 + \eta_1 X_1 + \eta_2 X_2 + \eta_0.$$

При подстановке этих выражений в систему уравнений возмущенного движения из [1] можно привести передаточную функцию объекта регулирования к следующему виду:

$$W_{OP}(s) = (b_1(s) X_1 + b_2(s) X_2 + b_0(s)) / (a_{11}(s) X_1^2 +$$
$$+ a_{12}(s) X_1 X_2 + a_{22}(s) X_2^2 + a_1(s) X_1 +$$

$$+a_2(s)X_2+a_0(s))^{-1},$$

где

$$b_i(s)=\sum_{j=0}^{5}b_{ij}s^j,\quad a_{ij}(s)=\sum_{k=0}^{7}a_{ijk}s^k,$$

$$a_i(s)=\sum_{k=0}^{7}a_{ik}s^k,\ i,\ j=0,1,2.$$

Воспользовавшись частотным критерием Михайлова по методике, приведенной в [2], построим области устойчивости системы для различных значений неподвижных масс топлива в баках m_1 и m_2.

Анализ данных областей показывает, что при уровнях топлива, превышающих диаметр бака, перемещение неподвижных масс топлива оказывает существенное влияние на положение границ устойчивости системы. Для примера, на рис. 1 показано сравнение областей устойчивости, построенных без учета влияния неподвижных масс топлива (слева) и с их учетом (справа).

Для выбора оптимальных значений анализируемых параметров необходимо построить области устойчивости для различных моментов времени полета по номинальной траектории, а в общем случае, и для нескольких типовых траекторий полета. Кроме того, на эти области необходимо нанести область конструктивно допустимых параметров X_1 и X_2.

Множество точек, принадлежащих всем построенным областям устойчивости, а также допустимых с точки зрения конструктивных ограничений, будет являться совокупной областью устойчивости системы. Пример такой области показан на рис. 2.

Таким образом, предложенная методика позволяет существенно уточнить положение границ устойчивости системы по сравнению с классической постановкой [3], особенно при достаточно больших уровнях топлива в баках.

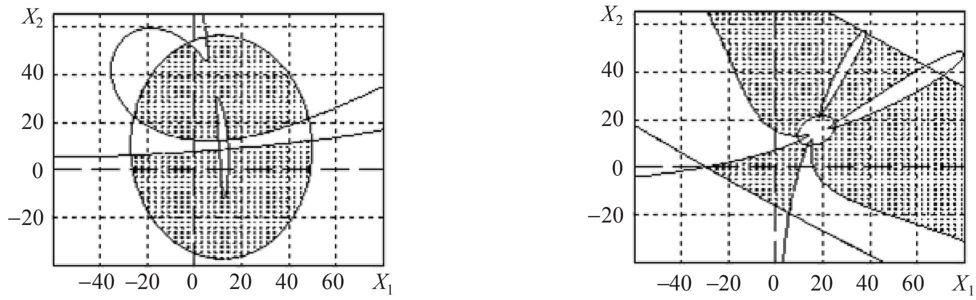


Рис. 1

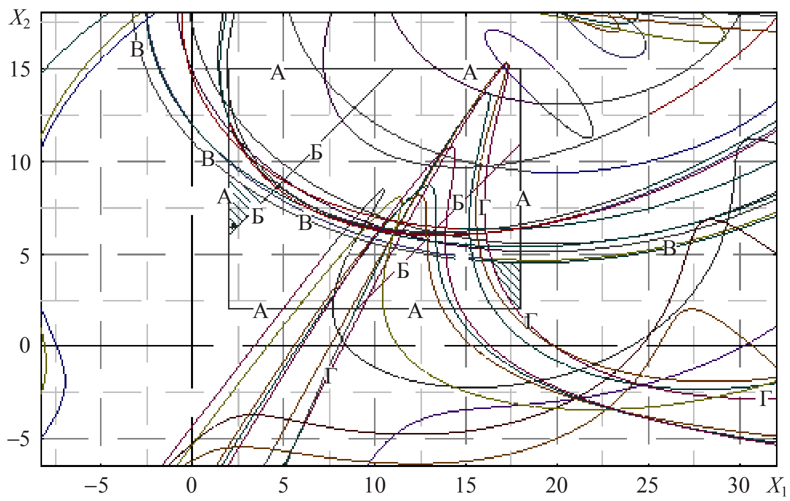


Рис. 2

Список литературы

1. Колесников К.С. Динамика ракет: Учебник для вузов. 2-е изд., исправл. и доп. М.: Машиностроение, 2003. 520 с.

2. Мухин А.Д. Построение областей устойчивости объектов управления в пространстве параметров компоновки // Аэрокосмическая техника: исследования, разработки, пути решения актуальных

проблем: Сб. тр. молодеж. науч.-техн. конф., посвященой 50-летию начала космической эры: М.: Компания Спутник+, 2008. С. 98–101.

3. Цуриков Ю.А. Об устойчивости одной динамической системы // Изв. АН СССР. МТТ. 1966. №2. С. 193–195.

ANALYZING THE EFFECT OF CONFIGURATION PARAMETERS ON THE STABILITY OF LAUNCH VEHICLES

A.D. Mukhin

A technique for analyzing the stability of launch vehicles analysis is proposed to determine stability thresholds in space of the configuration parameters of a rocket, characterizing the position of tanks with a liquid. The analysis takes into account the effect of these parameters on mass-inertial and dynamic characteristics. Also, the effect of some other key parameters of liquid sloshing and control system on the stability thresholds of a closed-loop system is examined.

Keywords: launch vehicle, rocket configuration, stability, sloshing in tanks, control system.

УДК 534.014

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ДВУХПОРШНЕВОГО ВИБРОУДАРНОГО МЕХАНИЗМА С УЧЕТОМ МАСС ПОРШНЕЙ

И.В. Никифорова

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

tsii@list.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Разработаны математическая модель и методика численно-аналитического исследования динамики виброударного механизма. Для изучения в фазовом пространстве сложных режимов движения разработан программный комплекс в среде Borland C++Builder 6. Данный комплекс позволяет определять устойчивость неподвижных точек, строить осциллограммы движения и бифуркационные диаграммы, с помощью которых можно наблюдать процесс перестройки периодических движений в хаотические.

Ключевые слова: метод точечных отображений, устойчивость, бифуркационная диаграмма, коэффициент восстановления скорости при ударе.

Рассматриваемая система представляет собой виброударный механизм (рис. 1), состоящий из следующих элементов: *1* – корпус, *2* – маховик, *3* – кривошипов с регулируемыми эксцентриситетами r_i, *4* – шатуны (длиной l_i), *5* – поршней-ударников, *6* – неподвижного ограничителя, *7* – эксцентрикового вала, *8* – направляющей гильзы, *9* – направляющей штанги корпуса, *10* – наковальни .

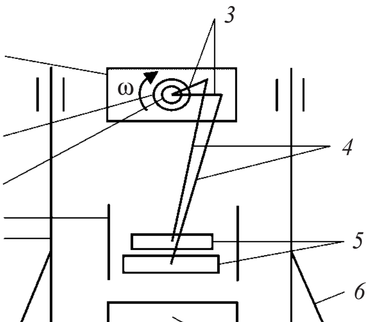


Рис. 1

Корпус совершает колебательные движения вдоль направляющей штанги вследствие вращения маховика, с постоянной угловой скоростью ω. Тогда рассматриваемая базовая модель имеет вид:

$$\ddot{x} - \mu\lambda_1 \cos\tau - \mu\gamma\lambda_2 \cos(\tau - \varphi) = -p \quad (x > f(\tau)),$$

$$\left.\frac{dx}{d\tau}\right|_+ = R\left.\frac{dx}{d\tau}\right|_- + (1+R)\frac{df(\tau)}{d\tau} \quad \left(x = f(\tau),\ \dot{x} < \frac{df}{d\tau}\right),$$

$$f(\tau) = \max_\tau\{f_1(\tau), f_2(\tau)\},$$

где

$$f_1(\tau) = \varepsilon - \mu\cos\tau,\ f_2(\tau) = -\mu\gamma\cos(\tau - \varphi),\ \tau = \omega t,$$

$$\mu = r_1/l,\ p = g/(\omega^2 l),\ \varepsilon = (S_1 - S_2)/l,\ \gamma = r_2/r_1,$$

$$\lambda_1 = m_1/(M + m_1 + m_2),\ \lambda_2 = m_2/(M + m_1 + m_2),$$

S_i – расстояние от точки крепления шатуна до основания поршня; m_1, m_2 – массы первого и второго поршня-ударника соответственно.

Фазовое пространство системы $G(x \geq f(\tau))$ трехмерно в координатах $x, \dot{x}, \tau$, цилиндрично по $\dot{x}$ и усечено по x. Очевидно, что представляет собой «гофрированную» поверхность, образованную пересечением цилиндрических поверхностей $x = f_1(\tau),\ x = f_2(\tau)$.

Качественный вид фазового пространства и фазовых траекторий приведен на рис. 2:

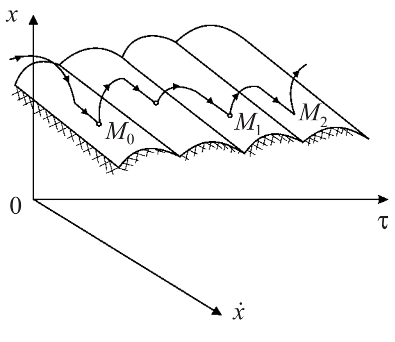


Рис. 2

Видно, что режим движения механизма с ударами каждым из поршней возможен лишь при условии $\varepsilon^2 < \mu^2(1 - 2\gamma\cos\varphi + \gamma^2)$.

Поведение фазовых траекторий позволяет сделать вывод, что секущая поверхность может быть задана уравнением $x = f(\tau)$ поэтому динамика системы может быть изучена с помощью точечного отображения секущей поверхности в самое себя [1].

Пусть T_1 – преобразование точки $M_0(\tau=\tau_0,$ $x_0=f_1(\tau_0),\dot{x}_0)$ в $M_1(\tau=\tau_1, x_1=f_2(\tau_1),\dot{x}_1)$, а T_2 – точечное преобразование точки M_1 в точку $M_2(\tau=\tau_2, x_2=f_1(\tau_2),\dot{x}_2)$, где $\dot{x}_0,\dot{x}_1,\dot{x}_2$ – послеударные скорости. Тогда $T=T_1T_2$ определяет точечное преобразование точек $M_0\to M_1\to M_2$, соответствующее последовательному соударению поршней-ударников, и имеет вид:

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1=R[\mu\lambda_1(\sin\tau_1-\sin\tau_0)-\mu\gamma\lambda_2(\sin(\tau_1-\varphi)+\\
+\sin(\tau_0-\varphi))+p(\tau_1-\tau_0)-\dot{x}_0]+(1+R)\mu\gamma\sin(\tau_1-\varphi),\\
-\mu\gamma\cos(\tau_1-\varphi)=-\mu\lambda_1(\cos\tau_1-\cos\tau_0)-(\tau_1-\tau_0)\times\\
\times(\mu\lambda_1\sin\tau_0+\mu\gamma\lambda_2\sin(\tau_0-\varphi))-\mu\gamma\lambda_2(\cos(\tau_1-\varphi)-\\
-\cos(\tau_0-\varphi))-p\frac{(\tau_1-\tau_0)^2}{2}+\dot{x}_0(\tau_1-\tau_0)+\varepsilon-\mu\cos\tau_0,\\
\dot{x}_2=R[\mu\lambda_1(\sin\tau_2-\sin\tau_1)-\mu\gamma\lambda_2(\sin(\tau_2-\varphi)+\\
+\sin(\tau_1-\varphi))+p(\tau_2-\tau_1)-\dot{x}_1]+(1+R)\mu\sin\tau_2,\\
\varepsilon-\mu\cos\tau_2=-\mu\lambda_1(\cos\tau_2-\cos\tau_1)-(\tau_2-\tau_1)\times\\
\times(\mu\lambda_1\sin\tau_1+\mu\gamma\lambda_2\sin(\tau_1-\varphi))-\mu\gamma\lambda_2(\cos(\tau_2-\varphi)-\\
-\cos(\tau_1-\varphi))-p\frac{(\tau_2-\tau_1)^2}{2}+\dot{x}_1(\tau_2-\tau_1)-\mu\gamma\cos(\tau_1-\varphi).
\end{gathered}$$

Для отыскания простых устойчивых в малом неподвижных точек преобразования T применен известный алгоритм [2].

Для изучения сложных режимов движения механизма разработан программный комплекс в среде Borland C++Builder 6. Комплекс позволяет отыскивать неподвижные точки, соответствующие различным типам периодических движений, и исследовать их устойчивость. Для этого с помощью программного продукта производится построение бифуркационных диаграмм.

Список литературы

1. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972.

2. Метрикин В.С., Никифорова И.В. К теории виброударной системы с кривошипно-шатунным возбудителем колебаний // Вестник ННГУ. 2010. №5(1). С. 185–192.

THE INVESTIGATION OF THE DYNAMICS OF A TWO-PISTON VIBROIMPACT MECHANISM TAKING INTO ACCOUNT THE MASSES OF PISTONS

I.V. Nikiforova

A mathematical model and principles of numerically-analytical research of the vibroimpact mechanism dynamics are developed. For studying in phase space of movement complicated modes, a program complex in the environment of Borland C ++ Builder 6 is developed. The given complex allows defining stability of motionless points, to build oscillograms of movement and bifurcational diagrams that make it possible to observe the process of periodic movements in the chaotic reorganization.

Keywords: point mapping, stability, bifurcation diagram, coefficient of restitution on impact velocity.

УДК 621.2.082.18

РАЗРАБОТКА ТРИБОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

К.А. Нуждин

Санкт-Петербургский госуниверситет информационных технологий, механики и оптики

NuzhdinK@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Изучается вопрос разработки трибометрической системы на основании опыта, полученного при исследованиях процессов трения. Разработка включает в себя определение конструкции установки и системы управления.

Ключевые слова: трибометрия, исследование трения, обратная связь, передача действия.

Описание трибометрической установки

Общая схема разработанной установки приведена на рис.1. В качестве аналога используется созданная на кафедре Мехатроники СПбГУ ИТМО трибометрическая установка «Трибал-2» – система, в основе работы которой лежит принцип возвратно-поступательного движения испытываемых образцов относительно друг друга [1]. В связи с растущей необходимостью и благодаря приобретенному опыту в области исследования процессов трения, в течение периода эксплуатации рассматриваются способы улучшения тактико-технических характеристик прибора.

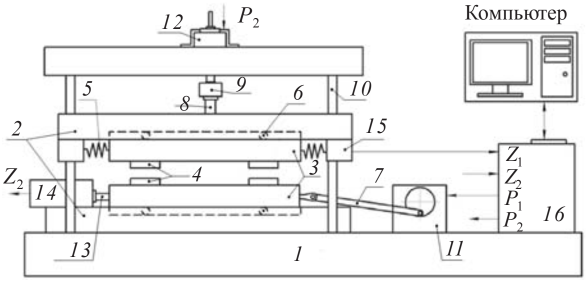


Рис. 1

Система состоит из основания *1*, двух горизонтальных направляющих *2* с телами качения *6*. Верхняя может совершать вертикальное движение вдоль стоек *10*. Образцы *4* закреплены в подвижных частях *3* направляющих, нижняя приводится в возвратно-поступательное движение с помощью электропривода *11* через кривошипно-шатунный механизм *7*, верхняя нагружается вертикальной силой. Положения платформ определяются с помощью фотоэлектрического датчика линейных перемещений *14* и двух датчиков силы *15* через упругие элементы *5*. Информация от датчиков вводится в компьютер через блок управления *16*.

Нагружение образцов вертикальной силой производится за счет управления шаговым линейным двигателем *12*, который воздействует на домкрат *8*. Между домкратом и двигателем, установлен датчик силы *9*. Он позволяет измерять силу прижатия образцов, для использования ее в системе управления. На рис. 1 Z_1 и Z_2 – величины, измеряемые датчиками *14* и *15*, $P1$ и $P2$ – управление электроприводами.

Синтез механизма привода нижней платформы

Для синтеза механизма привода нижней платформы был проведен анализ используемого в существующей установке передающего кривошипно-шатунного механизма, исследованы ошибки его работы. С помощью прикладных пакетов Simulink и Simscape системы Matlab [2] была создана модель разрабатываемого кривошипно-шатунного механизма и получены графики ошибок положения (*а*) и скорости (*б*), представленные на рис. 2. Также исследовалось влияние геометрических размеров звеньев механизма на ошибки положения и скорости.

Разработка системы управления

Система управления аналога представляет собой систему с одним входом и одним выходом. В качестве объекта управления выступает трибометрическая пара как узел трения. Управляемыми величинами являются либо сила нагружения, либо разность фаз колебаний верхней и нижней платформы. Заметим, что управление по разности фаз позволяет воспроизводить заданный закон движения верхней платформы, т.е. передавать определенное движение трением, что очень полезно в области проектирования фрикционных передач [3].

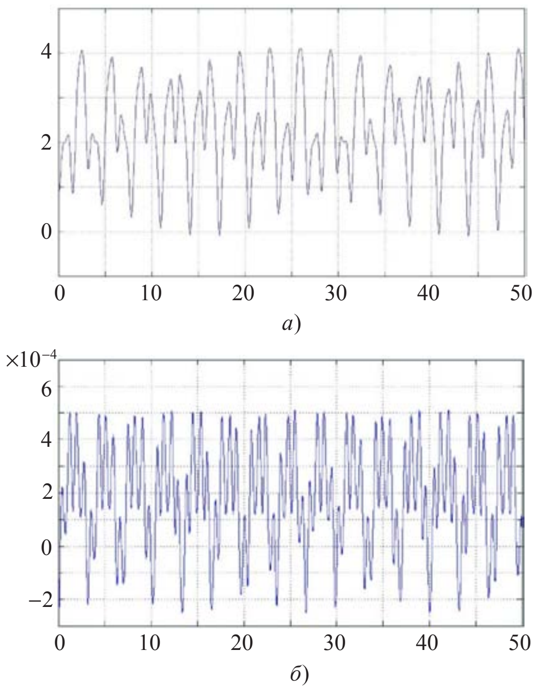


Рис. 2

Модернизация прибора представляет введение дополнительной обратной связи по управлению приводом нижней платформы, т.е. создание системы с двумя входами и одним выходом. Как и в существующем приборе, управляемыми величинами являются сила нагружения или разность фаз колебаний верхней и нижней платформы. Схема управления по разности фаз изображена на рис. 3.

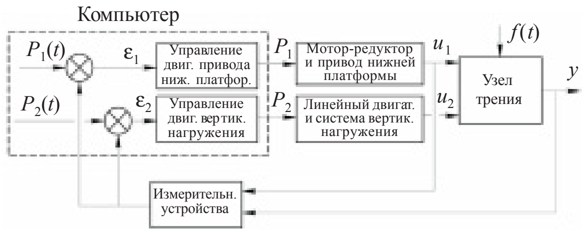


Рис. 3

Проблема моделирования состоит в определении зависимости между входными и выходными сигналами. В качестве основной зависимости выступают линейные дифференциальные уравнения [4]. Используя полученные уравнения, создана модель системы управления в прикладных пакетах Matlab, получены основные динамические характеристики: АЧХ, ФЧХ, импульсные характеристики.

Список литературы

1. Пат. № 2289119 РФ, Кл. G01N 19/02, G01N 3/56. Устройство для испытания материалов на трение / Г.М. Исмаилов, В.М. Мусалимов, Б.В. Соханев, М.А. Сапожков, М.А. Лобачева, А.А. Никифоров, Опублик.: 10.12.2006, Бюл. № 34.
2. Лазарев Ю.В. Моделирование процессов и систем в Matlab. СПб.: Питер. 2004.
3. Мусалимов В.М., Валетов В.А. Динамика фрикционного взаимодействия. СПб.: ГУИТМО. 2006. 191 с.
4. Бесекерский В.Л., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. СПб.: ГУИТМО. 2003. 752 с.

DEVELOPMENT OF THE TRIBOMETRIC SYSTEM WITH FEEDBACK

K.A. Nuzhdin

This paper is devoted to the development of a tribometric system, using the experience derived from the friction efforts. Development involves the design of the structure and a control system.

Keywords: tribometry, friction research, feedback, transfer of action.

УДК 629.79

ДИНАМИКА И УПРАВЛЕНИЕ ПЕРСПЕКТИВНЫМИ МНОГОЭЛЕМЕНТНЫМИ ОРБИТАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ

М.Ю. Овчинников

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

ovchinni@keldysh.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Разработка и внедрение распределенных систем типа Formation Flying (формаций) на базе миниатюрных спутников стала одной из наиболее интенсивно развиваемых идей прошедшего десятилетия для исследования космоса. Она станет новацией начавшегося десятилетия по мере массового перехода от идей к их реализации. Это требует создания фундаментального задела и накопления знаний, разработки сценариев миссий, математических моделей, алгоритмов, методов их исследования и верификации, включая лабораторные испытания.

Формация состоит из нескольких аппаратов, движущихся по близким орбитам и обычно на относительно близком расстоянии друг от друга, которые решают совместную задачу, требующую информационной координации и поддержания их относительно движения. Это требует наличия головного спутника, «дирижирующего» всем ансамблем, состоящим из подчиненных ему остальных спутников в формации. Но с точки зрения динамики и управления формацией такое разделение не столь важно – гравитационное поле и остальные возмущающие факторы действуют на спутники, невзирая на их ранги и отношения подчиненности. Для анализа динамики спутника требуются специальные модели относительного движения спутников, учитывающие близость их расположения.

Рассматриваются модели относительно движения спутников, начиная с простейших и допускающих простые интерпретации – уравнения Хилла–Клохесси–Уилтшира – наиболее простые уравнения, описывающие в линейном приближении движение в центральном ньютоновом поле одного спутника относительно другого, в свою очередь движущегося по круговой орбите. Если движение происходит вне атмосферы, то есть на достаточно высоких орбитах, то основным возмущающим фактором является сжатие Земли, которое приводит к вековым эффектам и расхождению спутников, первоначально движущихся в непосредственной близости друга от друга. Для приближенного описания относительного движения спутников при наличии сжатия с учетом гармоники J_2 можно использовать уравнения Швайгнарта – Седвика. Приводятся результаты исследования эволюционного движения спутников.

При создании формации необходимо уметь решать две основные задачи – развертывание формации на орбите и ее поддержание на всем времени активного существования. Первая задача связана с построением схемы оптимального маневрирования, во многом определяемой схемой вывода спутников на орбиту (сколько используется носителей, в какое время, в какие точки орбиты и т.д.). Задача поддержания формации, естественно базирующаяся на активном управлении спутниками, тесно примыкает к интересной с точки зрения небесной механики задаче эволюции формаций. При этом задача поддержания упрощается, если не строить формацию вопреки законам небесной механики. Описаны их типовые конфигурации, выделены наиболее существенные факторы, влияющие на эволюцию системы. Рассматриваются способы поддержания формации, включая простые алгоритмы управления движением спутников, подходы к их верификации, в том числе и лабораторные. Приведены примеры реализованных и проектируемых формаций, описаны их цели и задачи, особенности динамики.

Ключевые слова: формация спутников, модель относительно движения спутников, управление относительным движением.

Приводятся цели и прикладные задачи, решаемые с помощью конфигураций типа Formation Flying. Описываются задачи, возникающие при развертывании формаций и последующего поддержания их конфигураций. Одна из главных проблем при проектировании миссий подобного рода заключается в построении схемы оптимального орбитального маневрирования при развертывании спутниковой системы и расчете параметров коррекции для поддержания требуемой конфигурации системы. Налагаемые при решении этой проблемы требования на режим ориентации спутников должны учитываться при выборе схемы управления ориентацией и разработке соответствующих алгоритмов управления. Рассматриваются различные способы обеспечения ориентации вектора тяги двигателя для орбитального маневрирования, включая и магнитные системы управления ориентацией (как активные, так и пассивные) в силу их простоты и надежности.

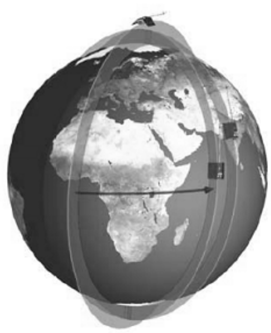
Актуальность задач построения и поддержания формаций подтверждается резко возросшей интенсивностью использования распределенных спутниковых систем в целях дистанционного зондирования Земли, прогнозирования земной и космической погоды, глобального позиционирования, создания коммуникационных сетей и интеллектуальных транспортных систем. Внедрение и разработка распределенных систем типа формаций на базе миниатюрных спутников стала наиболее развиваемой идеей в исследовании космического пространства прошедшего десятилетия, она станет новацией начавшего десятилетия по мере перехода от идеи к реализации. Это требует создания фундаментального задела и накопления знаний, разработки сценариев миссий, математических моделей, алгоритмов, методов их исследования и верификации, включая лабораторные испытания.

Особенность постановок задачи движения спутников в формации заключается в совместном рассмотрении орбитального и углового движения спутников. Такой целостный подход является наиболее перспективным с практической точки зрения при проектировании распределенных спутниковых систем. Кроме того, должны приниматься во внимание характерные для малых спутников ограничения на состав и функциональные характеристики систем управления орбитальным движением и ориентацией.

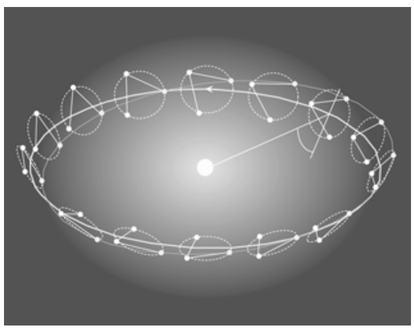
Приводятся обзор типовых моделей движения формация, влияние основных возмущающих факторов, методов их формирования и поддержания. Приведены несколько примеров реализованных или проектируемых миссий. Миссия Grace (Gravity Recovery And Climate Experiment), NASA была предназначена для составление гравитационной карты Земли.

Она состоит из двух одинаковых спутников, которые были запущены в октябре 2001 года с космодрома Плесецк с помощью ракеты «Рокот-КМ» на высоту около 500 км. Спутники движутся по одной орбите с наклонением около 89^o на расстоянии около 220 км друг от друга, то есть составляют конфигурацию leader-follower.

Формация SWARM, состоящая из трех спутников в трех орбитальных плоскостях с двумя разными околополярными наклонениями для того, чтобы обеспечить взаимное смещение орбитальных плоскостей со временем. Два спутника находятся в плоскостях с наклонением 87.4^o с близким расположением линий узлов и один спутник находится в плоскости с наклонением 86.8^o. Два спутника, летящих на орбитах с наклонением около 87.4^o, находятся на средней высоте в 450 км, поперечное расстояние между ними достигает 1–1.5^o, и максимальная дифференциальная задержка в орбитах составляет порядка 10 сек. Третий спутник находится на высоте 530 км. Два спутника на орбитах с почти одинаковым наклонением образуют конфигурацию «side-by-side», то есть находятся рядом во время движения. SWARM предназначен для исследования магнитного поля Земли. Заказчиком спутников является ESA. Масса каждого аппарата составит 240 кг.

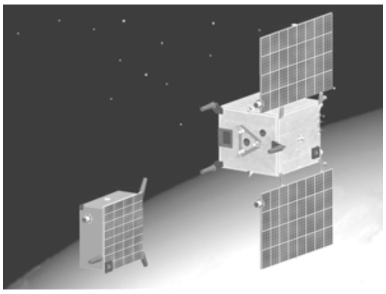


Проект LISA (запуск планируется в 2018, NASA) – кластер из трех спутников на гелиоцентрической орбите, удаление спутников друг от друга предполагается равным 5 миллионам километров.



Целью миссии является обнаружение гравитационных волн от массивных черных дыр и двойных звезд. Формация ведет себя как интерферометр Майкельсона.

Технологический проект PRISMA (запуск осуществлен в 2010 году, CNES и SSC) включает два спутника Tango (Target) и Mango (Main) с массами 40 кг и 140 кг соответственно, которые движутся вместе на близких орбитах.



При этом больший спутник маневрирует в окрестности малого спутника, который движется по первоначальной траектории. Орбита спутников солнечно-синхронная, высота от 600 до 1000 км. Цель запуска – проверить возможность автономной работы спутников, протестировать новое оборудование и новые методы: радиочастотная метрология с помощью GPS, оптическая камера, микродвигатель малой тяги на основе холодного газа.

Приводятся результаты отечественных исследований по динамике формаций. Проблема выбора конфигурации спутниковых систем анализируется на примере миссий, направленных на изучение фундаментальных характеристик термосферы: пространственного распределения заряда, вариаций температуры и плотности.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00431), Минобрнаукой (госконтракт 02.740.11.0860), FP7 (HPH. COM, грант № 218862).

DYNAMICS AND MOTION CONTROL OF CHALLENGING DISTRIBUTED ORBITAL SYSTEMS

M.Yu. Ovchinnikov

Development and implementation of distributed orbital systems like Formation Flying (formation) based on miniature satellites has become an intensively expanded idea of the previous decade in space exploration. It is an innovation trend of the beginning decade while the idea is transferred to the implementation. Such a trend demands a groundwork and knowledge gathering, design of mission scenarios, development of mathematical models, control algorithms, methods of their verification including laboratory testing.

Formation consists of a several satellites moving in nearby orbits and usually in rather short distances to each other in order to solve a common task which demands coordination and maintenance of a relative motion. To analyze satellite dynamics, some specific models of a relative motion taking into account short relative distance are required.

The paper considers various models of the satellite relative motion staring from elementary one like the Hill – Clohessy – Wiltshire model which describes the relative motion of one satellite relatively another in a central Newtonian gravitational field in a linear approximation. The latter satellite moves in a circular orbit. If satellites move outside of the atmosphere the main factor affecting their motion is the oblateness of the Earth which generates a secular effect in a divergence of satellites originally moving in the vicinity of each other. For approximation description of the relative motion in presence of the Earth oblateness with the J_2 harmonic of the potential expansion the Schweighart – Sedwick equations can be used.

While a formation is designed two main problems are to be solved. The first one is to develop it in the orbit and the second one is to maintain the formation for a whole time of its activity. Development scheme depends on a maneuvering strategy and orbiting approach used to launch satellites in orbit. Maintenance of the formation based on orbital motion control links close to the problem of formation orbits evolution interesting from the celestial mechanics point of view. In the paper the formation default configurations are given with the main factors which affect their evolution. Technique to maintain a formation is considered including elementary algorithms of orbital motion control with approaches to verify them numerically and using laboratory testing. A few samples of realized and designed formation missions are given with their purposes and tasks which have to be solved and also with features in their dynamics.

Keywords: formation flying, satellite relative motion model, satellite relative motion control.

УДК 539.313:517.968.72

МЕТОДЫ, СТРУКТУРА И СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ В МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Е.Н. Огородников, Н.С. Яшагин

Самарский государственный технический университет

eugen.ogo@gmail.com

Поступила в редакцию 16.05.2011

Для модельного линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными Римана – Лиувилля обоснована корректность задач Коши соответственно в локальной (классической) и нелокальной постановках. Решения найдены в явном виде в терминах некоторых специальных функций, связанных с функцией типа Миттаг – Леффлера. Отмечена непрерывная зависимость найденных решений от параметра дробности.

Ключевые слова: дробное исчисление, обыкновенные дифференциальные уравнения с дробными производными Римана – Лиувилля, дробные осцилляционные уравнения, реологические модели вязкоупругого тела, задача типа Коши, специальные функции типа Миттаг – Леффлера.

Дробными осцилляторами принято называть механические динамические системы, изменение состояния которых во времени носит колебательный характер, а математические модели представлены уравнениями, содержащими дробные производные и/или интегралы от обобщенных координат. Для решения этих уравнений и анализа полученных решений удается эффективно использовать аппарат дробного исчисления и некоторых специальных функций [1, 2]. Хорошо известно, что подобные уравнения возникают при моделировании различных процессов в средах с памятью или фрактальной структурой, а также задачах динамики систем с наследственно-упругими связями [3].

Основное внимание уделено задачам с начальными данными для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и дробными производными Римана–Лиувилля:

$$\ddot{x} + \sum_{k=1}^{n} a_k D_{0t}^{\alpha_k} \dot{x} + \sum_{s=1}^{m} b_s D_{0t}^{\beta_s} x + b_0 x = f(t), \quad (1)$$

где $x = x(t)$ обобщенная координата, $f(t)$ внешняя сила ($t \geq 0$); параметры $\alpha_k \in (0, 1)$, $\beta_s \in (0, 2)$; $D_{0t}^{\alpha_k}$, $D_{0t}^{\beta_s}$ – левосторонние операторы дробного дифференцирования Римана – Лиувилля: $D_{0t}^{\alpha}\varphi = (d/dt)^n I_{0t}^{n-\alpha}\varphi$ при $\alpha > 0$, где $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ – целая часть числа α,

$$I_{0t}^{\alpha}\varphi = 1/\Gamma(\alpha)\int_0^t \varphi(\tau)/(t-\tau)^{1-\alpha} d\tau$$

– левосторонний дробный интеграл Римана – Лиувилля порядка α [1, 3]. Такое дифференциальное уравнение возникает, например, в случае, когда в качестве реологической модели вязкоупругой связи использована обобщенная (дробная) модель Фойхта [4]:

$$\sigma = E_0\varepsilon + \sum_{k=1}^{n} A_k D_{0t}^{\alpha_k}\dot{\varepsilon} + \sum_{s=1}^{m} E_s D_{0t}^{\beta_s}\varepsilon,$$

где $\sigma = \sigma(t)$ и $\varepsilon = \varepsilon(t)$ напряжение и деформация в момент времени t; A_k, E_0, E_s – заданные постоянные величины; $\alpha_k \in (0, 1)$, $\beta_s \in (0, 2)$.

Основным методом решения дифференциальных уравнений с дробными производными является редукция начальной задачи к интегральному уравнению вольтерровского типа [2]. Известно, что постановка задачи с начальными данными для дифференциального уравнения (1) зависит от наличия или отсутствия в уравнении дробных производных $D_{0t}^{\beta_s}$ порядка $\beta_s > 1$ [5]. Обосновывается существование и единственность решения видоизмененной задачи типа Коши для уравнения (1) с начальными данными

$$x(0) = x_0, \quad \lim_{t\to 0+}\left(\dot{x}(t) + \sum_{s:\beta_s>1} b_s D_{0t}^{\beta_s - 1}x\right) = x_1. \quad (2)$$

Если $\beta_s \in (0, 1]$, то начальные условия (2) переходят в классические условия задачи Коши, существование и единственность решения которой обоснованы в работе авторов [6].

Для нахождения решения в явном виде предлагается подход, основанный на идее факторизации интегрального оператора вольтерровского типа.

Приведены некоторые достаточные признаки факторизуемости линейных интегральных операторов дробного порядка. В этих случаях решение удается выписать в терминах специальных функций, связанных с функциями типа Миттаг – Леффлера $E_{\overline{\alpha}}(\overline{z};\mu)$, [1, 3], ее обобщением на случай многих переменных $E_{\overline{\alpha}}(\overline{z};\mu)$, где $\overline{z}=(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $\overline{\alpha}=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i > 0$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ [6], обобщенной (дробной) экспоненциальной функции $\exp(\alpha,\ \mu;\ \lambda;\ t) = t^{\mu-1}E_\alpha(\lambda t^\alpha;\ \mu)$ и др. [7].

В качестве примеров приведем два дифференциальных уравнения:

$$\ddot{x} + pD_{0t}^{\beta}\dot{x} + qD_{0t}^{2\beta}x = f(t),$$
$$\ddot{x} + pD_{0t}^{1+\beta}x + qD_{0t}^{2\beta}x = f(t)$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ и $x(0) = x_0$, $\lim\limits_{t\to 0+}[\dot{x}(t) + p\{D_{0t}^{2\beta}x - x(t)\}] = x_1$ соответственно, для которых решения найдены в явном виде. При изучении данных динамических моделей возникает необходимость вычислять значения решений, в том числе и оценивать поведение этих решений на бесконечности, что особенно важно в задачах прочности элементов конструкций, испытывающих постоянную динамическую нагрузку. Разработанные для функции $E_\alpha(z;\mu)$ вычислительный алгоритм [8] и формулы для оценки поведения на бесконечности расширены на функции типа $E_{\overline{\alpha}}(\overline{z};\mu)$ [9] и использованы для анализа решений.

С помощью полученного аппарата, исследовано качественное различие этих решений, построены фазовые портреты. Отмечено, что при $\beta \to 0$ и сами дифференциальные уравнения, и постановки начальных задач, и их решения переходят в решение классической задачи Коши для дифференциального уравнения осциллятора с вязким трением $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f(t)$.

Отмечено также, что однопараметрические семейства решений этих дифференциальных уравнений могут оказаться полезными в задачах параметрической идентификации нелинейных динамических систем, а введенные специальные функции использоваться как базовая система функций для представления нелинейных колебаний.

Список литературы

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

2. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.

3. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

4. Огородников Е.Н., Радченко В.П., Яшагин Н.С. Реологические модели вязко-упругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов // Вторая Междунар. конф. мат. физика и ее приложения: Матер. конф. Самара, 2010. С. 253–255.

5. Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Постановка и решение задач типа Коши для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана – Лиувилля // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Серия Физ.-мат. науки. 2010. №1 (20). С. 24–36.

6. Огородников Е.Н. Яшагин Н.С. Существование, единственность и структура решения задачи Коши для одного класса обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с дробными производными Римана – Лиувилля // Мат. моделирование и краевые задачи: Тр. Седьмой Всерос. научн. конф. с междунар. участием. Ч. 3. Самара: СамГТУ, 2010. С. 225–232.

7. Огородников Е.Н., Яшагин Н.С. Некоторые специальные функции в решении задачи Коши для одного дробного осцилляционного уравнения // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Серия Физ.-мат. науки. Самара: СамГТУ, 2009. № 1 (18). С. 276–279.

8. Gorenflo R., Loutchko J., Luchko Yu. F. Computation of the Mittag – Leffler function $E\alpha$, $\beta(z)$ and its derivative // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2002. № 5 (4). P. 491–518.

9. Яшагин Н.С. Интегральные представления и асимптотические формулы для обобщения функции типа Миттаг – Леффлера на случай двух переменных // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Серия Физ.-мат. науки. Самара: СамГТУ, 2010. № 5 (21). С. 229–236.

THE METHOD FOR SOLVING DIFFERENTIAL FRACTIONAL OSCILLATING EQUATIONS IN MECHANICAL SYSTEM WITH SINGLE DEGREE OF FREEDOM, STRUCTURE AND PROPERTIES OF SOLUTIONS

E.N. Ogorodnikov, N.S. Yashagin

The correctness of the Cauchy problems in local (classical) and nonlocal staging for model two linear ordinary second order differential equation with Riemann – Liouville fractional derivatives is substantiated. The explicit solutions in terms of some special functions related Mittag – Leffler type function are found. Continuous dependence of these solutions on the fractional parameter is indicated.

Keywords: fractional calculus, ordinary differential equations with Riemann – Liouville fractional derivatives, fractional oscillating equation, reological model of viscoelastic body, Cauchy type problem, Mittag – Leffler type functions.

УДК 534.1:539.3

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДАТЧИКА ИНЕРЦИАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

***В.Ю. Ольшанский*[1], *И.Ф. Абитова*[1], *Ю.Н. Нагар*[2], *А.В. Серебряков*[2]**

[1]Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов
[2]Энгельсский технологический институт (филиал) СГТУ

olshanskiy_vlad@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Для предложенной авторами модели пьезогироскопа, представляющей собою систему твердых и деформируемых тел, на основе построенной математической модели получена зависимость напряжения в пьезопластине на выходе устройства от угловой скорости несущей платформы. Выполнен анализ влияния на характеристики устройства различных условий закрепления пьезопластин на опорных поверхностях. Определена длительность переходного процесса при работе в импульсном режиме.

Ключевые слова: сила Кориолиса, угловая скорость, пьезоэффект, электроупругость.

1. Связанная краевая задача

Рассматривается предложенная в работах [1, 2] модель датчика инерциальной информации (ДИИ), где в пьезопластинах возбуждаются плоские деформационные волны и используется прямой и обратный пьезоэффекты. Механическая система состоит из тонких пьезопластин, лежащих на взаимно перпендикулярных опорных поверхностях, и присоединенной массы, находящейся в контакте со свободными поверхностями пьезопластин. При вращении объекта, несущего ДИИ, на присоединенную массу, которая считается абсолютно твердым телом, действует кориолисова сила. Изменяющееся по гармоническому закону напряжение, приложенное к пьезопластине на входе в ДИИ, порождает в ней деформационные волны. Возникающие колебания присоединенной массы при действии силы Кориолиса вызывают деформации пьезопластины на выходе ДИИ, с которой снимается переменное напряжение.

В краевую задачу входят уравнения механических колебаний

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}+\alpha\frac{\partial u_i}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2},\quad i=1,2. \tag{1}$$

Здесь t, x_i, u_i – безразмерные время, координата и перемещение в направлении оси Ox_i, i – номер пластины, ось Ox_i перпендикулярна пластине с номером i. Коэффициент α определяется добротностью пьезокерамического материала.

Для описания взаимодействия пьезопластин с опорными поверхностями использовались различные модели: закрепление на абсолютно твердой поверхности, контакт с упругим основанием, контакт с упругим телом, в котором распространяются затухающие деформационные волны. Абсолютно твердой опорной поверхности соответствуют граничные условия $u_i(0,t)=0$. Для упругого основания имеем условия $\sigma_x(0,t) = -Hu_i(0,t)$, где H – коэффициент жесткости основания. При рассмотрении контакта с упругими телами полагалось, что в них распространяются плоские деформационные волны, описываемые уравнениями вида (1). На плоскостях контакта с пьезопластинами $x_i=0$ перемещения и напряжения полагались непрерывными; в силу того, что толщина опорных упругих тел много больше толщины пьезопластин, использовались условия $u_i = 0$ при $x_i = -\infty$.

На основаниях пьезопластин, контактирующих с присоединенным грузом массы M, получим условия

$$\sigma_x A=-M\frac{\partial^2 u_i(\delta_i,t)}{\partial t^2}+F_k^c,\quad i=1,2,\ k=3-i,$$
$$F_k^c=(-1)^k 2M\Omega_3\frac{\partial u_k(\delta_k,t)}{\partial t}. \tag{2}$$

Здесь F_k^c – компонент силы Кориолиса, действующей на груз; Ω_3 – компонент угловой скорости объекта. Механические напряжения σ_x определяются линейными уравнениями пьезоэффекта $\sigma_x=(\partial u/\partial x-d_{33}E)/s_{33}$. Здесь s_{33} – упругая податливость материала, d_{33} – пьезоэлектрическая постоянная, E – напряженность электрического поля.

Уравнения вынужденной электростатики $\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=0$, $\mathrm{div}\,\mathbf{D}=0$ позволяют в одномерном случае записать $E_i=-\partial\psi_i/\partial x_i$, $\partial D_i/\partial x_i=0$. Учитывая линейные уравнения пьезоэффекта, из условий (2) получаем граничные условия:

$$\frac{\partial u_i(\delta_i,t)}{\partial x_i}=-\frac{\partial\psi_i(\delta_i,t)}{\partial x_i}+m\left(-\frac{\partial^2 u_i(\delta_i,t)}{\partial t^2}+\right.$$

$$\left.+(-1)^k 2\omega\frac{\partial u_k(\delta_k,t)}{\partial t}\right),\quad i=1,2,\ k=3-i. \quad (3)$$

Здесь $m=Ms_{33}c^2/(Ah)$, $\omega=\Omega_3 h/c$; c – скорость сопряженных продольных волн в пьезокерамике; h, A – толщина и площадь первой пластины.

С учетом пьезоэффекта электрическая индукция D определяется равенством $D=\varepsilon_{33}^T E+ +d_{33}\sigma_x$. Здесь ε_{33}^T – диэлектрическая проницаемость при постоянных механических напряжениях. Используя уравнения вынужденной электростатики, получим уравнения, связывающие электрические потенциалы и перемещения

$$(1-k_{33}^2)\partial^2\psi_i/\partial x_i^2=k_{33}^2\partial^2 u_i/\partial x_i^2,\quad i=1,2. \quad (4)$$

Здесь k_{33}^2 – продольный статический коэффициент электромеханической связи. Интегрируя уравнения (4) при заданных граничных условиях для потенциалов ψ_i, получим выражения потенциалов $\psi_i(x_i,t)$ через перемещения $u_i(x_i,t)$. Краевая задача для уравнений (1) становится замкнутой относительно перемещений.

2. Режим вынужденных колебаний

Для случая, когда напряжение на пластине на входе изменяется по закону $U(t) = U_0\sin\beta t$, перемещения в пластинах отыскивались в виде $u_i(x_i,t)=\xi_i(x_i)\cos\beta t+\eta_i(x_i)\sin\beta t$. Амплитудные функции $\xi_i(x_i)$, $\eta_i(x_i)$ находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений и представляются выражениями $\xi_i(x_i) = = \mathrm{Im}\,(jC_i\,\mathrm{sh}(\gamma x_i))$, $\eta_i(x_i) = \mathrm{Re}\,jC_i\,\mathrm{sh}(\gamma x_i))$. Деформации позволяют определить силу тока в пьезопластине на выходе. Резонансное возрастание амплитуды наблюдается для значения $\beta=\beta_1$, близкого к первой собственной частоте λ_1 свободных колебаний пластины без внутреннего трения. Например, при $\omega = 1.685\cdot10^{-6}$, что соответствует угловой скорости $\Omega_3 = 10$ рад/с для пластин с толщинами $6\cdot10^{-4}$ м, изготовленными из пьезокерамики марки ЦТС-19 с механической добротностью $Q = 90$, получаем значение $\beta_1 = 0.508$. При замене абсолютно твердой опорной поверхности упругим основанием максимальное значение амплитуды и соответствующая ему частота β уменьшались.

Была найдена зависимость максимальной амплитуды тока на выходе от угловой скорости ДИИ, которая может быть использована при решении обратной задачи по определению угловой скорости. Отклонение от линейной зависимости не превышает 0.1% до значений ω, соответствующих $\Omega_3 = 100$ рад/с. В диапазоне до $\Omega_3 = 376.8$ рад/с отклонение не превысило 1.2%.

3. Переходный процесс

Для работы в импульсном режиме, когда короткие периоды возбуждения колебаний чередуются длинными паузами, необходимо, чтобы время переходного процесса было малым. Рассмотрен переходный процесс, когда в связанную краевую задачу добавлялись начальные условия. Обратное преобразование Лапласа построено при помощи вычетов. Простые полюсы p_n удовлетворяют уравнениям $\gamma\mathrm{cth}\gamma=k_{33}^2+ +(1-k_{33}^2)(2r_1 m\omega pj-mp^2)$, где $r_1=\pm1$, $\gamma^2=p^2+\alpha p$. Отметим, что полученная асимптотика значений $p_n=\mu_n+j\lambda_n$, где

$$\mu_n=-\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{m(1-k_{33}^2)(\pi n)^2},$$

$$\lambda_n=r_2\pi n+r_2\frac{8-\alpha^2 m(1-k_{33}^2)}{8m(1-k_{33}^2)\pi n}\quad (n>>1)$$

дает очень малую погрешность при конечных значениях n, до $n = 1$. Определено время выхода на режим установившихся колебаний для различных параметров ДИИ.

Одним из соавторов представленной работы является проф. В.М. Панкратов.

Список литературы

1. Нагар Ю.Н. и др. Об одной модели пьезогироскопа // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. №2. С. 71–74.

2. Панкратов В.М. и др. Влияние диссипации на характеристики измерителя угловой скорости на основе взаимного пьезоэффекта // Авиакосмическое приборостроение. 2010. №8. С. 3–7.

ON A MODEL OF THE SENSOR INERTIAL INFORMATION

V.Yu. Olshanskiy., I.F. Abitova, J.N. Nagar,A.V. Serebryakov

Based of the proposed mathematical model of the piezogyroscope, the voltage on the output device as a function of the angular velocity of the platform is determined. Estimates were made for different fixing conditions of piezoplates. Duration of the transition process in the pulsed mode is calculated.

Keywords: Coriolis force, angular velocity, piezoeffect, electroelasticity.

УДК 539.3

ДИСПЕРСИЯ ИЗГИБНОЙ И КРУТИЛЬНОЙ ВОЛН В БАЛКАХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

О.И. Орехова

Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

snussmurr@rambler.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Предложена математическая модель, описывающая распространение изгибных и крутильных волн в балке кругового или кольцевого сечения. Проанализированы частотные зависимости фазовых и групповых скоростей волн.

Ключевые слова: изгибная волна, крутильная волна, фазовая скорость, групповая скорость, частота волны, амплитуда волны.

Система уравнений, описывающих распространение изгибных и крутильных волн в балке цилиндрического сечения (депланация отсутствует), имеет вид:

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_{,tt} - \left(c_\tau^2 \dfrac{J_s}{J_\rho} + (\lambda+\mu)(J\rho + Jg)\theta_0^2 \right)\tilde{\theta}_{,xx} = \\ \quad = -2(\lambda+\mu)F(\theta_0^3 + \theta_0^3\tilde{\theta}), \\ W_{,tt} + c_0^2 r_y^2 W_{,xxxx} - r_y^2 W_{,xxtt} = 2\dfrac{\lambda+\mu}{\rho}\theta_0^2 W_{,xx}, \end{cases} \tag{1}$$

где $W(x, t)$ – поперечные смещения частиц в плоскости xoz; $\theta = \theta_0 + \tilde{\theta}(x,t)$ – угол поворота сечения складывается из постоянной составляющей θ_0 и переменной $\tilde{\theta}(x,t)$, зависящей от координаты и времени; J_c – полярный момент инерции; J_s – момент инерции при кручении; J – осевой момент инерции; F – площадь поперечного сечения балки; c_τ – скорость сдвига, ρ – плотность материала, λ, μ – константы Ламе, r_y, r_ρ – осевой и полярный радиусы инерции соответственно.

Решая систему уравнений (1), находим дисперсионные уравнения для волн:

– крутильной

$$\omega = \pm\sqrt{\left(c_\tau^2 \frac{J_s}{J_\rho} + (\lambda+\mu)(J_\rho + J_g)\theta_0^2 \right)k^2 + 6(\lambda+\mu)F\theta_0^2 + 2(\lambda+\mu)F\theta_0^3} \tag{2}$$

– и изгибной

$$\omega = \pm k\sqrt{c_0^2 r_y^2 k^2 + 2\frac{\lambda+\mu}{\rho}\frac{\theta_0^2}{1+r_y^2k^2}}. \tag{3}$$

Так как нет депланации, изгибные и крутильные волны развязаны. Крутильная волна описывается уравнением Клейна–Гордона, имеется зона непропускания, тем больше, чем больше θ_0; а изгибная волна аналогична волне при колебаниях балки с предварительным натягом, натяг пропорционален θ_0.

Крутильная волна

Зависимость частоты волны (ω) от волнового числа (k) при различных значениях начального угла поворота (θ_0) представлена на рис. 1, где кривая *1* соответствует значению $\theta_0 = 0$, кривые *2*, *3* – значениям $\theta_0 > 0$.

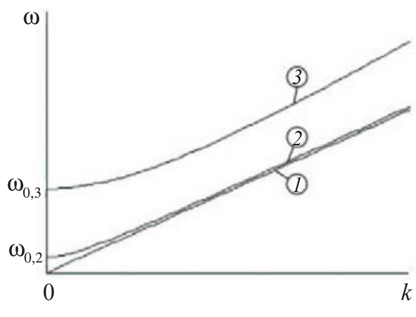


Рис. 1

Начальное значение частоты крутильной волны (ω_0) зависит от значения θ_0 согласно уравнению: $\omega_0 = \pm\theta_0\sqrt{2(\lambda+\mu)F(3+\theta_0)}$.

При возрастании волнового числа ($k \to \infty$)

зависимость в уравнении (2) стремится к линейной, а дисперсионные кривые – к прямым.

Дисперсия крутильной волны нормальная, если начальный угол поворота отличен от нуля ($\theta_0 > 0$), при любых значениях k. При отсутствии начального угла поворота ($\theta_0 = 0$) значения фазовой и групповой скоростей совпадают ($V_{ф} = V_{гр} = \pm c_\tau \sqrt{J_s / J_\rho}$), то есть дисперсия отсутствует.

При больших значениях волнового числа ($k \to \infty$), значение фазовой и групповой скоростей стремится к некоторой постоянной, зависимой от θ_0. На рис. 2 представлены зависимости фазовых ($V_{ф}$) и групповых ($V_{гр}$) скоростей от волнового числа при одном значении угла поворота ($\theta_0 > 0$).

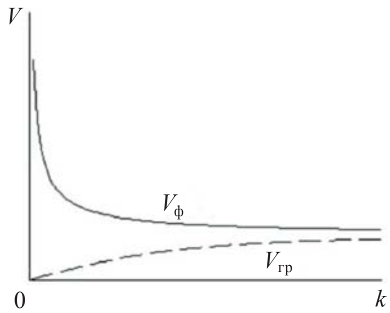


Рис. 2

Изгибная волна

Начальное значение частоты волны ω_0 не зависит от угла поворота θ_0 и при любых значениях $\omega_0 = 0$ (рис. 3). При больших значениях волнового числа ($k \to \infty$) дисперсионные кривые стремятся в одну и не зависят от начального угла поворота. На рис. 3 показана дисперсионная зависимость частоты волны ω от волнового числа k при различных значениях начального угла поворота θ_0: *1* – зависимость при $\theta_0 = 0$; *2*, *3* – при значениях $\theta_0 > 0$.

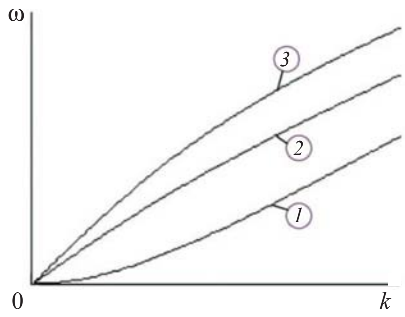


Рис. 3

Зависимости фазовых ($V_{ф}$) и групповых ($V_{гр}$) скоростей от волнового числа при одинаковых значениях начального угла поворота θ_0 представлены на рис. 4, где кривые *1* соответствуют $\theta_0 = 0$, кривые *2* – значениям $\theta_0 > 0$.

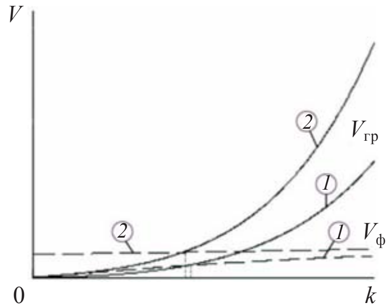


Рис. 4

При больших значениях волнового числа кривые фазовой скорости стремятся к «c_0», вне зависимости от угла поворота, а кривые групповой скорости при значении начального угла поворота, отличного от нуля, стремятся к одной кривой, которая не совпадает с кривой групповой скорости при $\theta_0 = 0$.

При $k = k'$ дисперсия волны отсутствует, а фазовая и групповая скорости равны; при $k < k'$ дисперсия волны нормальная ($V_{ф} > V_{гр}$); при при $k > k'$ дисперсия аномальная ($V_{ф} < V_{гр}$).

DISPERSION OF A FLEXURAL AND TORSION WAVES IN CYLINDRICAL BEAMS

O.I. Orekhova

A mathematical model is presented, that describes the distribution of flexural and torsion waves in a beam of a circular or ring section. Frequency dependences of phase and group wave velocities are analyzed.

Keywords: flexural wave, torsion wave, phase speed, group speed, frequency of a wave, amplitude of a wave.

УДК 539.3

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ ПРИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

К.Ю. Осипенко

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

osipenko@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Построена приближенная математическая модель, описывающая пространственное движение тела вращения в малопрочной среде с учетом несимметричного отрыва потока среды. Постулируется связь кинематических и силовых факторов на площадке контакта тела и среды на основе метода локального взаимодействия при использовании точных решений и научного эксперимента. В качестве критерия отрыва принимается условие идеального отрыва, когда в области «аэродинамической тени» напряжения на теле отсутствуют. Для изучения устойчивости прямолинейного движения строится система уравнений первого приближения. Оказалось, что система уравнений первого приближения распадается на две независимые эквивалентные системы, описывающие движение тела в двух перпендикулярных плоскостях. В отличие от работ [1, 2], в которых изучалась устойчивость прямолинейного движения тела при замороженной осевой скорости, рассматривается влияние торможения тела на устойчивость движения. В случае безотрывного обтекания и отсутствия касательных напряжений получены условия убывания возмущений при движении тела по траектории.

Ключевые слова: проникание, упругопластическая среда, траектории движения, отрыв потока, устойчивость.

Физическое описание и гипотезы

Осесимметричное жесткое тело массы m, плотности ρ_1, с главным моментом инерции при поперечном вращении I движется по инерции в безграничной среде. Тело имеет гладкий меридиан $R = R(L)$, $d^2R/dL^2 \le 0$ $(0 < L < L_m)$ и, быть может, кромку $L = L_m$, где R – радиус, L – расстояние от носика вдоль оси тела. Среда характеризуется плотностью ρ_0, динамическим пределом текучести Мизеса τ_d и несжимаемостью.

Цилиндрическая система координат $R_b\varphi L$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$ и связанная с центром масс местная прямоугольная система координат $L_m x = L_c - L$, $L_m y = R_b \cos\varphi$, $L_m z = R_b \sin\varphi$ жестко сцеплены с телом. Движение тела определяется вектором скорости $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ центра масс, расположенного при $L = L_c$, его вектором угловой скорости вращения относительно центра масс $\Omega = (0, \Omega_y, \Omega_z)$. Вращением относительно оси симметрии пренебрегаем.

В качестве критерия отрыва примем условие идеального отрыва, когда в области «аэродинамической тени» напряжения на теле отсутствуют. Условие идеального отрыва используется для решения задач о движении тела в разреженном газе или задач о проникании в грунтовые среды, когда отрыв потока среды происходит близко к краям миделева сечения фигуры (рис. 1).

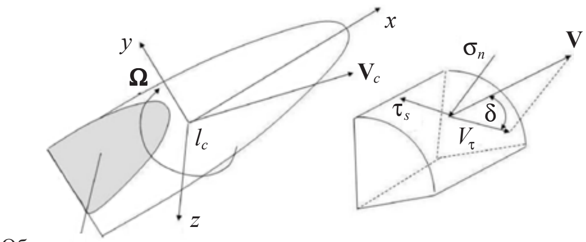


Рис. 1

Вектор напряжения на поверхности тела представим в виде: $\boldsymbol{\sigma} = (\tau_s \mathbf{n}_\tau - \sigma_n \mathbf{n})H(\delta)$, $H(\delta) = 0$ или 1 $(\delta < 0$ или $\delta \ge 0)$, где τ_s – заданное касательное напряжение; $\mathbf{n}_\tau$ – единичный касательный вектор в направлении скольжения; $\sigma_n > 0$ – контактное давление. Величину контактного давления представим суммой

$$\sigma_n = b_0\tau_d + C_x\rho_0 V^2/2, \quad C_x = C_x(\delta). \qquad (1)$$

Хотя гипотеза локальности не соответствует физической картине обтекания в дозвуковых течениях, представление нормальных напряжений в виде (1) позволяет получать простые эмпирические аппроксимации характеристик выпуклого тела вращения в потоке среды с приемлемой точностью. Запишем общие выражения для результирующей силы и момента

$$\mathbf{F} = L_m^2 \int_S (\tau_s \mathbf{n}_\tau - \sigma_n \mathbf{n}) H(\delta) dS, \ dS = r\sqrt{1+\gamma^2}\, d\varphi dl,$$

$$\mathbf{M} = L_m^3 \int_S [\mathbf{R} \times \sigma] dS = \int_S [\mathbf{R} \times (\tau_s \mathbf{n}_\tau - \sigma_n \mathbf{n})] H(\delta) dS.$$

Влияние торможения

Рассмотрим движение однородного конуса при $C_x = C_f \sin^2\delta$, $C_f = \text{const}$, отсутствии касательных напряжений ($\tau_s = 0$) и малых начальных возмущениях. Для того чтобы при движении конуса по траектории убывали угол атаки и кривизна траектории движения центра масс или амплитуды их колебаний, необходимо и достаточно, чтобы параметр $B_\rho = 3C_f\rho_0/(2\pi\rho_1)$ и тангенс угла полураствора конуса γ лежали в области, определяемой неравенствами. Здесь ρ_0, ρ_1 – плотность среды и конуса соответственно. На рис. 2. построены области параметров B_ρ, γ для случая замороженной осевой скорости, случая гидродинамического обтекания ($\tau_d = 0$) и случая $\kappa\gamma^2 = 1$ $\left(v_x = \sqrt{3b_0 t_d/(\pi\rho_1)}\right)$.

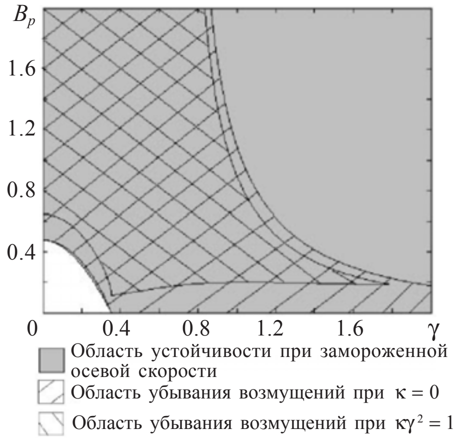


Рис. 2

Список литературы

1. Осипенко К.Ю., Симонов И.В. // Изв. РАН. МТТ. 2002. №1. С. 143–153.
2. Осипенко К.Ю. // Изв. РАН. МТТ. 2009. №2. С. 169–180.

MOTION OF THE BODY OF REVOLUTION IN A RESISTING MEDIUM WITH SMALL PERTURBATIONS

K.Yu. Osipenko

An approximate mathematical model is constructed for 3D motion of a body of revolution in a low-strength medium with asymmetric separation of the flow. A relationship between the kinematic and the load quantities at the interface between the body and the medium is postulated based on the isolated-element method, using exact solutions and experimental data. A criterion of ideal separation is postulated. It means that the portion of the surface facing the flow is wetted, while the shadowed region of the surface is stress-free. For the analysis of stability of the rectilinear motion of the body, the system of equations is linearized. The linearized system of equations governing the transverse motion splits into two independent systems describing the motion of the body in two orthogonal planes. In contrast to the works, which studied the stability of rectilinear motion in supposition of "frozen" axial velocity, the present paper considers the influence of braking on the stability of rectilinear motion. In the case of an unseparated flow and in the absence of tangential stresses, conditions of decrease of perturbations along the trajectory are obtained.

Keywords: penetration, elastoplastic medium, motion paths, flow separation, stability.

УДК 531.36:62.50

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С.В. Павликов

Ульяновский госуниверситет

svpavlikov@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Проводится развитие прямого метода Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями и управляемых систем с кусочно-непрерывными управлениями с запаздывающей обратной связью. Исследуется задача о стабилизации программных движений при учете запаздывания в структуре обратной связи в классе кусочно-непрерывных управляющих воздействий, разрывных на поверхности некоторого вида. Поставленная задача решается на основе метода предельных уравнений с использованием знакопостоянного функционала Ляпунова. В качестве примера рассматривается механическая система с нестационарными, голономными и идеальными связями.

Ключевые слова: стабилизация, программные движения, неавтономное функционально-дифференциальное уравнение, знакопостоянный функционал Ляпунова.

Теорема о стабилизации управляемой системы

Пусть R^n – линейное действительное пространство n-векторов x, $x' = (x_1, x_2, ..., x_n)$ с нормой $|x|$ ($(\cdot)'$ – операция транспонирования), $h > 0$ – действительное число, C – банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \to R^n$ с нормой $\|\varphi\| = \sup(|\varphi(s)|)$, $-h \le s \le 0$; для $H > 0$ $C_H = \{\varphi \in C : \|\varphi\| < H\}$; если $x : R \to R^n$ есть непрерывная функция, тогда для $t \in R$ функция $x_t \in$ $\in$ C определяется равенством $x_t(s) = x(t + s)$, $-h \le s \le 0$; под $\dot{x}(t)$ понимается правосторонняя производная.

Рассматривается управляемая система, движение которой описывается функционально-дифференциальным уравнением запаздывающего типа:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t, u). \qquad (1)$$

Здесь $x_t \in C_H$, $x(t) \in R^n$, $u \in U \subset R^m$, где u есть управляющее воздействие, U – некоторое множество функций $u = u(t, \varphi)$, кусочно-непрерывных в области $R^+ \times C_H$, имеющих разрыв на поверхности $\{\dot{\varphi}(0) + \psi(t, \varphi) = 0\}$, $\psi(t, \varphi)$: $R^+ \times C_H \to R^n$, $\psi(t, 0) = 0$; $f(t, x_t, u) : R^+ \times C_H \times R^m \to R^n$ есть некоторое отображение.

Пусть $X = \{x : [\alpha - h, +\infty) \to D \in C_H\}$, $\alpha > 0$, есть класс допустимых программных движений, являющихся абсолютно непрерывными функциями и обеспечивающихся управлениями u.

Пусть $u^0 \in U$ есть некоторое управляющее воздействие, $f_0 = f(t, \varphi, u^0)$ в области непрерывности $R^+ \times D$ функции $u^0(t, \varphi)$. Доопределим $f_0(t, \varphi)$ до $F(t, \varphi)$ согласно аналогичным доопределениям из [1] и рассмотрим дифференциальное включение:

$$\dot{x}(t) \in F(t, x_t). \qquad (2)$$

Предполагаем, что $x^0(t) \in X$ есть некоторое программное движение, обеспечивающееся управлением $u^0 \in U$, при этом имеет место соотношение

$$\dot{x}^0(t) \in F(t, x_t^0).$$

Полагаем, что решение $x = x^0(t)$ уравнения (2) единственно.

Предположим, что в уравнении (2) правая часть такова, что можно определить множество предельных включений

$$\dot{x}(t) \in F^*(t, x_t). \qquad (3)$$

Теорема 1. *Допустим, что можно найти функционал Ляпунова* $V = V(t, \varphi, \dot{\varphi})$, *такой что:*

1) $\omega_1(|\dot{\varphi}(0) + \psi(t, \varphi)|) \le V(t, \varphi, \dot{\varphi}) \le$ $\le \omega_2(\|\dot{\varphi}\| + \|\varphi\|)$;
2) $\dot{V}(t, \varphi, \dot{\varphi}) \le -\omega_3(|\dot{\varphi}(0) + \psi(t, \varphi)|)$;
3) *семейство предельных к* $x^0(t)$ *решений* $\{x^*(t)\}$ *асимптотически устойчиво относительно множества* $\{\dot{\varphi}(0) + \psi^*(t, \varphi) = 0\}$ *равномерно соответственно по отношению к* (3).

Тогда управление u^0 *является стабилизирующим для движения* $x = x^0(t)$.

Стабилизация программных движений систем с нестационарными связями

Рассматривается механическая система с нестационарными, голономными и идеальными связями, положение которой определяется n обобщенными координатами $q`=(q_1,q_2,...,q_n)$.

Пусть $(q_0(t),\dot{q}_0(t))$ есть какое-либо программное движение, реализуемое управлением $U=U^0(t)$. На основе теоремы 1 показывается, что управление

$$U=U^0(t)-\mu_0\text{sign}\,((\dot{q}(t)-\dot{q}_0(t))+$$

$$+\psi(t,q(t-h(t))-q^0(t-h(t)))$$

решает задачу о стабилизации движения $(q_0(t),$ $\dot{q}_0(t))$. Полученные результаты развивают некоторые результаты работ [2, 3].

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МД-7549.2010.1) и РНПВШ (2.1.1./11180).

Список литературы

1. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Физматгиз, 1985. 224 с.

2. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Ремшин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.

3. Пятницкий Е.С. Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // ДАН СССР. 1988. Т. 300, № 2. С. 300–303.

THE STABILITY OF PROGRAM MOTIONS OF MECHANICAL SYSTEMS

S.V. Pavlikov

A direct method of Lyapunov for analyzing the stability of functional-differential equations with discontinuous right parts and controlled systems with piecewise-continuous controls with lagging feedback is developed. The problem of stabilization of program movements is investigated, accounting for the delay in the feedback structure in a class of piecewise-continuous controlling effects, discontinuous on a surface of a certain kind. The problem is analyzed on the basis of the method of limiting equations, using constant-sign Lyapunov functional. As an example, a mechanical system with non-stationary, holonomous and ideal connections is analyzed.

Keywords: stability, program motions, nonautonomous functional-differential equation, sign-constant Lyapunov functional.

УДК 531.1:531.8

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛАСТИЧНЫХ КОЛЕС РОБОТОВ СИСТЕМАМИ МНОГИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

В.Е. Павловский[1]***, Д.А. Алексеенко***[2]***, В.В. Евграфов***[2]

[1]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва
[2]Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

vlpavl@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Представлено описание твердотельных моделей упругого колеса и ровера, оснащенного упругими колесами. Модели колес настраиваются так, чтобы соответствовать моделям пневматических колес низкого давления с нерастяжимыми безмоментными оболочками. Используются также общепринятые модели типа «Магической формулы Пасейки». Приведены результаты моделирования динамики колеса и четырехколесного аппарата.

Ключевые слова: мобильный робот, упругое колесо, парадигма многих твердых тел, моделирование.

Введение

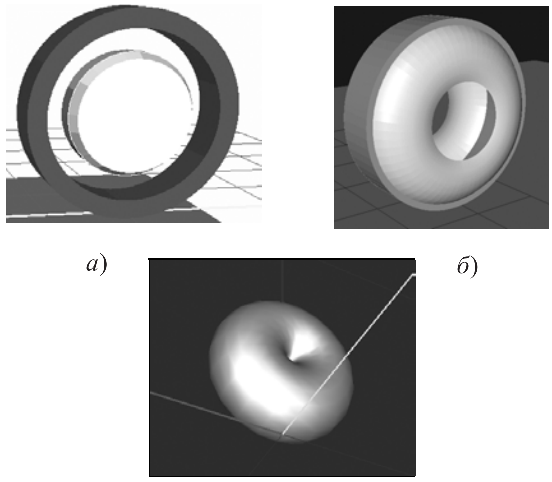
Одним из способов построения мобильных роботов высокой проходимости является оснащение их пневматическими колесами с пневматиками низкого давления. Такие колеса могут понадобиться, например, при организации движения ровера по бездорожью типа каменистой поверхности (Марс). Моделирование таких колес может выполняться системами твердых тел, образующих элементы колеса, связанных между собой упругими силами. Настоящая работа представляет схему твердотельной модели упругих колес.

Моделирование пневматического колеса системой твердых тел

Предпосылками твердотельного моделирования упругого колеса системами с упругими связями могут служить работы по моделированию пневматиков и разработки реальных конструкций [1–4].

Рассмотрим пневматическое колесо, у которого есть диск и шина. Диск представляет собой твердое тело, шина упругая. Для моделирования шины представим ее как кольцевую цепочку твердых тел, связанных упругими элементами. Для описания упругой связи шины с диском свяжем их упругими элементами. Систему тел, моделирующих шину, будем называть кордом. Общий вид двух моделей колес приведен на рис. 1: *а* и *б* – модели типа 1; *в* – модель типа 2.

Как показывает рис. 1, в первой модели корд представлен так, что его беговая дорожка (внешнее кольцо) является цилиндрической.



а) *б*) *в*)

Рис. 1. Модели колеса «тип 1» (вверху), «тип 2» (внизу)

Один элемент корда – это твердое тело в форме параллелепипеда. Два соседних элемента связаны при помощи вращательного шарнира. Последний элемент корда, кроме того, связан таким же шарниром с 1 элементом. В последнем шарнире должно выполняться условие совместимости элементов. Кроме шарниров в системе тел, образующих оболочку-корд, имеются силовые связи между соседними элементами, они условно названы «хордовыми силами».

Кроме шины в системе тел, составляющих колесо, имеется диск. Это тело, которое передает на корд моментные и силовые воздействия. Диск связан с оболочкой только силовыми элементами. Силовые элементы имеют точки «крепления» на диске и корде. Действие такой силы между точками крепления эквивалентно действию предварительно растянутой пружины, то есть притягивает точки друг к другу. Соответственно принятому расположению точек связи этим достигается растягивание оболочки. Эта же схема позволяет эффективно передавать тяговый момент с диска на шину.

В модели введены контактные силы типа «точки–поверхность». На каждый элемент корда приходится по 4+4 точек контакта. Выбранная схема достаточна для моделирования наезда на углы ступеньки или другого препятствия. Разделение контактных сил на два множества имеет целью моделирование действия грунтозацепов на колесе.

Описанная выше модель колеса имеет прямоугольную форму пятна контакта с поверхностью, что не позволяет повысить точность моделирования сил, действующих на ось вращения колеса в плоскости его движения и в боковом направлении. Учет этих сил позволяет изучать такие эффекты как, например, «шимми» колеса. Соответственно модель была модифицирована путем замены базового элемента корда. Вместо элемента в форме параллелепипеда был введен элемент с эллипсоидальной поверхностью, обладающий двумя кривизнами, это позволило ввести в рассмотрение сложный тип контакта «поверхность–поверхность», сложную форму пятна контакта. Твердотельная модель колеса с таким базовым элементом показана на рис. 1 (тип 2). Беговая дорожка корда не является цилиндром. С модифицированной моделью также проводятся численные эксперименты по ее верификации, для настройки используется, в частности, модель Ганса Пасейки [4].

Приводится ряд схем экспериментов по моделированию введенных систем.

Модели четырехколесного ровера

Модель ровера строится по следующей схеме. Настроенная на предыдущем этапе модель колеса используется как базовый примитив для описания моделей всех колес ровера. Корпус ровера представляет собой твердое тело. Корпус и диски колес соединены рычагами, на концах которых имеются вращательные шарниры. В шарнирах действуют крутящие моменты, имитирующие действие двигателей. Схемы моделей приведены на рис. 2 (слева ровер на поверхности с «камнями»).

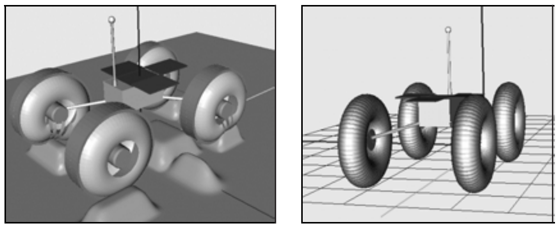


Рис. 2

Контакт с поверхностью определяется контактной жесткостью (600), коэффициентом демпфирования среды (100), трением покоя 0.5, трением скольжения 0.45. Для моделирования сопротивления грунта при движении колеса вводятся дополнительные силы, действующие на элементы шины, находящиеся в небольшой окрестности поверхности грунта. Константы подбирались так, чтобы коэффициент сопротивления движению был близок к 0.05. Численные эксперименты показали адекватность моделей реальной конструкции, и первая модель была принята в качестве базовой в проекте Марсианского ровера с разворачивающимися колесами для ESA в рамках гранта INTAS-CNES 4063.

Все твердотельные модели построены в среде пакета «Универсальный Механизм» [1].

В качестве планов развития работы рассматривается более подробное моделирование динамики колеса и ровера на местности со сложными препятствиями. Предполагается расширить подсистему, моделирующую свойства грунта, влияющие на опорную проходимость.

Работа поддержана РФФИ, гранты № 10-01-00160, 10-07-00409.

Список литературы

1. Погорелов Д.Ю. О численных методах моделирования движения систем твердых тел // Журнал вычислит. матем. и математич. физики. 1995. № 4. С. 501–506.

2. Дмитроченко О.Н., Михайлов Н.Н., Погорелов Д.Ю. Моделирование геометрически нелинейных упругих стержневых систем на основе подхода систем твердых тел // Динамика и прочность транспортных машин. Брянск, 1997.

3. Tweel: http://www.membrana.ru/articles/technic/2005/01/18/221800.html

4. Pacejka H.B. Tire and vehicle dynamics. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2002.

MODELING ELASTIC WHEELS OF ROBOTS AS SYSTEMS OF MULTIPLE RIGID BODIES

V.E. Pavlovsky, D.A. Alexeenko,V.V. Evgrafov

The description of rigid-state models of an elastic wheel and the rover equipped with elastic wheels is presented. Models of wheels are adjusted so that they correspond to models of low-pressure pneumatic wheels with inextensible torqueless covers. The standard models of the «Magic formula of Pasejka» type are also used. Results of modeling of the dynamics of a wheel and a four-wheel chassis are given.

Keywords: mobile robot, elastic wheel, paradigm of multiple rigid bodies, modeling.

УДК 52.531:52-14

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА «ФОТОН М-3» ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ЕГО УГЛОВОЙ СКОРОСТИ И НАПРЯЖЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

В.А. Панкратов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва

v.a.pankratov@live.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Выполнена реконструкция вращательного движения спутника «Фотон М-3» по данным бортовых измерений векторов угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли (МПЗ). Методика реконструкции основана на кинематических уравнениях вращательного движения твердого тела [1, 2]. В рамках этой методики данные измерений обоих типов, собранные на некотором отрезке времени, обрабатываются совместно. Измерения угловой скорости сглаживаются тригонометрическими полиномами, которые подставляются в кинематические уравнения Пуассона для элементов матрицы перехода от системы координат, связанной со спутником, к гринвичской системе координат. Полученные таким образом уравнения представляют собой кинематическую модель вращательного движения спутника. Решение этих уравнений, реконструирующее фактическое движение, находится из условия наилучшей в смысле метода наименьших квадратов аппроксимации данных измерений вектора напряженности МПЗ с его расчетными значениями. Реконструкция выполнена на 9 интервалах времени продолжительностью по 84 мин. Проведено сравнение найденных аппроксимаций вращательного движения с результатами, полученными с помощью интегральной статистической методики, использующей только измерения МПЗ и полные уравнения движения спутника. Результаты, полученные в рамках этих двух методик, практически совпадали, что свидетельствует о приемлемой точности используемых во второй методике уравнениях движения.

Ключевые слова: спутник, «Фотон М-3», вращательное движение, механика космического полета, уравнения Пуассона, магнитное поле Земли, кинематическая модель, метод наименьших квадратов, обработка данных измерений.

В основе математической модели лежат кинематические уравнения Пуассона для первых двух строк матрицы перехода $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^{3}$ от приборной системы координат, связанной со спутником, к гринвичской системе координат [3, 4]. Входящие в эти уравнения компоненты угловой скорости представляются тригонометрическими полиномами

$$\chi_i(t)=b_{i,K+1}+b_{i,K+2}(t-t_0^{\Omega})+\sum_{k=1}^{K}b_{i,k}\sin\frac{\pi k(t-t_0^{\Omega})}{t_M^{\Omega}-t_0^{\Omega}},$$

которые аппроксимируют последовательности измерений компонент угловой скорости (t_m^{Ω}, Ω_i^m), $i = 1, 2, 3$, $m = 0, 1,\ldots, M$, $K \le M-1$. Коэффициенты $b_{i,k}$ находились методом наименьших квадратов, затем коэффициенты при старших степенях корректировались с помощью специальных множителей [3, 4].

Следуя методу наименьших квадратов, реконструкцией вращательного движения спутника, будем считать решение уравнений Пуассона, минимизирующее функционал

$$\Phi=\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{n\in U(\tau)}[h_i^{(n)}-h_i(t)]^2-N_\tau\widetilde{\Delta}_{H_i}^2\right\},$$

$$\widetilde{\Delta}_{H_i}=\frac{1}{N_\tau}\sum_{n\in U(\tau)}[h_i^{(n)}-h_i(t_n)],$$

$$U(\tau)=\{n: t_0^{\Omega}+\tau\le t_n\le t_M^{\Omega}+\tau\}.$$

Здесь $h_i(t)=\sum_{i=1}^{3}H_j(t)a_{ji}(t)$; $H_j(t)$ – расчетные значения компонент напряженности магнитного поля Земли (МПЗ) в гринвичской системе координат в момент времени t; N_τ – число элементов множества $U(\tau)$; $h_i^{(n)}$ – сглаженные измерения – псевдоизмерения – МПЗ [1–4]; $\widetilde{\Delta}_{H_i}$ – постоянные смещения в псевдоизмерениях МПЗ; τ – смещение шкалы времени аппаратуры DIMAC относительно шкалы времени системы управления спутником. Функции $H_i(t)$ строятся с использованием кеплеровой аппроксимации орбитального движения спутника и аналитической модели МПЗ IGRF2005. Минимизация функционала проводится по начальным условиям решения уравнений

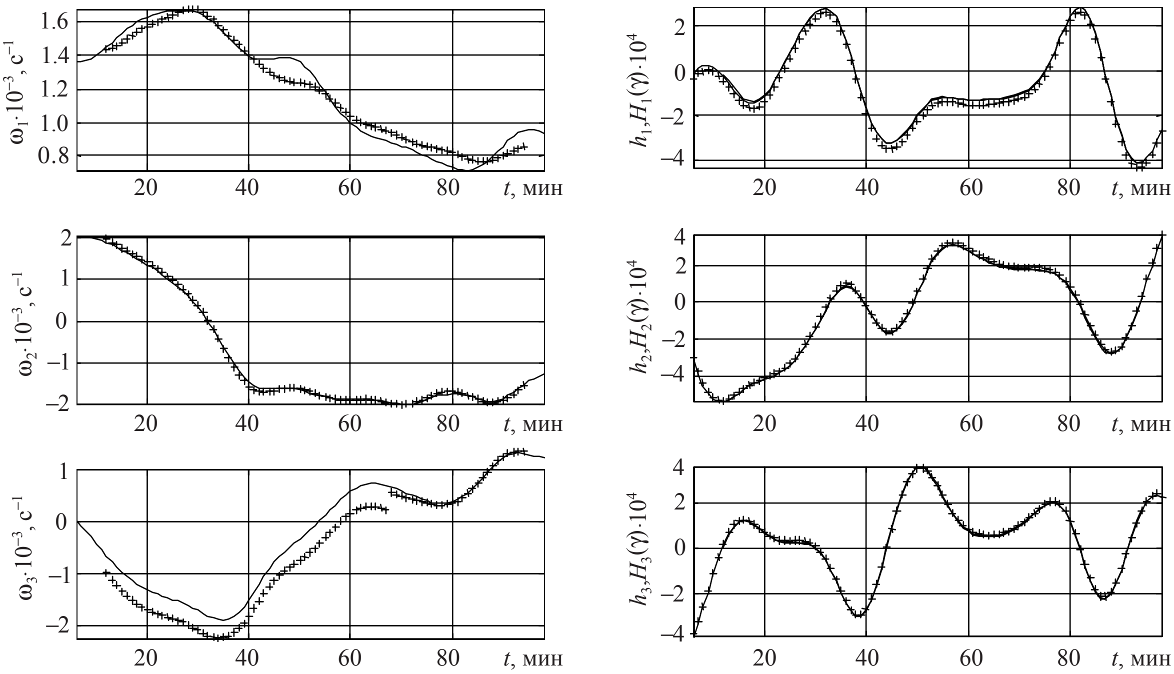


Рис. 1. Виток 17. Момент времени $t = 0$ на графиках соответствует 14:05:21 15.09.2007 ДМВ, $\sigma_{кин} = 468\gamma$, $\sigma_{дин} = 360\gamma$

Пуассона, параметризуемым тремя углами, и смещениям τ [3, 4].

В случае «Фотона М-3» методика, основанная на кинематических уравнениях, позволила реконструировать движение на 9 интервалах времени, отвечающих проведенным сеансам измерений угловой скорости.

Пример аппроксимации фактического движения спутника «Фотон М-3» приведен на рис. 1. В правой части рисунка в каждой системе координат маркерами указаны псевдоизмерения МПЗ, а сплошными линиями изображены значения МПЗ, рассчитанные в рамках кинематической и динамической моделей [1–4]. При выбранном масштабе данные графики неразличимы.

Левая часть рисунка содержит графики зависимостей от времени компонент ω_i угловой скорости спутника. Сплошные кривые суть графики функций $\omega_i(t)$, полученных в рамках динамической модели [1], маркерами обозначены значения полиномов $\chi_i(t)$ на равномерной сетке.

Анализ приведенного рисунка и других аналогичных рисунков из [1] позволяет заключить, что кинематическая модель и модель, основанная на полных уравнениях движения, обеспечивают реконструкцию движение спутника «Фотон М-3» примерно с одинаковой точностью.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 08-01-00467.

Список литературы

1. Абрашкин В.И. и др. Неуправляемое вращательное движение спутника «Фотон М-2» и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2007. Т. 45, № 5, С. 450–470.
2. Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю. Определение вращательного движения спутника «Фотон М-2» по данным бортовых измерений угловой скорости // Космические исследования. 2008. Т. 46, №2. С. 148–167.
3. Абрашкин В.И. и др. Определение вращательного движения спутника по данным измерений его угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли с использованием кинематической модели движения // Космические исследования. 2005. Т. 43, №4. С. 295–305.
4. Абрашкин В.И. и др. Определение вращательного движения спутника «Фотон М-2» по данным измерений его угловой скорости и напряженности магнитного поля Земли с использованием кинематической модели движения // Препринт №60. 2006. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

DETERMINING THE ATTITUDE MOTION OF THE «FOTON M-3» SPACECRAFT BASED ON THE MEASUREMENTS OF ITS ANGULAR RATE AND THE STRENGTH OF THE EARTH MAGNETIC FIELD

V.A. Pankratov

The paper presents the results of reconstruction of the attitude motion of the «Foton M-3» spacecraft. The reconstruction is based on processing the measurements of two vectors: the spacecraft angular rate and the strength of the Earth magnetic field [1, 2]. The processing technique uses kinematical equations of the attitude motion of a rigid body. In its framework, the measurement data of both types, collected on a time interval, are processed jointly. The angular rate data are smoothed by trigonometric polynomials and those polynomials are substituted in Poisson kinematical equations for elements of the transition matrix, which transforms the spacecraft coupled coordinate system to the Greenwich one. The equations obtained present the kinematical model of a spacecraft attitude motion. The solution of the equations, which approximates the real motion, is found by the least squares method from the condition of the best agreement between measurement and calculation data of the magnetic strength. The reconstruction was made for 9 time intervals, each interval having the length of 84 min. The results proved to be very close to the results obtained by the technique that uses the magnetic measurements only and the full system of spacecraft motion.

Keywords: spacecraft, «Foton M-3», attitude motion, space flight mechanics, Poisson kinematical equations, Earth magnetic field, kinematical model, least squares method, measurement data processing.

УДК 539.3

О ВЛИЯНИИ ДИССИПАЦИИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИНЫ, ОБТЕКАЕМОЙ ПОТОКОМ ГАЗА

Ю.Ю. Панченко

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

panyurij@hotmail.com

Поступила в редакцию 16.05.2011

Одной из важных для практики является задача о флаттере обшивки крыльев самолета и его хвостового оперения. Рассматривая динамику крыла, остановимся на наиболее простой модели, а именно, будем исследовать бесконечную пластину, которая обтекается сверхзвуковым потоком газа. На пластину действует сила сопротивления, пропорциональная производной по времени от функции прогиба, и сила со стороны потока, которую можно интерпретировать как силу сопротивления, вводимую в системе координат, связанной с потоком. Будем называть ее трением в потоке. Показано, что сопротивление оказывает стабилизирующее действие на пластину, тогда как трение в потоке дает полностью противоположный эффект. Увеличение трения в потоке уменьшает критическую скорость.

Данная задача сходна с теми, в которых наблюдается дестабилизирующее влияние трения (задачи о вращающемся вале, об устойчивости тангенциального разрыва и др.) [1, 2].

Ключевые слова: бесконечная пластинка, флаттер, разделение трения, собственно сопротивление, трение в потоке.

Уравнение движения пластины в сверхзвуковом потоке имеет вид [3]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+(\varepsilon+\gamma)\frac{\partial w}{\partial t}+\gamma\upsilon\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0, \qquad (1)$$

где $w(x,t)$ – функция прогиба срединной поверхности, ε – коэффициент сопротивления, γ – коэффициент трения в потоке, υ – параметр скорости потока.

В качестве граничных примем условия шарнирного опирания:

$$w\big|_{x=0}=w\big|_{x=1}=w''\big|_{x=0}=w''\big|_{x=1}=0. \qquad (2)$$

Воспользовавшись методом Бубнова – Галеркина, ограничиваясь рассмотрением первых двух форм колебаний, получим следующее значение критической скорости потока, при которой пластина теряет устойчивость [4]:

$$\upsilon=\frac{45\pi^4}{16}\frac{1}{\gamma}\sqrt{1+\frac{34}{225}(\varepsilon+\gamma)^2}. \qquad (3)$$

При определении предельной скорости использованы критерии Льенара–Шипара и Bottema [5].

Увеличение сопротивления ε ведет к росту критической скорости и, следовательно, к расширению границ области устойчивости пластины, тогда как трение в потоке γ приводит к противоположному эффекту. Метод Бубнова–Галеркина прост для применения, но не позволяет уверенно говорить о высокой точности результатов, поскольку остается открытым вопрос о том, достаточно ли двух членов ряда для адекватного описания поведения системы. Но при увеличении числа форм колебаний возникают алгебраические сложности.

Воспользуемся другим подходом к исследованию задачи. Определим границу области устойчивости, рассматривая спектр собственных значений дифференциального оператора краевой задачи (1), (2) в зависимости от сопротивления и трения в потоке. Критическая скорость, при которой возникает флаттер, отвечает первому появлению характеристических показателей с положительной вещественной частью.

Показано, что с увеличением трения в потоке γ характеристические показатели остаются комплексно-сопряженными и лежащими в левой половине комплексной полуплоскости, пока трение не достигнет критического значения. Эта точка соответствует появлению кратных показателей. После этого они расходятся в противоположные стороны параллельно действительной оси. Один из показателей переходит в правую полуплоскость, что отвечает потере устойчивости пластины. С увеличением сопротивления ε характеристические показатели остаются в левой полуплоскости при любых значениях параметра ε. Система остается устойчивой.

Таким образом, показано, что задача исследования устойчивости пластины в сверхзвуковом потоке аналогична задаче о дестабилизации трением, вводимым в различных системах отсчета.

Список литературы

1. Денисов Г.Г. Диссипация и устойчивость в механических системах // МТТ. 1998. №2. С. 183–191.
2. Денисов Г.Г. К вопросу об устойчивости поверхности тангенциального разрыва между жидкостями // Механика жидкости и газа. 2001. №1. С. 182–184.
3. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит, 1961. 339 с.
4. Панченко Ю.Ю. Исследование динамики панельного флаттера // Труды математич. центра им. Н.И. Лобачевского. Казанское математическое общество. 2009. Т. 39. С. 320–322.
5. Kirillov O.N., Verhulst F. Paradoxes of dissipation-induced destabilization or who opened Whitney's umbrella? // ZAMM, Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2010. N 6. 28 с.

ON THE EFFECT OF DISSIPATION ON THE STABILITY OF A PLATE IN A SUPERSONIC GAS FLOW

Yu.Yu. Panchenko

One of the most critical practical challenges is the problem of aircraft wing flutter and empennage. Confining ourselves to consideration of a wing, it is possible to formulate several physical models for its description. It was decided to choose and take into consideration the simplest one which is to consider an infinite plate which is flowed by a supersonic gas flow. There are two points of view on the force by means of which the flow impacts the plate. The first one is connected with oscillations around the Earth, i.e. in inertial frame of reference, while the second one is related with translational motion in the flow, i.e. in non-inertial frame of reference. Conformable to the above, such force can be divided into two components which are strongly related to dissipation: 1) properly resistance (from the first point of view) and 2) dissipation in flow (according to the second point of view). It has been shown that properly resistance, according to our expectations, stabilizes the plate, i.e. if it increases the domain of stability enlarges. And vice versa, dissipation in flow gives opposed results. Its increase brings up the loss of stability and diminishes the domain of stability and critical velocity. This problem is closely related to a wide range of problems where the distinction between internal and external friction is made such as Ziegler's paradox, the problem of a running shaft, the problem of stability of tangential discontinuity [1, 2].

Keywords: infinite plate, flutter, division of friction, properly resistance, dissipation in flow.

УДК 517.977.8

ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДВУМЯ ДОГОНЯЮЩИМИ ОДНОГО УБЕГАЮЩЕГО

© 2011 г. ***В.С. Пацко***[1]***, С.А. Ганебный***[1]***, С.С. Кумков***[1]***, С. Ле Менек***[2]

[1]Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург
[2]EADS / MBDA France, Париж (Франция)

kumkov.jr@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Приводятся результаты численного исследования антагонистической линейной дифференциальной игры, в которой функция платы подсчитывается в два момента времени с использованием операции минимума. С содержательной точки зрения рассматриваемая задача получается в результате линеаризации задачи преследования, где два догоняющих объекта атакуют на встречных курсах убегающий объект. Сложность решения вызвана тем, что функция платы (а, следовательно, и функция цены) не является выпуклой.

Ключевые слова: дифференциальные игры, максимальные стабильные мосты, оптимальные стратегии, численные методы.

Исследуется дифференциальная игра с двумя догоняющими и одним убегающим. Три инерционных объекта передвигаются по прямой. Описание динамики для преследователей P_1 и P_2:

$$\begin{aligned} &\ddot{z}_{P_1} = a_{P_1}, && \ddot{z}_{P_2} = a_{P_2}, \\ &\dot{a}_{P_1} = (u_1 - a_{P_1})/l_{P_1}, && \dot{a}_{P_2} = (u_2 - a_{P_2})/l_{P_2}, \\ &|u_1| \le \mu_1, && |u_2| \le \mu_2, \\ &a_{P_1}(t_0) = 0, && a_{P_2}(t_0) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь z_{P_1} и z_{P_2} – геометрические положения, a_{P_1} и a_{P_2} – ускорения, вызванные управлениями u_1, u_2. Скорость отработки управляющих воздействий задается константами l_{P_1} и l_{P_2} (постоянные времени).

Динамика убегающего E имеет аналогичный вид:

$$\begin{aligned} &\ddot{z}_E = a_E, && a_E = (\nu - a_E)/l_E, \\ &|\nu| \le \nu, && a_E(t_0) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Зафиксируем моменты T_1 и T_2. В момент T_1 подсчитывается промах первого преследователя относительно убегающего, в момент T_2 – промах второго преследователя:

$$\begin{aligned} r_{p_1,E}(T_1) &= |z_E(T_1) - z_{P_1}(T_1)|, \\ r_{p_2,E}(T_2) &= |z_E(T_2) - z_{P_2}(T_2)|. \end{aligned} \tag{3}$$

Условимся, что преследователи действуют координированно. Это означает, что можно объединить их в одного игрока P (назовем его первым), который распоряжается векторным управлением $u = (u_1,\ u_2)$. Убегающего E считаем вторым игроком. Результирующим промахом назовем величину

$$\varphi = \min\{r_{p_1,E}(T_1), r_{p_2,E}(T_2)\}. \tag{4}$$

В каждый момент t игроки точно знают все фазовые координаты $z_{P_1}, \dot{z}_{P_1}, a_{P_1}, z_{P_2}, \dot{z}_{P_2}, a_{P_2}, z_E, \dot{z}_E, a_E$. Первый игрок, строя свое управление по принципу обратной связи, старается минимизировать промах φ, второй максимизирует промах.

Соотношения (1)–(4) задают стандартную антагонистическую дифференциальную игру [1]. Требуется найти функцию цены и построить оптимальные стратегии игроков.

Опишем содержательную задачу, разумное упрощение которой приводит к формулировке модельной игры (1)–(4). Предположим, что два догоняющих объекта атакуют на встречных курсах убегающий объект. Например, это могут быть ракеты или самолеты в горизонтальной плоскости. Номинальное движение первого догоняющего подбирается по номинальному движению убегающего так, что в некоторый момент T_1 происходит их точная встреча. Аналогично подбирается номинальное движение второго догоняющего (встреча в момент T_2). Однако реальные начальные положения объектов отличны от номинальных. Кроме того, убегающий объект, используя свое управление, может изменять траекторию своего движения по сравнению с номинальной (но не принципиально, без каких-либо разворотов). Корректирующие координированные усилия догоняющих вырабатываются поэтому в процессе движения по принципу обратной связи так, чтобы минимизировать результирующий промах, определяемый как минимум из отклонений (по абсолютной величине) в моменты T_1 и T_2 соответственно первого и второго догоняющего от убегающего.

Переход от нелинейной динамики к динамике, линеаризованной относительно номинальных движений, и дает рассматриваемую постановку.

Приведены результаты численного исследования игры (1)–(4) для всех возможных вариантов соотношений динамических возможностей преследователей и убегающего.

Сложность решения вызвана тем, что функция платы φ (даже если $T_1 = T_2$) не является выпуклой. В статье [2] был рассмотрен случай «сильных» преследователей и аналитическими методами исследовано множество разрешимости, соответствующее поимке с нулевым результирующим промахом. Для $T_1 = T_2$ получено точное решение, при $T_1 \neq T_2$ дана оценка сверху искомого множества. В общем случае получить аналитическое решение, на взгляд авторов, не является возможным.

При численном исследовании сделан упор на алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр, разработанные в Институте математики и механики УрО РАН [3]. Основой является попятное построение множеств уровня (множеств Лебега) функции цены. Оптимальные стратегии игроков строятся в результате обработки таких множеств.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №№ 09-01-00436 и 10-01-96006).

Список литературы

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

2. Le Menec S. Linear differential game with two pursuers and one evader. In: Annals of the International Society of Dynamic Games. Vol. 11: Advances in Dynamic Games. Theory, Applications, and Numerical Methods for Differential and Stochastic Games / Eds. M. Breton, K. Szajowski. Boston: Birkhauser, 2011. P. 209–226.

3. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / Под ред. А.И. Субботина, В.С. Пацко. Свердловск: Институт математики и механики, 1984.

THE PROBLEM OF PURSUIT OF ONE EVADER BY TWO PURSUERS

V.S. Patsko, S.A. Ganebny, S.S. Kumkov, S. Le Menec

Results of the numerical investigation of an antagonistic linear differential game, where the payoff function is computed at two instants using the operation of minimum are presented. From the practical point of view, the problem is get after linearization of a pursuit-evasion problem, where two pursuing objects attack another evading one on collision courses. The difficulty of the solution is connected to the fact that the payoff function (and, therefore, the value function) is not convex.

Keywords: differential games, maximal stable bridges, optimal strategies, numerical methods.

УДК 531.8

АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМ ТЕЛ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Д.Ю. Погорелов

Брянский государственный технический университет

pogorelov@tu-bryansk.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассмотрены алгоритмы моделирования динамики систем абсолютно твердых и деформируемых тел с большим числом степеней свободы, допускающие эффективное распараллеливание на многоядерных компьютерах. В качестве примеров приведены модели, содержащие сотни тел, в том числе модели поездов, гусеничных машин, процессов бурения.

Ключевые слова: динамика систем тел, параллельные вычисления, численные методы, жесткие уравнения движения.

Введение

Рассмотрены основные идеи для расчета динамики систем тел с большим числом степеней свободы в программном комплексе «Универсальный механизм» (ПК УМ, www.umlab.ru) с использованием параллельных расчетов на многоядерных компьютерах. Один из наиболее эффективных приемов построения эффективных для распараллеливания уравнений движения состоит в использовании максимального числа координат, при котором все шарниры заменяются упруго-диссипативными силовыми элементами. В этом случае любая система является множеством свободных тел, связанных посредством силовых элементов. Использование податливых шарниров приводит к высокой жесткости уравнений движения и требует использования неявных численных схем с оценкой матриц Якоби уравнений движения [1]. Эффективная реализация алгоритма использует приближенные аналитические выражения для матриц Якоби жестких силовых взаимодействий. При моделировании систем со средней жесткостью уравнений эффективное распараллеливание решения системы алгебраических уравнений на каждом шаге интегрирования достигается с помощью метода сопряженных градиентов с применением специальной матрицы предобусловливания.

Уравнения движения для параллельных расчетов

Пусть $r_i = (x_i, y_i, z_i)^{\mathrm{T}}$ – декартовы координаты начала отсчета, связанные с телом i (СКI); p_i – координаты, определяющие ориентацию СКI. Кинематические соотношения для тела i включают в себя выражения для линейных и угловых скоростей и ускорений тела $v_i, a_i, \omega_i, \varepsilon_i$ и матрицы направляющих косинусов A_{0i}:

$$v_i = \dot{r}_i, \quad a_i = \ddot{r}_i, \quad A_{0i} = A_{0i}(p_i),$$
$$\omega_i = B_i \dot{p}_i, \quad \varepsilon_i = B_i \ddot{p}_i + \varepsilon'_i. \qquad (1)$$

Для каждого тела i записываются теорема о движении центра масс и динамические уравнения Эйлера, приведенные к началу отсчета СКI:

$$M_i W_i = G_i, \qquad (2)$$

где M_i, W_i, G_i – матрица инерционных параметров, вектор ускорений, а также вектор инерционных и активных сил для тела i,

$$M_i = \begin{pmatrix} m_i E & -m_i \tilde{\rho}_{ci} \\ m_i \tilde{\rho}_{ci} & I_i \end{pmatrix}, \quad W_i = \begin{pmatrix} a_i \\ \varepsilon_i \end{pmatrix},$$
$$G_i = \begin{pmatrix} -m_i \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_i \rho_{ci} + F_i \\ -\tilde{\omega}_i I_i \omega_i + T_i \end{pmatrix}.$$

В этих формулах m_i – масса тела, I_i – матрица тензора инерции относительно осей СКI, F_i, T_i – главный вектор и главный момент активных сил, приведенных к началу отсчета СКI, E – единичная матрица.

В качестве типичного примера рассмотрим модель податливого вращательного шарнира, соединяющего тела u, v. Пусть ρ_u^u, ρ_v^v – радиусы-векторы шарнирной точки; e_u^u, e_v^v – шарнирные векторы в СКU, СКV. Под шарнирной точкой понимается точка на оси вращения, направление оси задается шарнирным вектором. Если шарнир является абсолютно твердым, имеют место уравнения связей:

$$\Delta r_s = r_v + A_{0v}\rho_v^v - r_u - A_{0u}\rho_u^u = 0, \quad \Delta\pi_s = \tilde{e}_u e_v = 0.$$

Тогда модель соответствующего податливого шарнира следующая:

$$F_{u,s} = c\Delta r_s + \mu\Delta\dot{r}_s,$$
$$T_{u,s} = \tilde{\rho}_u F_{u,s} + c_a\Delta\pi_s + \mu_a\Delta\dot{\pi}_s. \quad (3)$$

Здесь $F_{u,s}$, $T_{u,s}$ – сила и момент, приложенные к телу u; c, c_a, μ, μ_a – линейные и угловые коэффициенты жесткости и демпфирования податливого шарнира.

Численные методы

Рассмотрим неявный многошаговый метод для численного решения уравнений движения. В начале каждого шага интегрирования рассчитываются прогнозные значения координат r_i^p, p_i^p и кинематических переменных $v_i^p, \omega_i^p, a_i^p, \varepsilon_i^p$. Здесь и далее мы опустили индекс шага. Корректирующие переменные δx_i, δp_i рассчитываются так, что $r_i = r_i^p + \delta r_i$, $p_i = p_i^p + \delta p_i$. Принимая во внимание (1), ускорения W_i запишем в зависимости от корректора в виде:

$$W_i = W_i^p + \delta R_i/\beta^2, \quad W_i^p = (a_i^{pT}\,\varepsilon_i^{pT})^T,$$
$$\delta R_i = (\delta r_i^T B_i \delta p)^T. \quad (4)$$

Параметр β пропорционален шагу интегрирования.

Подставляя (4) в (2), получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\delta R_i^* = C_i^{-1}\delta R_i$:

$$M_i^*\delta R_i^* = \beta^2 Q_i^*(\delta R_i^*), \quad (5)$$

где

$$M_i^* = C_i^T M_i C_i, \quad Q_i^* = C_i^T(G_i - M_i W_i^p),$$
$$C_i = \begin{pmatrix} E & -\tilde{r}_i \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Эффективное параллельное решение уравнений (5) в случае симметричных приближенных матриц Якоби [2] для уравнений средней жесткости может быть реализовано с помощью метода сопряженных градиентов. Например, приближенная локальная матрица Якоби для податливого вращательного шарнира (3) является симметричной и отрицательно полуопределенной:

$$J_s = -\left(c + \frac{\mu}{\beta}\right)\begin{pmatrix} E & -\tilde{r}_s \\ \tilde{r}_s & -\tilde{r}_s\tilde{r}_s \end{pmatrix} -$$
$$-\left(c_a + \frac{\mu_a}{\beta}\right)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E - e_u e_u^T \end{pmatrix}, \quad r_s = r_u + \rho_u.$$

Описанный алгоритм реализован в ПК УМ и используется для моделирования динамики систем тел с большим числом степеней свободы: гусеничных машин, составов железнодорожных поездов и т.д., рис. 1.

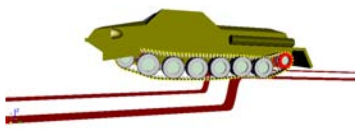


Рис. 1

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 07-01-00134, 08-01-00677.

Список литературы

1. Погорелов Д.Ю. Моделирование связей податливыми шарнирами // ТиСУ. 2011. №1. С. 162–177.
2. Погорелов Д.Ю. Матрицы Якоби уравнений движения систем тел // ТиСУ. 2007. №4. С. 52–66.

ALGORITHMS FOR SIMULATING MULTI-BODY SYSTEMS WITH A LARGE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM

D.Yu. Pogorelov

Algorithms for efficient parallel simulation of large multi-body systems using multi-core processors are discussed. Systems with hundreds of bodies such as railway trains, tracked vehicles and drill strings are considered as examples.

Keywords: multibody system dynamics, parallel computations, numerical methods, stiff equations of motion.

УДК 534:519.2

АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ ПО ДОРОГЕ СО СЛУЧАЙНЫМ ПРОФИЛЕМ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ

И.Е. Полосков

Пермский госуниверситет

polosk@psu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Для анализа нестационарных режимов колебаний транспортного средства (ТС) применена методика, которая основана на сочетании метода численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений без запаздывания и схемы расширения фазового пространства. Эта методика была использована для вычисления оценок вектора математических ожиданий и элементов ковариационной матрицы фазового вектора системы, которые были получены в результате статистической обработки результатов численного интегрирования уравнений движения.

Ключевые слова: транспортное средство, неровная дорога, запаздывание, моментные функции, расширение фазового пространства.

Введение

В течение значительного времени большое внимание уделяется изучению динамики транспортных средств (ТС), двигающихся по неровной поверхности. Перемещение автомобиля по дорогам с различным микропрофилем сопровождается непрерывными колебаниями его подрессоренных и неподрессоренных частей, которые оказывают вредное влияние на водителя, пассажиров и перевозимые грузы, ухудшают условия работы агрегатов и узлов и вынуждают уменьшать скорость движения.

Характеристики транспортных динамических систем получают возмущение от воздействий, возникающих из-за неровностей дороги; изменений в скорости движения; наличия демпфирования и жесткости в колесах [1]. Наряду с учетом нерегулярности дорожного полотна уже давно признано необходимым принимать во внимание и запаздывание воздействия случайного профиля на задние колеса ТС.

В настоящей работе применена методика, которая основана на сочетании метода численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) без запаздывания и схемы расширения фазового пространства, представленных в работах [2–4], для анализа нестационарных режимов в линейной стохастической системе, описывающей движение автомобиля по дороге со случайным микропрофилем с учетом наличия расстояния между осями передних и задних колес.

Модель транспортного средства

Рассматривается движение ТС в вертикальной плоскости. Схема этого ТС состоит из движущейся массы m, подвешенной на двух колесах, и моделируется системой с двумя степенями свободы (рис. 1). Предполагается, что в процессе движения подвеска остается вертикальной.

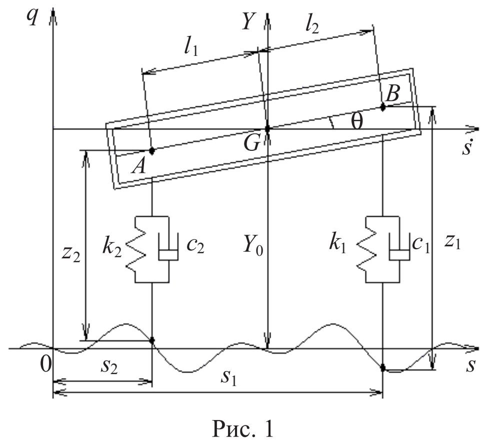


Рис. 1

Обозначим через $y(t)$ смещение центра масс из положения статического равновесия (соответствующего y_0), а через $\theta(t)$ – угол наклона корпуса ТС (t – время). Пусть $q = q(s)$ – функция, характеризующая профиль дороги ($s = r(t)$ – пройденный путь), G – центр масс, k_i и c_i – коэффициенты жесткости и демпфирования

(i = 1, 2). Тогда уравнения движения будут иметь вид [5]:

$$m\ddot{y} + c_1\dot{z}_1 + c_2\dot{z}_2 + k_1 z_1 + k_2 z_2 = mg,$$
$$I\ddot{\theta} + c_1 l_1 \dot{z}_1 - c_2 l_2 \dot{z}_2 + k_1 l_1 z_1 + k_2 l_2 z_2 = 0, \quad (1)$$

где I – момент инерции ТС относительно центра масс, g – ускорение свободного падения, точками обозначены производные по времени.

Если последовательно выполнить замены переменных

$$z_1(t) = y_0 + y(t) + l_1[\theta_0 + \theta(t)] - q_1(t),$$
$$z_2(t) = y_0 + y(t) - l_2[\theta_0 + \theta(t)] - q_2(t),$$
$$y = x_1, \quad \dot{y} = x_2, \quad \theta = x_3, \quad \dot{\theta} = x_4,$$

где

$$y_0 = \frac{mg}{l^2}\left(\frac{l_2^2}{k_1} + \frac{l_1^2}{k_2}\right), \ \theta_0 = \frac{mg}{l^2}\left(\frac{l_2}{k_1} - \frac{l_1}{k_2}\right), \ l = l_1 + l_2,$$
$$q_1(t) = q(s_1(t)), \ q_2(t) = q(s_2(t)), \ s_2(t) = s_1(t) - l,$$

и ввести обозначения

$$c_{11} = \frac{c_1}{m}, \ c_{12} = \frac{c_2}{m}, \ k_{11} = \frac{k_1}{m}, \ k_{12} = \frac{k_2}{m},$$
$$c_{21} = \frac{c_1 l_1}{I}, \ c_{22} = -\frac{c_2 l_2}{I}, \ k_{21} = \frac{k_1 l_1}{I}, \ k_{22} = -\frac{k_2 l_2}{I},$$

то уравнения (1) можно записать так:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_3 = x_4,$$
$$\dot{x}_2 = -(c_{11} + c_{12})x_2 - (c_{11}l_1 - c_{12}l_2)x_4 - (k_{11} + k_{12})x_1 -$$
$$-(k_{11}l_1 - k_{12}l_2)x_3 + c_{11}\dot{q}_1 + c_{12}\dot{q}_2 + k_{11}q_1 + k_{12}q_2,$$
$$\dot{x}_4 = -(c_{21} + c_{22})x_2 - (c_{21}l_1 - c_{22}l_2)x_4 - (k_{21} + k_{22})x_1 -$$
$$-(k_{21}l_1 - k_{22}l_2)x_3 + c_{21}\dot{q}_1 + c_{22}\dot{q}_2 + k_{21}q_1 + k_{22}q_2. \quad (2)$$

При моделировании профиля дороги наиболее часто применяется схема, в которой неровности пути формируются в результате прохождения белого шума через линейный фильтр второго порядка. В данной работе форма фильтра была выбрана в виде [6]:

$$q''(s) + 2\alpha q'(s) + \omega^2 q(s) = g_0 \xi^*(s), \quad g_0^2 = 4\alpha\omega^2\sigma_0^2,$$

где $\xi^*(s)$ – белый шум переменной s. При этом отклик $q(s)$ будет иметь корреляционную функцию

$$K_q(s) = \sigma_0^2 e^{-\alpha|s|}\left(\cos\omega_0 s + \frac{\alpha}{\omega_0}\sin\omega_0 |s|\right),$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha^2,$$

где σ_0 = const – стандарт микропрофиля дороги. После перехода в уравнении фильтра от переменной s к времени t в предположении, что $s = r(t)$ – монотонно возрастающая функция времени, можно построить систему СДУ, представляющую преобразованный фильтр:

$$\dot{q}_1 = \frac{q_2}{\varphi(t)}, \quad \dot{q}_2 = -\frac{2\alpha q_2 + \omega^2 q_1}{\varphi(t)} + \frac{g_0}{\sqrt{\varphi(t)}}\xi(t),$$
$$\varphi(t) = \psi'(s)\big|_{s=r(t)}, \quad t = \psi(s). \quad (3)$$

Результаты исследований

Указанная во введении методика была применена для вычисления оценок вектора математических ожиданий и элементов ковариационной матрицы фазового вектора системы, которые были получены в результате статистической обработки результатов численного интегрирования уравнений (2), (3). В качестве данных для расчетов использовались характеристики реальных ТС и дорог (грунтовка, асфальтовое и булыжное шоссе). На рис. 2 показано поведение математического ожидания $x_4(t)$ для одного из автомобилей при движении по дорогам различных типов.

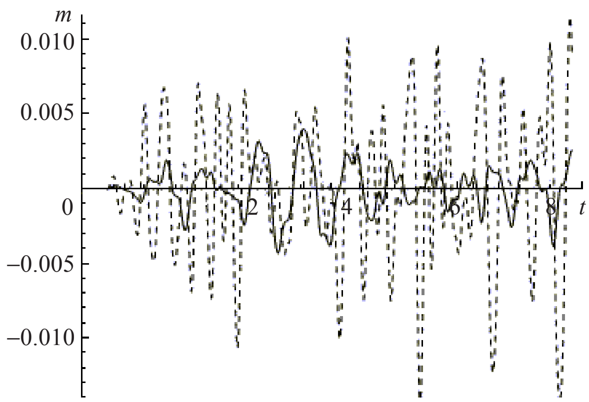


Рис. 2

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 09-01-99006.

Список литературы

1. Hac A., Youn I. // Journal of Vibrations and Acoustics. 1993. Vol. 115. P. 498–508.

2. Полосков И.Е. // Автоматика и телемеханика. 2002. № 9. С. 58–73.

3. Полосков И.Е. // Мат. моделирование. 2005. Т. 17, № 3. С. 3–14.

4. Полосков И.Е. // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: Межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2010. Вып. 42. С. 88–99.

5. Di Paola M., Pirrotta A. // 8th ASCE Specialty Conf. on Prob. Mech. and Struct. Reliability. PMC2000–255.

6. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 336 с.

AN ANALYSIS OF VEHICLE MOVEMENT WITH VARIABLE SPEED ALONG A ROAD WITH A RANDOM PROFILE AND ALLOWING FOR DELAY

I.E. Poloskov

A technique based on a combination of the method of numeric integration for stochastic differential equations without delay and the scheme of phase space expansion was used to analyse non-stationary oscillations of a vehicle. This technique was applied for the estimation of the vector of mean values and the components of the covariance matrix for the phase vector of the system. These functions were obtained as the effect of statistical processing for results of numeric integration of movement equations.

Keywords: vehicle movement, rough road, delay, moment functions, expansion of the phase space.

УДК 531.58

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ РОБОТОВ И МАШИН В СРЕДЕ MATLAB ПО 3D-МОДЕЛИ САПР PRO/ENGINEER ИЛИ SOLIDWORKS

В.М. Понятский

Тульский госуниверситет
Конструкторское бюро приборостроения, Тула

pwmru@rambler.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Предложен модельно-ориентированный подход, основанный на трансляции 3D-модели механической системы САПР Pro/Engineer или SolidWorks в среду Matlab и исследовании полученной динамической модели. Рассматривается применение предложенного подхода для решения различных задач.

Ключевые слова: механическая система, 3D-модель, трансляция, исследование, динамика, динамическая модель.

В настоящее время для моделирования механических систем используются и успешно эксплуатируются системы автоматизированного проектирования (CAD) SolidWorks [1] и Pro/Engineer, а также система математического моделирования (CAE) MatLab [2].

Пакет SolidWorks, равно как и пакет Pro/Engineer, обеспечивает высокую эффективность и качество разработки твердотельных моделей деталей и узлов. SolidWorks позволяет проектировать конструкторские модели (при номинальных параметрах), тогда как Pro/Engineer позволяет создавать не только конструкторскую, но и технологическую модель с учетом допусков.

Пакет MatLab расширяет возможности САПР SolidWorks и Pro/Engineer в части динамического моделирования 3D-моделей.

Трансляция 3D-модели в среду MatLab осуществляется при помощи встроенного в CAD-систему транслятора в два этапа: экспорт 3D-модели из Pro/Engineer или SolidWorks в xml-файл данных, импорт xml-файла данных в среду MatLab (рис. 1).

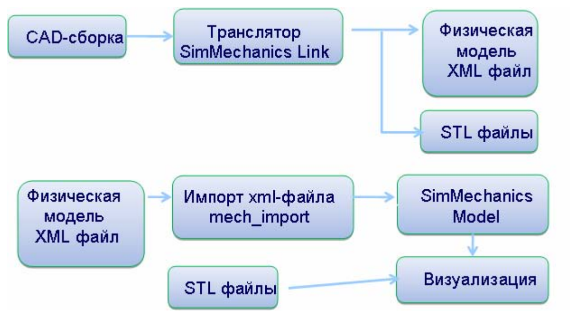


Рис. 1

В процессе трансляции геометрической 3D-модели в динамическую модель осуществляется преобразование сопряжений между геометрическими деталями в степени свободы между телами. Полученную динамическую модель в среде Matlab дорабатывают в соответствии с поставленной задачей исследования в части реализации управляющих воздействий, обеспечения взаимодействий между деталями, регистрации результатов моделирования [3]. Моделирование в среде Matlab может проводиться в режимах прямой динамики (forvard dynamics) и обратной динамики (inverse dynamics). В режиме прямой динамики задаются управляющие воздействия (силы, моменты), а измеряются выходные параметры движения: величины линейных и угловых перемещений, скорости, ускорения. В режиме обратной динамики исходными являются перемещения тел, а в результате решения определяются силы (моменты), обеспечивающие заданные перемещения.

Рассмотрена задача анализа динамики вылета гильзы. Исходная 3D-модель исследуемого механизма приведена на рис. 2.

После трансляции 3D-модели в среду Matlab в полученной динамической модели проведены следующие доработки: смоделировано движение гильзы в стволе до удара (гильза в зацеплении с выбрасывателем, плунжером и остовом затвора с заданной степенью свободы – поступательное движение вдоль ствола) за счет воспроизведения воздействия на гильзу от пороховых газов; смоделирован удар гильзы об упор с воспроизведением всех действующих сил и моментов при их взаимодействии; смоделировано свободное движение гильзы в пространстве после удара за счет отключения силы, реализующей зацепление гильзы с выбрасывателем, плунжером и остовом затвора; визуализация результатов (координат, сил и моментов) осуществляется при помощи добавленных виртуальных осциллографов. Кроме того, разработана подсистема, управляющая заданием сил взаимодействия гильзы с выбрасывателем и упором. С помощью элемента Lookup Table имитируется воздействие силы давления пороховых газов на дно гильзы во время выстрела.

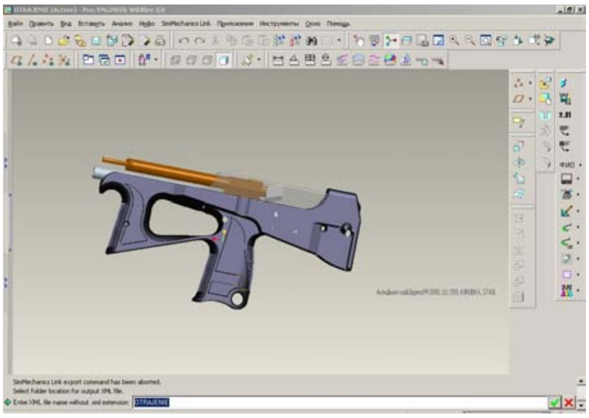


Рис. 2

В момент, когда гильза ударяется об упор, ее продолжает тянуть назад выбрасыватель и создает крутящий момент для гильзы. Гильза меняет траекторию и вылетает в боковое отверстие (рис. 3).

В разработанной динамической модели обеспечено движение гильзы во взаимодействии с элементами механизма до удара и свободное движение ее в пространстве после удара.

Использование предложенного подхода позволяет на этапе проектирования механических систем снизить материальные затраты на их производство.

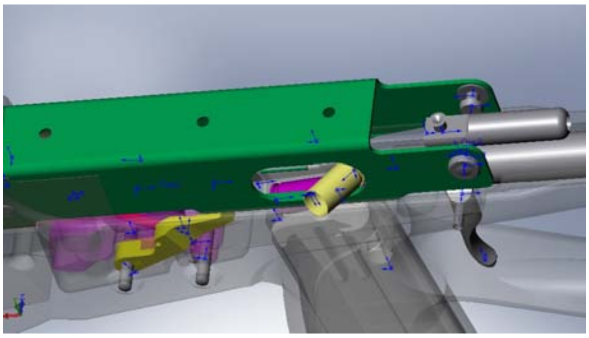


Рис. 3

Список литературы

1. Лазарев Ю. Моделирование процессов и систем в MATLAB: Пакеты Signal Processing Tools, Control Toolbox и Simulink с библиотеками Aerospace, SimPowerSystems, SimMechanics: Уч. пособие. СПб.: Питер, 2005. 512 с.
2. Алямовский А.А. SolidWorks / COSMOSWorks 2006 / 2007. Инженерный анализ методом конечных элементов. М.: ДМК, 2007. 764 с.
3. Понятский В.М., Колесников Г.И., Федорищева В.Г. Методика исследования ударных нагрузок конструкторских проектов САПР SolidWorks в среде имитационного моделирования MATLAB // «Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта» CAD/CAM/PDM-2008: Труды VIII междунар. конф. 21-23 октября 2008 г. М.: ИПУ, 2008. С. 160–163.

RESEARCH OF THE DYNAMICS OF ROBOTS AND CARS IN THE ENVIRONMENT OF MATLAB USING THE 3D-MODEL OF CAD PRO/ENGINEER OR SOLIDWORKS

V.M. Ponyatskiy

A model-oriented approach based on translating a 3D-model of a mechanical system of CAD Pro/Engineer or SolidWorks into Matlab environment and analyzing the obtained dynamic model. Application of the presented approach for the analyzing various problems is considered.

Keywords: mechanical system, 3D-model, translation, research, dynamics, dynamic model.

УДК 629.5-52

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ИЗМЕНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ АВТОРУЛЕВОГО

Е.Н. Поселенов

Волжская государственная академия водного транспорта, Нижний Новгород

epos@aqua.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается проблема использования классического авторулевого с ПД-алгоритмом управления на примере управления движением речного водоизмещающего судна.

Ключевые слова: авторулевой, ПД-алгоритм управления, математическая модель, показатели качества.

При управлении движением речного водоизмещающего судна авторулевым (АР) с пропорционально-дифференциальным законом управления (ПД-регулятор) послушливость объекта сигналу управления определяется не только собственными характеристиками объекта, настройкой параметров регулятора (K_1, K_2), но и состоянием внешней среды. Известно, что у речных судов АР с постоянными коэффициентами K_1 и K_2 отключают при усилении ветра, волнения и на малой глубине фарватера. Возникает вопрос, можно ли, не используя математической модели объекта, а только отслеживая качество процесса удержания судна на курсе, автоматически изменить коэффициенты K_1, K_2 и, тем самым, увеличить диапазон изменения состояния внешней среды, при котором АР работоспособен?

Поиск ответа на поставленный вопрос осуществлялся с помощью моделирования процесса удержания судна по заданному курсу. Для исследования использовалась математическая модель судна [1], рулевого привода (инерционное звено первого порядка) и ПД-регулятора.

$$\begin{cases} \dot{\beta} = -q_2\beta - r_2\omega - s_2\alpha - h|\beta|\beta, \\ \dot{\omega} = -q_3\beta - r_3\omega - s_3\alpha, \\ \dot{\varphi} = \omega, \\ \dot{\alpha} = (-\alpha + K_{\text{рм}}U)/T_{\text{рм}}, \\ U = K_1\varphi + K_2\omega, \end{cases} \tag{1}$$

где β – угол дрейфа судна, ω – угловая скорость судна, α – угол перекладки руля, φ – угол отклонения от курса, $K_{\text{рм}}$, $T_{\text{рм}}$ – параметры рулевой машины, U – заданное значение управляющего воздействия на рулевой привод, K_1 и K_2 – параметры регулятора, q_2, r_2, s_2, q_3, r_3, s_3, h – гидродинамические коэффициенты.

Известно, что гидродинамические коэффициенты зависят не только от параметров корпуса судна (длины, ширины, осадки, полноты водоизмещения), характеристик движительно-рулевого комплекса, но и от внешних факторов (глубины фарватера, загрузки судна и т.д.).

В [2] показано влияние мелководья на эти коэффициенты. Поэтому изменение внешней среды (F) моделировалось изменением гидродинамических коэффициентов, значения которых даны в табл. 1.

Таблица 1

Значения гидродинамических коэффициентов

	q_{21}	r_{21}	s_{21}	h_1	q_{31}	r_{31}	s_{31}
F_1	–0.044	0.029	–0.0020	0.056	–0.185	0.140	–0.0018
F_2	–0.044	0.026	–0.0014	0.063	–0.175	0.130	–0.0015
F_3	–0.048	0.010	–0.0008	0.118	–0.155	0.110	–0.0011
F_4	–0.066	–0.021	–0.0007	0.376	–0.127	0.083	–0.0008

Данные таблицы взяты из натурных испытаний, проведенных на речном судне «Волгонефть».

Для оценки качества управления введен комплексный показатель J:

$$J = d_1\omega_{\max} + d_2\frac{1}{T} + d_3\alpha_{\max}, \tag{2}$$

где $\omega_{\max}$ – максимальное значение угловой скорости рыскания в режиме удержания судна на курсе, T – полупериод рыскания на заданном направлении, $\alpha_{\max}$ – максимальное значение перекладки руля, d_1, d_2, d_3 – весовые коэффициенты, значения которых определялись желаемым вкладом каждого частного показателя в обобщенный.

При моделировании режима удержания судна на курсе рассматривались две ситуации:

1) коэффициенты авторулевого (K_1, K_2) оставались постоянными для всех F_i и равными оптимальным значениям, найденным для идеальной среды (F_1) (ситуация 1);

2) для каждой среды вручную выставлялись оптимальные значения K_1 и K_2, обеспечивающие наилучший показатель качества (ситуация 2).

На рис. 1 представлена зависимость показателя J от состояния внешней среды. Кривая, помеченная звездочками, построена при постоянных коэффициентах авторулевого (ситуация 1), кружочками – коэффициенты авторулевого, оптимальные для каждой среды (ситуация 2). Из представленной зависимости видно, что при переходе от глубокой воды (F_1) на мелководье (F_4) все показатели резко ухудшаются, если коэффициенты АР не настраивать, и практически остаются такими же при оптимальной настройке коэффициентов для каждого состояния среды.

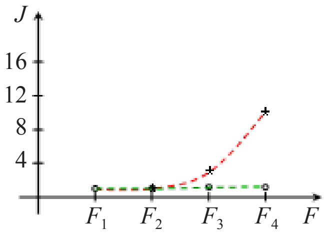


Рис. 1

Для оценки смещения оптимальной настройки коэффициентов закона управления авторулевого были построены линии равных уровней для показателя качества J в плоскости K_1K_2 (рис. 2: *а* – при F_1, *б* – при F_4).

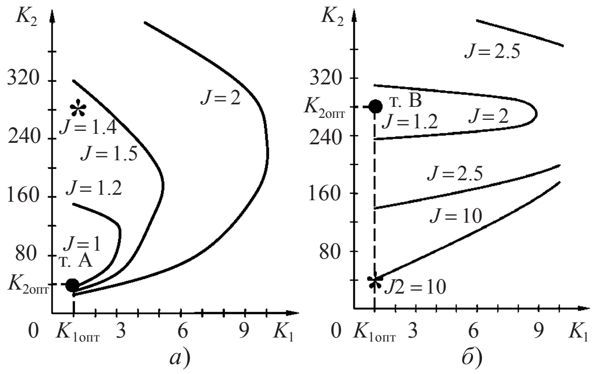


Рис. 2

Анализ оценки качества управления показал, что при изменении глубины фарватера точка А оптимальной настройки параметров K_1 и K_2 практически смещается вверх. Для идеальной среды оптимальная настройка $K_1 = 1$, $K_2 = 40$ дает значение $J(F_1) = 1$; для мелководья оптимальная настройка $K_1 = 1$, $K_2 = 280$ дает значение $J(F_4) = 1.2$. Таким образом, основная настройка должна проводиться по коэффициенту K_2 и дополнительная настройка – по незначительному изменению коэффициента K_1.

Список литературы

1. Войткунский Я.И., Першиц Р.Я., Титов И.А. Справочник по теории корабля. Судовые движители и управляемость. Л.: Судостроение, 1973. 512 с.

2. Поселенов Е.Н., Чиркова М.М. Определение диапазона изменения гидродинамических коэффициентов модели судна по результатам натурных испытаний, проведенных при различных внешних условиях // Управление движением кораблями и специальными аппаратами: Сб. тр. XXXVI Всерос. конф. М., Институт проблем управления им. В.А. Тропезникова. 2009. С. 201–205.

THE SUBSTANTIATION OF THE METHOD OF THE AUTOPILOT PARAMETER CHANGE

E.N. Poselenov

The steering of river vessels using autopilot with PD-control algorithm is considered.

Keywords: autopilot, PD-control algorithm, mathematical model, indicators of quality.

УДК 539.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ОПЕРЕННОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

О.Г. Привалова, Ю.М. Окунев, В.А. Самсонов

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

samson@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Исследуется устойчивость ориентации оси симметрии авторотирующего тела в сопротивляющейся среде на установившемся режиме. Малые колебания оси динамической симметрии относительно положения равновесия в ряде задач описываются дифференциальным уравнением второго порядка с комплексными переменными и комплексными коэффициентами. Построена область устойчивости, которая представляет собой некоторый универсальный геометрический образ, не зависящий от массовых и геометрических характеристик тела, и имеет одинаковый вид для рассматриваемого класса задач.

Ключевые слова: авторотация, устойчивость, сопротивляющаяся среда, оперенное тело.

Рассмотрим три задачи о движении осесимметричного оперенного тела в сопротивляющейся среде. К телу приложены силы со стороны воздуха. Для описания этих сил используем квазистатическую модель [1, 2]. Будем считать, что это воздействие сосредоточено на четырех одинаковых лопастях, симметричное расположение которых на теле обеспечивает его авторотацию, вращение с угловой скоростью Ω вокруг оси Oz динамической симметрии (рис. 1).

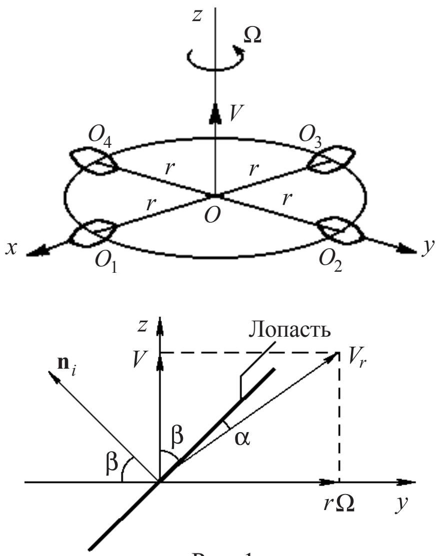


Рис. 1

В первой задаче рассмотрим движение тела с тягой, действующей вдоль оси динамической симметрии. Установившемуся режиму соответствует движение с постоянной скоростью центра масс V_0 и постоянной угловой скоростью Ω_0 свободной авторотации. Во второй задаче рассмотрим режим авторотации тела в аэродинамической трубе. Ему соответствует постоянная угловая скорость Ω_0 и постоянная скорость потока V_0. Следующая задача – о торможении тела, когда на него действуют только аэродинамические силы [3]. В этой задаче существуют два режима установившегося торможения, для которых отношение $r\Omega/V = \text{const}_1$ и $r\Omega/V = \text{const}_2$. Первому режиму соответствует движение с малым углом атаки на лопасти, а второму – с большим ($\sim\pi/2$). Угол α атаки вводим как угол между вектором скорости точки O_i и плоскостью, жестко связанной с лопастью; β – установочный угол лопасти, угол между нормалью $\mathbf{n}_i$ к плоскости лопасти и плоскостью, проходящей через центры давления лопастей (см. рис. 1).

Малые колебания оси динамической симметрии относительно ее положения на установившемся режиме в каждой из рассматриваемых задач описываются дифференциальным уравнением второго порядка, которое имеет структуру

$$\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}(D + iG) + \lambda(P + iN) = 0, \qquad (1)$$

где $\lambda = \lambda_x + i\lambda_y$ – комплексная величина, определяющая отклонение оси симметрии от ее положения на установившемся режиме.

Уравнение в такой форме можно интерпретировать как уравнение материальной точки единичной массы, которая находится под действием сил, линейно зависящих от координат и скоростей. Силы имеют самую общую для симметричного тела структуру, представляя собой суперпозицию диссипативных ($D\dot{\lambda}$), гироскопических ($G\dot{\lambda}$), позиционных потенциальных ($P\lambda$) и позиционных непотенциальных ($N\lambda$) сил.

Условия асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения (1) налагают следующие ограничения на коэффициенты этого уравнения:

$$D > 0, \quad D^2 P + DGN - N^2 > 0.$$

При тех физических и геометрических параметрах задачи, для которых выполняется первое условие устойчивости (положительность коэффициента диссипативных сил), можно сформировать три действительные, не имеющие особенностей функции $X = N/D$, $Y = G$, $Z = P$.

Таким образом, можно говорить о построении области устойчивости в пространстве отношения коэффициентов позиционных непотенциальных сил к коэффициентам диссипативных сил X, коэффициентов гироскопических сил Y и коэффициентов позиционных потенциальных сил Z. В этом пространстве область устойчивости представляет собой некоторый универсальный геометрический образ (подобный описанному в [4]), не зависящий от геометрических и массовых характеристик тела. Границей области устойчивости является поверхность E, уравнение которой $E \Rightarrow Z - X^2 + YX = 0$ (рис. 2). В соответствии со вторым условием устойчивости, область устойчивости лежит выше поверхности E (по переменной Z).

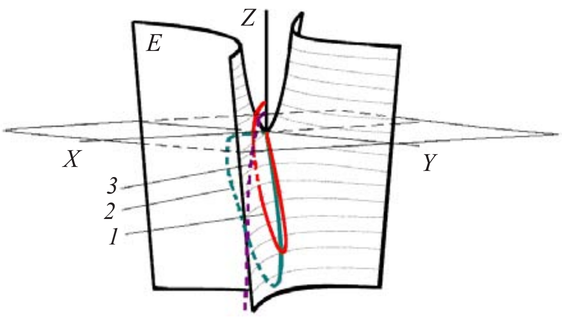


Рис. 2

Представление области устойчивости в таком пространстве позволяет сделать выводы общего характера. В случае когда позиционные потенциальные силы отсутствуют, устойчивость рассматривается в плоскости $Z = 0$. Эта плоскость пересекает поверхность E по двум прямым $X = 0$ и $X = Y$. На плоскости XY устойчивость наблюдается в области $|Y| > |X|$. Если гироскопические силы равны нулю, то граница области устойчивости представляет собой параболу на плоскости XZ. Область устойчивости располагается над параболой. Очевидно, что с ростом значений коэффициента позиционной потенциальной силы область устойчивости расширяется. В случае когда равны нулю позиционные непотенциальные силы ($X = 0$), очевидно, что при положительном коэффициенте позиционных потенциальных сил и любом значении коэффициента гироскопических сил имеет место устойчивость, а при $Z < 0$ – неустойчивость.

Полученная область устойчивости является общей для трех рассматриваемых задач. Проследим за перемещением точки в пространстве XYZ, отвечающим изменению угла разворота лопастей β от 0 до $\pi/2$, при заданных конкретных характеристиках тела. Для первой задачи изменению угла β соответствует кривая *1* на рис. 2. Как видно из рисунка, при значениях $\beta = 0$, $\alpha = 0$ точка находится на положительной части оси Z и тем самым внутри области устойчивости. Увеличение угла β приводит к тому, что при некотором его значении «изображающая» точка протыкает поверхность E, переходя из области устойчивости в область неустойчивости (штриховая линия), а затем снова возвращается обратно в область устойчивости при другом значении этого угла. В задаче об авторотации тела в потоке аэродинамической трубы (кривая *2*) начальная точка, отвечающая значениям $\beta = 0$, $\alpha = 0$ находится в начале координат, т.е. на границе области устойчивости. При увеличении угла β она сразу попадает в область неустойчивости, откуда при некотором значении угла β переходит в область устойчивости. В задаче о торможении (кривая *3*, отвечающая режиму торможения с «малым» углом атаки) начальная точка ($\beta = 0$, $\alpha = 0$), как и в задаче с тягой, находится на положительной части прямой Z, но ближе к границе. Поэтому с увеличением угла β «изображающая» точка скорее покидает область устойчивости и больше в нее не возвращается. В этой задаче, в отличие от двух предыдущих, монотонное увеличение угла β разворота лопасти не приводит к переходу на второй режим установившегося торможения, который отвечает относительно большим значениям угла атаки.

Отметим, что первые две задачи относятся к традиционным задачам прикладной аэродинамики о сопоставлении поведения летательного аппарата в полете и его макета в аэродинамической трубе. Кроме описанного выше, рассмотрено также влияние смещения центра масс от точки O (см. рис. 1).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 09-01-00340, 11-08-00444).

Список литературы

1. Локшин Б.Я., Привалов В.А., Самсонов В.А.

Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. М.: МГУ, 1986. 86 с.

2. Привалов В.А., Самсонов В.А. Об устойчивости движения тела, авторотирующего в потоке среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. №2. С. 32–38.

3. Окунев Ю.М., Привалова О.Г. Торможение движения динамически симметричного тела в невозмущенной атмосфере // Матер. докл. «VI Окуневских чтений». 2008. Т. 3. С. 9–14.

4. Привалов В.А., Самсонов В.А. Сопоставление свойств устойчивости двух режимов авторотации // Изв. РАН. ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 37–48.

ON STABILITY OF MOTION OF AN AXISYMMETRIC FINNED BODY IN RESISTING A MEDIUM

O.G. Privalova, Yu.M. Okunev, V.A. Samsonov

Stability of orientation of the symmetry axis of an auto-rotating body in resisting a medium in the steady regime is studied. A series of problems are discussed, where small oscillations of the dynamic symmetry axis about the equilibrium are defined by a second order differential equation with complex variables and complex coefficients. A stability domain is constructed representing a certain universal geometric image independent of mass and geometric characteristics of the body and having the same form for the class of problems in question.

Keywords: auto-rotation, stability, resisting medium, finned body.

УДК 699.844:628.517

ПРАКТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ЗВУКА И ВИБРАЦИИ ВДОЛЬ ПЕРЕКРЫТИЙ БЕТОННОЙ КОНСТРУКЦИИ

Е.Ю. Прокофьева[1]***, Р.К. Маккензи***[2]***, О.Л. Николс***[2]***, Ш.Р. Смит***[1]

[1]Университет им. Дж. Нэпера, Эдинбург (Великобритания)
[2]Icopal Ltd, Манчестер (Великобритания)

e.prokofieva@btopenworld.com

Поступила в редакцию 16.05.2011

Типичные конструкции, используемые в строительстве перекрытий между квартирами-«ячейками», демонстрируют сколь угодно высокий коэффициент звукопоглощения прямых воздушных и ударных нагрузок, однако в полевых условиях количество звука и вибраций, проходящих из одной ячейки в другую, будет существенно зависеть от вторичных звуковых волн, передающихся непрямым путем. Чтобы сократить количество непрямых путей передачи звука и вибраций между ячейками, авторами предложено использовать тонкие изоляторы, располагающиеся по периметру стен конструкции. Эти изоляторы, сделанные на основе битума, улучшают не только звукоизоляционные качества полой блочной конструкции, но и влияют на теплопередачу между соседними ячейками.

Ключевые слова: строительная акустика, бетонная конструкция, коэффициент звукопоглощения, вибрация, битум.

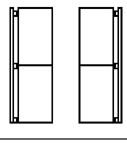
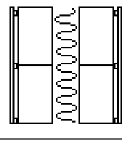
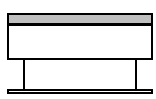
Строительную бетонно-блочную конструкцию можно рассматривать упрощенно как замкнутую систему, состоящую из трехмерных «ячеек», которые ограничены несущими стенами здания и межквартирными перекрытиями. Такие ячейки располагаются одна над другой и имеют, как минимум, одну общую поверхность с другими ячейками.

Нагрузки на произвольно выбранную ячейку такой конструкции, могут быть разделены на постоянные (давление окружающих ячеек, распределенное по площади соприкосновения, собственный вес конструкции) и переменные (вибрации стенок конструкции от ударного или воздушного шума, возникшего внутри ячейки).

Лабораторные тесты показывают, что некоторые многослойные конструкции, используемые в строительстве перекрытий между квартирами, демонстрируют сколь угодно высокий коэффициент звукопоглощения прямых воздушных R_w и ударных L_{nw} нагрузок. Однако во время возведения этих конструкций количество звука, проходящего из одной ячейки в другую, выраженное коэффициентом L_{nTw}, будет существенно зависеть от качества дизайна и строительства этих конструкций, а особенно от узлов соединения конструкций друг с другом. Таблица 1 демонстрирует разницу между измерениями в лабораторных и полевых условиях самых популярных строительных конструкций.

Таблица 1

Типичные строительные конструкции

Коэффициент звукопоглощения, дБ	Тип конструкции		
			
Результаты теста в лаборатории:			
R_w (для всех конструкций)	56	56	61
D_{nTw} (для всех конструкций)	57	58	63
L_{nw} (только для пола)	–	–	56
Результаты теста в лаборатории:			
D_{nTw} (для всех конструкций)	59	54	51
L'_{nTw} (только для пола)	–	–	51

Как видно из таблицы, иногда разница между лабораторными и полевыми замерами может составить 10–12 дБ.

Распространение вибраций, возбужденных на одной поверхности ячейки, передаются в соседнюю с ней ячейку по 13 различным путям: 1 прямому и по 3 на каждое соединение стенки и пола (рис. 1). Вибрации, передающиеся через соединения со стенками соседних ячеек, считаются вторичными по отношению к «прямому» пути передачи вибрации непосредственно через возбуждаемую поверхность. В случае если при строительстве возникают проблемы, а соединения между ячейками выполнены с техническими погрешностями, непрямые пути прохождения вибраций из ячейки в ячейку могут доминировать над прямыми, что отражается на коэффициенте звукопоглощения всей конструкции.

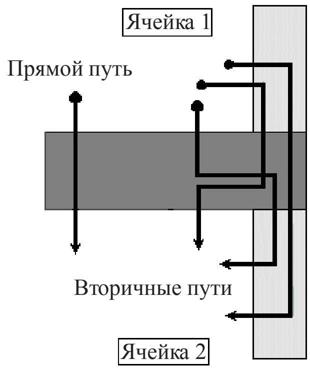


Рис. 1. Некоторые пути передачи вибрации между ячейками

В настоящее время основным способом уменьшения влияния непрямых вибраций является введение добавочной изоляции внутри ячейки. Это могут быть независимые внутренние стены, подвесные потолки, наливные полы с изоляционной подложкой и т.д. Введение изоляции на этапе строительства увеличивает стоимость проекта, время строительства, а в случае неправильной установки эффект может оказаться минимальным и даже отрицательным. На рис. 2 показаны результаты замеров двух идентичных конструкций пола (бетонная плита, наливной пол, подвесной потолок) с правильно и неправильно установленной изоляционной подложкой. В случае правильно установленной подложки коэффициент поглощения ударного звука составляет 52 дБ, а в случае неправильной установки достигает 66 дБ.

В университете им. Дж. Нэпера с 2006 по 2008 год был проведен ряд исследований [1], по результатам которых была предложена новая методика, позволяющая уменьшить влияние непрямых путей прохождения звука и вибраций на общую звукоизоляцию ячеистой конструкции. По периметру каждой ячейки (вдоль соединений стен и пола) размещаются трехмиллиметровые так называемые «периметрические изоляторы», закрепленные скобками для сохранения структурной устойчивости конструкции. Размещенные таким образом изоляторы перерезают пути передачи звука и вибраций через узловые соединения, уменьшая количество непрямых путей с двенадцати до четырех. Было изучено два типа периметрических изоляторов: для размещения в основании стены и для размещения наверху стены, непосредственно под плитой, разделяющей ячейки. Эксперименты также показали, что в случае, если используются оба типа изоляторов на одном и том же участке стены, система становится структурно менее устойчивой и в ней начинают возникать резонансы на средних частотах. Для изоляторов был выбран материал на битумной основе, производимый компанией «Икопал» (Icopal). Многократные эксперименты в лабораторных и полевых условиях продемонстрировали общее улучшение звукоизоляции между ячейками в случаях передачи звука ударным и воздушным путем, особенно на средних частотах (0,5–5 кГц).

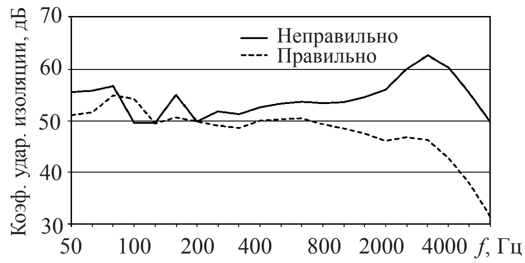


Рис. 2. Коэффициент ударной изоляции пола с установленной подложкой

Университет прикладных наук г. Штутгарта (Германия) опубликовал в 2009 году независимое исследование [2], продемонстрировав в ряде экспериментальных замеров, что наилучший эффект виброизоляции стены от пола дают материалы, сделанные на основе битума. Обзор результатов экспериментов с подложками из разных материалов представлен в табл. 2.

Таблица 2

Подложка из разных материалов (лабораторные замеры)

	Отсутствие материала	Пробковое дерево	Полиэтилен	Битум
Коэффициент звукопоглощения R_w, дБ	38	38	40	42

Кроме звуко- и виброизоляции, одной из главных задач современного строительства является улучшение терморегуляции между ячейками строительных конструкций. В случае когда стены ячеек построены полыми внутри (два слоя бетонных блоков с воздушной прослойкой между ними), тепло, сгенерированное в одной из ячеек, проходя через стену, остается внутри полости (так называемый каминный эффект) и поднимается на уровень крыши, где излучается в атмосферу. В обычной ситуации потери теплоэнергии являются невозвратными. Если при строительстве такой полой стены ее закрыть сверху периметрическим изолятором, теплоэнергия остается внутри полости, снижая расход тепла на этом уровне. Таким образом, новые изоляторы не только улучшают изоляцию между ячейками, но и делают вклад в циркуляцию теплоэнергии внутри ячеистой конструкции.

Работа выполнена при поддержке Шотландского инвестиционного агентства Scottish Enterprise.

Список литературы

1. Mackenzie R.K., Smith R.S., Nichols L., Prokofieva E. Improving sound insulation between dwellings using perimeter isolation technology to reduce flanking transmission // Euronoise. Edinburgh. 2009. SIB12.

2. Ruff A., Fischer H.-M. Direct sound insulation of lightweight solid walls // Euronoise. Edinburgh. 2009. SIB6.

PRACTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF SOUND AND VIBRATION TRANSMISSION ALONG THE CONCRETE PARTITIONS

E.Yu. Prokofieva, R.K. MacKenzie, O.L. Nichols, Sh.R. Smith

Typical constructions used for building partitions between flats – «cells» demonstrate as high as feasible absorption coefficient for both airborne and impact tests in the laboratory conditions. However, in field testing, the amount of noise and vibrations passing through one cell to another within the building structure will significantly depend on the intensity of a non-direct sound and vibration propagation coming through twelve flanking paths. To reduce the number of flanking paths between the cells it was suggested to use thin perimeter isolators placed along the walls of each separating partition. These isolators, consisted of bitumen, help to improve not only the sound insulation performance of cavity concrete constructions, but also affect on the thermal isolation between adjacent cells.

Keywords: building acoustics, concrete construction, absorption coefficient, vibration, bitumen.

УДК 539.3

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ С ОКРУЖАЮЩИМ ГРУНТОМ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Т.Р. Рашидов[1]***, Ш.М.-З. Сибукаев***[2]

[1]Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент
[2]Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент

tur.rashidov@list.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассмотрена задача о распространении продольного импульса в прямолинейном трубопроводе, расположенном в мелкодисперсном водонасыщенном грунте. Предложена четырехзвенная модель взаимодействия. Модель перемещения трубопровода и грунта, скорости перемещения и их градиентов содержит четыре параметра взаимодействия, которые связаны двумя условиями: необходимым условием существования решения задачи в виде затухающей волны и корреляционным соотношением. Предложены схема эксперимента для определения липкости при постоянной скорости протягивания цилиндрического стержня, расположенного в водонасыщенном грунте, и расчетные формулы для вычисления параметров взаимодействия в двухзвенной кинематической модели.

Ключевые слова: прямолинейный трубопровод, мелкодисперсный водонасыщенный грунт, четырехзвенная модель взаимодействия, липкость.

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу о распространении продольного импульса в прямолинейном трубопроводе, расположенном в мелкодисперсном водонасыщенном грунте. Обозначим u_T, u_C – перемещения частиц трубы и грунта; ρ_T, F_T, E_T – плотность, площадь сечения и модуль Юнга трубы. Тогда уравнение продольных колебаний трубопровода при малых упругих смещениях запишется в виде:

$$\rho_T F_T \frac{\partial^2 u_T}{\partial t^2} - E_T F_T \frac{\partial^2 u_T}{\partial x^2} + \bar{q}_x = 0, \qquad (1)$$

$\bar{q}_x$ – плотность поверхностных сил.

Постулируя кинематический характер сейсмического воздействия, считаем, что $\bar{q}_x$ должна зависеть от кинематических параметров, взаимного движения трубопровода и окружающей среды: $\bar{q}_x = f(u,p,s,r)$, где $u = u_T - u_C$; $p = \partial u/\partial t$; $s = \partial u/\partial x$; $s = \partial^2 u/\partial x\partial t$. Помимо этого, функция f зависит от постоянных параметров, характеризующих материал и шероховатость трубы, минералогический состав, структуру и консистенцию грунта, глубину заложения трубопровода и т.п. Разлагая $f(u,p,r,s)$ в ряд в окрестности $u = p = r = s = 0$ и полагая $f(0,0,0,0) = 0$, получим вместо (1):

$$\rho_T F_T \frac{\partial^2 (u+u_C)}{\partial t^2} - E_T F_T \frac{\partial^2 (u+u_C)}{\partial x^2} + \bar{k}u + \bar{\lambda}\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{\beta}\frac{\partial u}{\partial x} + \bar{\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0, \qquad (2)$$

где

$$\bar{k} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0; \quad \bar{\lambda} = \left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)_0; \quad \bar{\beta} = \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_0; \quad \bar{\mu} = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_0.$$

При $u_C = 0$ это уравнение внешне совпадает с «телеграфным» уравнением и должно иметь решение в виде затухающей волны

$$u(x,t) = e^{-xt}\Phi(x - at). \qquad (3)$$

Поделив обе части (2) на $\rho_T F_T$ и обозначив $\bar{k}/(\rho_T F_T) = k$ и т.д. $a_T^2 = E_T/\rho_T$, запишем необходимые условия существования (3):

$$a = \frac{1}{2}\left(\mu + \sqrt{\mu + 4a_T^2}\right); \quad \Re = \frac{\lambda a - \beta}{\sqrt{\mu^2 + 4a_T^2}}; \qquad (4)$$

$$k = \Re(\lambda - \Re); \quad k(\mu^2 + 4a_T^2) + \beta^2 = \lambda(a_T^2\lambda + \mu\beta).$$

Таким образом, шесть параметров a, $\Re$, k, λ, β, μ связаны четырьмя условиями (4). Вдобавок к ним предполагаем существование корреляционной зависимости между параметрами взаимодействия: $\alpha \cdot \beta = \alpha k \cdot \mu$. Если коэффициент корреляции α близок к единице, то, полагая $\beta/k = \mu/\lambda = v$ ($k \neq 0$, $\lambda \neq 0$), можно сократить число неизвестных параметров еще на единицу и представить усилие $q_x = \bar{q}_x / \rho_T F_T$ в виде:

$$q_x = k\left(u + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \lambda\frac{\partial}{\partial t}\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = k\gamma + \lambda\frac{\partial \gamma}{\partial t}, \qquad (5)$$

где

$$\gamma = u + \frac{\beta}{k}\frac{\partial u}{\partial x} = u + \frac{\mu}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Равенства (5) можно рассматривать как систему уравнений относительно неизвестных функций $u(x, t)$ и $\gamma(x, t)$, считая величину q_x заданной. Тогда после двукратного интегрирования получим:

$$u(x,t) = e^{-x/\nu}\left\{u(0,t) + \frac{1}{\nu}\int_0^x \left[e^{-kt/\lambda}\left(u(x,0) + \nu\frac{\partial u(x,0)}{\partial x} + \frac{1}{\lambda}\int_0^t q_x e^{kt/\lambda}dt\right)\right]dx\right\}. \qquad (6)$$

Полученная формула пригодна для вычислительного эксперимента, в котором величина $q_x(x, t)$ задается, а величина $u(x, t)$ измеряется.

Такие мелкодисперсные грунты как глины, суглинки, лессы и торфяники в достаточно широком диапазоне влажности (от 15 до 45%) обладают значительной липкостью. Понятие липкости в механике грунтов отсутствует. Существующее в инженерной геологии понятие липкости соответствует понятию предела прочности в механике, если рассматривать процесс отлипания как разрушение составного тела «грунт +твердое тело». Нами предложено называть липкостью усилие, препятствующее отлипанию и зависящее от взаимного перемещения грунта и твердого тела. Для одномерных процессов была предложена реологическая модель процесса отлипания, состоящая из двух упругих элементов с жесткостями C_0 и C_1 и вязкого элемента с эффективной вязкостью M, внешне похожая на модель реологической среды Хоэнемзер – Прагера (Узбекский журнал «Проблемы механики», № 2–3, 2009 г.). Для трубопровода, совершающего продольные движения относительно окружающего грунта, такая зависимость имеет вид

$$P(x,t) = C_0\left[u(x,t) - \frac{C_0}{M}\int_0^t u(x,\tau)e^{-a(t-\tau)}d\tau\right], \quad a = \frac{C_0 + C_1}{M}, \qquad (7)$$

где $P(x,t)$ – усилие, приходящееся на единицу площади контакта.

Формула (7) может быть обращена в следующем виде

$$u(x,t) = \frac{1}{C_0}\left(P(x,t) + \frac{C_0}{M}\int_0^t P(x,\tau)e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau\right), \quad \alpha = C_1/M. \qquad (8)$$

Если предположить, что в упомянутых выше грунтах взаимодействие трубопровода с грунтом определяется исключительно силами прилипания, то получится реологическая модель взаимодействия, альтернативная рассмотренной выше кинематической модели.

В соответствии с этим в уравнении (1) усилие $\overline{q}_x$ следует заменить на $\pi DP(x, t)$ (D – диаметр трубы). Величины C_0, C_1, M не следует отождествлять с какими-либо модулями, характеризующими свойства грунта; они являются параметрами, определяющими липкость грунта, и подлежат нахождению из эксперимента. Для этой цели оказывается удобной формула (7). Если положить в ней $u(x, t) = V_0 t$ (протягивание стержня большой жесткости с постоянной скоростью в водонасыщенном грунте), то вместо (7) получим

$$P(t) = C_0\left(V_0 t - \frac{C_0 V_0}{Ma^2}(at + e^{-at} - 1)\right). \qquad (9)$$

С другой стороны, это будет соответствовать варианту $\overline{\beta} = 0, \overline{\mu} = 0$ в кинематической модели. В этом случае все предельно упрощается, и в соотношениях (4) $a = a_T$; $\Re = \lambda/2$; $4k = \lambda^2$ необходимые условия существования решения уравнения (2) в виде затухающей волны (3) удовлетворяются тождественно, а формула (6) приобретает вид

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t/4}\int_0^t q_x(x,\tau)e^{\lambda t/4}d\tau. \qquad (10)$$

Главными проблемами в сейсмодинамике подземных сооружений являются построение моделей взаимодействия и экспериментальное определение параметров, характеризующих эти взаимодействия. Расчетные формулы (7)–(10) окажутся полезными в решении этих проблем.

COMPARATIVE ANALYSIS OF INTERACTION MODELS OF UNDERGROUND STRUCTURES WITH THE SURROUNDING SOIL UNDER SEISMIC EFFECTS

T.R. Rashidov, Sh.M-Z. Sibukaev

The problem of propagation of longitudinal momentum in a straight pipeline, located in the finely divided water-saturated soil, is analyzed. A model of four-part interaction is proposed, which depends on the relative movement of the pipeline and the ground, velocity, and their gradients; and containing four of the interaction parameters, which are connected by two conditions: a necessary condition for solving the problem in the form of a damped wave, and the correlation ratio. Also an experimental scheme to determine the stickiness at a constant speed of pulling of a cylindrical rod, which is located in water-saturated soil, and formulas for calculating the interaction parameters in the two-part cinematic model is given.

Keywords: straight pipeline, finely divided water-saturated soil, a model of four-interaction, stickiness.

УДК 621.833

ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ИЗНАШИВАНИЯ ЗУБЧАТОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

С.С. Резников

Санкт-Петербургский госуниверситет информационных технологий, механики и оптики

stanich@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматривается возможность построения математической модели изнашивания зубьев в передаче. Указаны допущения, при которых будет проводиться создание модели.

Ключевые слова: зубчатое колесо, износ, зубчатое зацепление, математическая модель, упруго-статическая модель.

Введение

Статистический анализ показывает, что основной причиной выхода из строя машин и механизмов является не их поломка, а износ подвижных сопряжений. Выход из строя вследствие изнашивания наиболее характерен для механизмов и устройств, работающих в различных отраслях промышленности. Они работают в средах, загрязненных абразивными частицами, в условиях либо ограниченной смазки или вообще без смазки (смазывание осуществляется однократно, в момент сборки). Несмотря на то, что износостойкость является основным показателем работоспособности таких механизмов, их проектирование базируется, в первую очередь, на прочностных расчетах. Расчеты на износ производятся крайне редко и имеют недостаточное методическое обеспечение.

Отсутствие достаточно обоснованных методик расчета передач на износ связано со сложностью математического моделирования изнашивания зубчатого зацепления. Его описание требует анализа различных процессов, зависящих от большого числа параметров, характеризующих свойства материалов колес, условия работы передачи, макро- и микрогеометрию взаимодействующих поверхностей, кинематику зацепления.

Предположения и допущения

Изнашивание, по своей природе, – процесс непрерывного изменения формы взаимодействующих поверхностей. Поэтому математическая модель изнашивающегося зубчатого зацепления должна учитывать непрерывное изменение формы зубьев и вызываемое им изменение силовых и геометро-кинематических показателей передачи.

Рассматривается процесс изнашивания цилиндрической прямозубой передачи. Для ее описания используются многие положения упруго-статической модели, успешно применяемой при синтезе приближенных зацеплений [1, 2]. В соответствии с этой моделью предполагается:

– все зубья геометрически одинаковы и равномерно распределены по ободу колеса;

– контакт зубьев осуществляется по активным поверхностям;

– под нагрузкой зубья колес деформируются и их упругие свойства одинаковы;

– пластические деформации отсутствуют.

Дополнительно приняты следующие допущения:

– зубья каждого колеса изнашиваются одинаково;

– условия работы передачи считаются неизменными;

– к выходному валу приложен постоянный момент сопротивления;

– шестерня вращается с постоянной угловой скоростью;

– износ считается достаточно малым, чтобы можно было не учитывать изменение упругих свойств зубьев;

– трение в зацеплении не учитывается.

Построение модели

Эволюционный подход к моделированию основан на том, что процесс изнашивания разбивается на ряд шагов. Приращение наработки

Δn на каждом шаге выбирается настолько малым, что условия изнашивания в его пределах можно считать постоянными. Тогда приращение износа ΔH_i в любой i-й точке профиля с достаточной степенью точности выражается уравнением:

$$\Delta H_i = J_i \Delta n. \tag{1}$$

Износ эквивалентен перемещению точки по нормали к поверхности трения (рис. 1). Поэтому если нам известны координаты достаточно большого (m) числа точек, задающих профиль зуба в начале шага изнашивания $\{x_i, y_i\}$ то их координаты $\{x_i^h,\ y_i^h\}$ в конце этого шага равны:

$$x_i^h = x_i + J_i e_{ix} \Delta n \ \ y_i^h = y_i + J_i e_{iy} \Delta n, \tag{2}$$

где e_{ix}, e_{iy} – проекции орта нормали на оси координат.

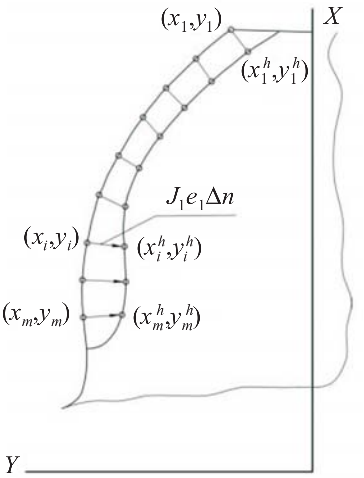


Рис. 1

Координаты точек $\{x_i^h,\ y_i^h\}$ определяют новую форму профилей зубьев. Для продолжения моделирования процесса в каждой их этих точек необходимо найти новые значения ортов нормалей и аргументов функции интенсивности изнашивания, то есть, нагрузку, радиусы кривизны и скорости общей точки по профилям зубьев шестерни и колеса. Это производится в ходе решения обратной задачи теории зацепления. Поэтому алгоритм решения обратной задачи при точечном задании профилей зубьев является основой любой эволюционной модели процесса изнашивания зацепления.

В классической постановке обратной задачи профили зубьев считаются заданными аналитически, в виде функций или систем уравнений, описывающих инструмент и станочное зацепление. Следовательно, первым этапом ее решения в нашем случае должен быть переход от координатного к аналитическому описанию профилей изнашивающихся зубьев.

При моделировании удобно задаваться шагом износа ΔH, равным приращению износа в точке с максимальной интенсивностью изнашивания J_m.

Шаг наработки и шаг износа связаны уравнением

$$\Delta n = \Delta H \,/\, J_m. \tag{3}$$

С точки зрения математики изложенная модель представляет собой численное решение в каждой i-й точке профиля с радиусом-вектором $\mathbf{r}_i$ задачи Коши для дифференциального уравнения:

$$\mathbf{r}_i = J_i \mathbf{e}_i. \tag{4}$$

Способ решения соответствует методу Эйлера, который обеспечивает первый относительно Δn порядок точности. Если на каждом шаге производить уточнение координат точек изношенного профиля по формулам:

$$x_i^h = x_i + \frac{1}{2}(J_i e_{ix} + J_i^* e_{ix}^*)\Delta n,$$

$$y_i^h = y_i + \frac{1}{2}(J_i e_{iy} + J_i^* e_{iy}^*)\Delta n,$$

где $J_i^*, \mathbf{e}_i^*$ – интенсивность изнашивания и орт нормали для профиля, координаты точек которого предварительно рассчитываются по уравнениям (2), то способ решения будет соответствовать модифицированному методу Эйлера, который обеспечивает второй порядок точности.

Список литературы

1. Гуляев К.И., Рязанцева И.Л. Профильная модификация зубьев колес эвольвентной цилиндрической передачи с учетом деформации зацепления // Изв. вузов. Приборостроение. 1981. №5.

2. Гуляев К.И., Черный Б.А. Упругая модель в задаче синтеза приближенного зацепления. В кн.: Теория и расчет передаточных механизмов. Хабаровск: Изд-во ХПИ, 1973. С. 20–25.

THE FUNDAMENTALS FOR CONSTRUCTING AN EVOLUTIONARY MODEL OF WEAR PROCESS OF TOOTHING

S.S. Reznikov

A possibility of constructing a mathematical model of wear of teeth in the transmission is considered. The assumptions for creating such a model are specified.

Keywords: gear, wear, toothing, mathematical model, elasto-static model.

УДК 531.01: 621.30

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА В ФОРМЕ НЬЮТОНА В ЭЛЕКТРОМЕХАНИКЕ

Ф.Ф. Родюков

Санкт-Петербургский госуниверситет

frodyukov@gmail.com

Поступила в редакцию 16.05.2011

Предлагается формализм уравнений Лагранжа – Ньютона в качестве примеров к математическому моделированию реального однофазного трансформатора, асинхронного и синхронного двигателей. Показывается, что полученные модели по своим свойствам полностью соответствуют физическим свойствам их реальных аналогов.

Ключевые слова: форма Ньютона уравнений Лагранжа, новый закон электромагнитной индукции.

Введение

Чтобы избежать механических парадоксов при построении математических моделей электрических машин переменного тока существующими методами теории таких машин [1], предлагается вместо уравнений Лагранжа 2-го рода в известной форме использовать эти уравнения в форме Ньютона. При этом вместо обобщенных скоростей в них берутся импульсы (в электромеханике им соответствуют потокосцепления), как это имеет место в формулировке Ньютона второго закона механики. Соответственно электрокинетическая энергия и диссипативная функция в электромеханике берутся в виде сумм квадратов потокосцеплений с соответствующими коэффициентами. Поскольку передача энергии от первичных обмоток ко вторичным при использовании уравнений Лагранжа в обычной форме происходит благодаря увеличению размерности реального физического пространства, а предлагаемые уравнения сохраняют его, то возникает необходимость введения дополнительного закона электромагнитной индукции для вторичной обмотки трансформатора.

Парадоксы существующей теории однофазного трансформатора и их разрешение с помощью уравнений Лагранжа – Ньютона

Рассматриваются парадоксы современной теории трансформатора: а) несовпадение размерности фазового пространства ее математической модели (ее двумерность) и реального трансформатора (одномерность) при наличии сопротивлений обмоток, б) при отсутствии омических сопротивлений обмоток постоянство магнитного потока во вторичной обмотке, что противоречит закону электромагнитной индукции Фарадея. Эти противоречия устраняются при использовании уравнений Лагранжа в форме Ньютона, в которых, как в выражении для электрокинетической энергии, так и диссипативной функции, используется одна и та же обобщенная скорость – потокосцепление. В современной теории трансформатора для электрокинетической энергии используются потокосцепления как обобщенные скорости, а для диссипативной функции в качестве обобщенных скоростей берутся токи. Этим самым при ненулевых сопротивлениях обмоток искусственно увеличивается размерность фазового пространства. Из-за этого магнитные оси обмоток в современной математической модели не совпадают.

Если в современной теории энергия от первичной обмотки ко вторичной передается за счет этого искажения реального физического пространства, то при написании новых уравнений необходимо ввести новый закон – *закон электромагнитной индукции для вращающегося трансформатора*. Он является обобщением некоторых логических рассуждений и физических экспериментов и при достаточно малом сопротивлении первичной обмотки и соблюдении условий квазистационарности переменного тока формулируется следующим образом: *ко вторичной обмотке трансформатора подводится напряжение противоположного знака напряжению в первичной обмотке, умноженное на коэффициент трансформации, на относительную скорость угловых скоростей напряжения первичной обмотки и механической угловой скорости вторичной обмотки и на косинус угла между этими скоростями*.

В частном случае неподвижной вторичной обмотки в результате применения описанных процедур получается математическая модель реального трансформатора, лишенная упомянутых выше парадоксов.

Уравнения Лагранжа – Ньютона при моделировании электрических машин переменного тока

Часто электрические машины переменного тока называют вращающимися трансформаторами. Поэтому описанная в предыдущем параграфе процедура применяется для получения математической модели синхронного двигателя с фантомной обмоткой, берущей на себя функцию магнитопроводов статора и ротора по концентрации магнитного поля в узком воздушном зазоре [1]. Если в этой модели напряжение на обмотке возбуждения положить равным нулю, то получим адекватную математическую модель асинхронного двигателя.

Получающиеся модели названы адекватными, потому что они адекватно отражают физические свойства соответствующих электрических машин. Они имеют по две независимые электрические переменные, что соответствует плоской картине электромагнитных процессов в машинах. Векторы электромагнитных моментов в моделях, так же как и в реальных машинах, направлены по осям вращений роторов (в существующих моделях это не так).

В зависимости от значения сопротивлений роторных обмоток предлагаемые модели описывают синхронные машины как без конструктивных демпферных контуров, так и при наличии последних. Для первых из них при значениях безразмерных сопротивлений обмоток возбуждения порядка единицы численно показано, что их роторы идут «в разнос» при внезапных возрастаниях внешних нагрузочных моментов до значений, меньших максимально допустимых из статических соображений. Этим объясняются физические причины тяжелых катастроф, происходивших с синхронными двигателями без демпферных контуров в двадцатые годы прошлого столетия. Тогда в промышленно развитых странах, включая Россию, зафиксированы случаи разноса на части таких машин с большими человеческими жертвами и материальными потерями.

Численно показано также, что уменьшение на три порядка роторных сопротивлений синхронных машин за счет введения демпферных контуров устранило физические причины подобных катастроф.

Магнитон. Симметризация уравнений Максвелла

При построении обсуждаемых моделей электрических машин используются физические величины, имеющие размерность электрических зарядов – *кулонов*, то есть они являются *магнитными* зарядами. Автор называет их *магнитными смещениями* по аналогии с введенными Максвеллом *электрическими смещениями* в диэлектриках, так как первые имеют место в проводниках. Они проявляют себя в опыте Генриха Герца с разомкнутым проводником в виде обруча с шариками на концах, помещенного в переменное электромагнитное поле, и являются непосредственной причиной возникновения разности потенциала между шариками.

Производные по времени от магнитонов назовем *токами магнитного смещения*.

Впервые магнитоны были использованы автором в кандидатской диссертации [2]. Они были обозначены латинскими буквами x и y, но никак не назывались, а производные от них по времени были названы *наведенными токами*. В последующих работах вплоть до 2009 года ни переменные x и y, ни их производные по времени никак не назывались.

Сформулированные Максвеллом уравнения классической электродинамики связывают электрическое и магнитное поле с движением заряженных частиц. Эти уравнения почти симметричны относительно электричества и магнетизма. Если в дополнение к *электрическому заряду и току* ввести *магнитон и ток магнитного смещения*, то уравнения Максвелла полностью симметризируются. Такая операция уже проделана в предположении, что магнитные заряды когда-нибудь будут обнаружены. Симметричные уравнения Максвелла приведены, например, в Википедии [3].

Список литературы

1. Родюков Ф.Ф. Математическая модель большой электроэнергетической системы. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006. 153 с.
2. Родюков Ф.Ф. Переходные процессы в электрических машинах переменного тока: Дис...канд.физ.-мат. наук. Л.: ЛГУ, 1984. 139 с.
3. Магнитный монопль. http://ru.wikipedia.org/wiki/Монопль.

EQUATIONS OF LAGRANGE IN NEWTONIAN FORM IN ELECTROMECHANICS

F.F. Rodyukov

The suggested formalism of the Lagrange – Newton equations is applied as an example to mathematically modeling the real single-phase transformer, the asynchronous and synchronous engine. It is shown that the obtained models on the properties completely correspond to the physical properties of their real analogues.

Keywords: Newton's form of Lagrange equations, the new law of electromagnetic induction.

УДК 531:518

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА НОВЫХ ПЕРСПЕКТИВНЫХ ТИПОВ ВИБРОТРАНСПОРТИРУЮЩИХ МАШИН С САМОСИНХРОНИЗИРУЮЩИМИСЯ ВИБРОВОЗБУДИТЕЛЯМИ

© 2011 г. ***С.А. Румянцев, Е.Б. Азаров, О.Н. Алексеева, Д.Ю. Тарасов, А.М. Шихов***

Уральский госуниверситет путей сообщения, Екатеринбург

SRumyantsev@math.usurt.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Приводятся результаты исследования нелинейной динамики вибротранспортирующих машин с самосинхронизирующимися вибровозбудителями. Основное внимание уделено новым перспективным типам этих машин – машинам с тремя вибровозбудителями на одном рабочем органе и двухмассным машинам двух типов – с расположением вибровозбудителей на верхней массе и расположением вибровозбудителей на нижней массе машины. Исследование проводилось с помощью математической модели динамики вибротранспортирующей машины. Модель основана на численном решении задачи Коши для системы дифференциальных уравнений движения машины и позволяет описывать переходные динамические процессы, сопровождающие пуск машины из состояния покоя до ее выхода (или невыхода) на установившееся синхронное движение.

Ключевые слова: динамика, вибротранспортирующие машины, самосинхронизация, система дифференциальных уравнений движения, математическое моделирование.

Вибротранспортирующие машины (ВТМ) широко используются в различных отраслях промышленности и на транспорте для транспортирования и разделения сыпучих грузов. Наиболее широкое применение находят вибрационные машины, рабочий орган которых совершает прямолинейные колебания, при этом вибровозбудители (ВВ) вращаются независимо, а синхронизация их вращений достигается за счет использования явления самосинхронизации [1–3].

В докладе приводятся результаты исследования нелинейной динамики ВТМ с самосинхронизирующимися ВВ. Основное внимание уделено новым перспективным типам ВТМ – машинам с тремя ВВ на одном рабочем органе (РО) и двухмассным машинам двух типов – с расположением ВВ на верхней массе и расположением ВВ на нижней массе машины. Системы дифференциальных уравнений движения этих машин получены в работах [3–6].

Исследование проводилось с помощью математической модели динамики ВТМ [3, 4], основанной на численном решении задачи Коши для системы дифференциальных уравнений движения машины. Модель позволяет описывать переходные динамические процессы, сопровождающие пуск машины из состояния покоя до ее выхода (или невыхода) на установившееся синхронное движение, а также последствия ударов, вызванных падением на РО машины значительных масс, соизмеримых с массой самой машины.

Двухмассные машины

При моделировании динамики двухмассных машин с двумя ВВ на верхней или нижней массе было установлено, что при выполнении условий, сформулированных в работах [3–4], явление самосинхронизации ВВ наблюдается у обоих типов машин. При этом, в случае малой жесткости нижних и промежуточных пружин (машины зарезонансного типа), наблюдается адаптивное свойство явления самосинхронизации ВВ аналогичное тому, которое было установлено А.Н. Косолаповым для одномассных машин с двумя ВВ (см., напр., [7]). В случае двухмассных машин это свойство заключается в том, что линия действия вынуждающей силы [2, 3, 7] проходит через центр масс того тела, на котором установлены ВВ. Наличие второго тела и величина его массы на направление этой силы не влияют.

У двухмассных машин с расположением ВВ на нижней массе наибольший интерес представлял случай частичного резонанса верхней массы (резонанса по одному из направлений вибрации). В процессе моделирования динамики этого типа машин удалось подобрать такие параметры машины, при которых обе массы машины совершают незначительные колебания, пока она не нагружена сыпучим материалом, но после нагружения верхняя масса входит в резонанс с ВВ, и амплитуда ее вибрации возрастает. Нижняя масса при этом продолжает совершать колебания незначительной амплитуды, играя роль демпфера и снижая вибрационное воздействие на фундамент [8]. Промежуточные пружины между верхней и нижней массами в этом случае намного жестче нижних пружин.

Использование явления резонанса позволяет ограничиться небольшой амплитудой вибрации нижней массы, что может привести к существенной экономии электроэнергии за счет снижения мощности приводных электродвигателей.

Одномассные машины с тремя вибровозбудителями

При моделировании пусковой динамики одномассных машин с тремя вибровозбудителями установлено, что в этом случае наступает самосинхронизация всех трех вибровозбудителей. Траектория центра масс рабочего органа (РО) машины представляет собой в этом случае эллипс [9]. Установлена зависимость (при постоянных физических параметрах парных ВВ) эксцентриситета этого эллипса и угла наклона его большой оси от эксцентрического момента непарного ВВ, т.е. от произведения массы непарного дебаланса на его приведенный радиус.

Для машин с тремя ВВ установлено обобщенное адаптивное свойство явления самосинхронизации [10], которое в частных случаях совпадает с известным адаптивным свойством, установленным А.Н. Косолаповым для машин с двумя ВВ [7].

В общем случае (если ось непарного ВВ не проходит через центр масс машины) движение ее РО не является поступательным, и разные точки двигаются по разным траекториям [11]. Отмеченную особенность движения РО можно использовать для получения положительного, с практической точки зрения, эффекта. В процессе численного моделирования удалось найти такое расположение ВВ на РО, при котором траектория загрузочного конца РО представляет собой очень сжатый, почти горизонтально расположенный эллипс, а траектория разгрузочного конца близка к окружности.

Такое движение РО весьма выгодно для вибропитателей-грохотов, совмещающих функции транспортировки сыпучих материалов и разделения их на фракции. Движение в области загрузки сыпучего материала происходит у такой машины преимущественно в горизонтальном направлении, что позволяет более эффективно разгрузить бункер. Далее, транспортируемый материал, продвигаясь по рабочей поверхности, начинает все более испытывать на себе влияние вертикальной составляющей, и, по прибытию в разгрузочную часть, подбрасывание материала достигает максимума, что обеспечивает наиболее эффективное грохочение. Полученные результаты позволяют ставить вопрос о создании вибротранспортирующих машин принципиально нового типа – машин с переменным полем вибрации по длине рабочего органа.

Исследования поддержаны РФФИ, грант № 08-08-00127а.

Список литературы

1. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. Т. 4. Вибрационные процессы и машины / Под ред. Э.Э. Лавендела. М.: Машиностроение, 1981. 509 с.

2. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 654 с.

3. Румянцев С.А. Динамика переходных процессов и самосинхронизирующихся движений вибрационных машин. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 134 с.

4. Румянцев С.А. Моделирование динамики переходных процессов самосинхронизирующихся вибрационных машин // Изв. вузов. Горный журнал. 2003. №6. С. 111–118.

5. Васильева Г.В., Румянцев С.А. Математическое моделирование нестационарной динамики двухмассной вибротранспортирующей машины // Транспорт Урала. 2006. №4 (11). С. 29–32.

6. Васильева Г.В., Румянцев С.А. Математическая модель динамики двухмассной вибротранспортирующей машины с вибровозбудителями на нижней массе // Транспорт Урала. 2008. № 1 (16). С. 33–35.

7. Косолапов А.Н. Адаптивное свойство колебательной системы с самосинхронизирующимися вибровозбудителями // ДАН СССР. 1989. Т. 309, №2.

8. Румянцев С.А., Алексеева О.Н. Динамика двухмассных вибротранспортирующих машин с самосинхронизирующимися вибровозбудителями на нижней массе // Вестник Уральского гос. ун-та путей сообщения. 2010. №4. С. 87–91.

9. Rumyantsev S., Tarasov D. Non-linear dynamics of vibration transport machines in cases of three and four Independently rotating vibration exciters // Recent Advances in Continuum Mechanics: Proc. of the 4th IASME/WSEAS Intern. Conf. on Continuum Mechanics. Cambridge, UK. 2009. P. 132–135.

10. Румянцев С.А., Тарасов Д.Ю., Шихов А.М. Особенности динамики вибротранспортирующих машин с тремя независимо вращающимися вибровозбудителями // Транспорт Урал. 2010. №3(26) С. 47–50.

11. Rumyantsev S., Tarasov D. Numerical simulation of non-linear dynamics of vibration transport machines in case of three independently rotating vibration exciters // Recrny Advences in Applied Mathematics: Proceedings of the American Conf. on Appl. Mathem. Harvard University. Cambridge. USA. 2010. P. 191–194.

NON-LINEAR DYNAMICS OF NEW PERSPECTIVE TYPES OF VIBRATION TRANSPORT MACHINES WITH SELFSINCHRONIZED VIBRATION EXCITERS

S.A. Rumyantsev, E.B. Azarov, O.N. Alexeyeva, D.Yu. Tarasov, A.M. Shihov

This report is devoted to the non-linear dynamics of vibration transport machines with selfsynchronized vibration exciters. The main attention is given to the new perspective types of these machines – one-mass machines with three vibration exciters and two-mass machines with two vibration exciters mounted on the upper or on the lower mass of machine. The research was carried out using a mathematical model of the dynamics of a vibration transport machine. The model is based on numerically solving Cauchy problem for the system of differential equation of motion of the machine and makes it possible to describe the transient dynamic processes. These processes ac-company the start-up of the machine from its state of rest until it reaches (or does not reach) stable synchronous motion.

Keywords: dynamics, vibration transport machines, selfsynchronization, the system of differential equation of motion, numerical simulation.

УДК 531

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА

Т.В. Сальникова

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

Tatiana.salnikova@gmail.com

Поступила в редакцию 16.05.2011

С помощью одной из теорем Клингенберга доказывается существование негиперболических решений в задаче Кирхгофа о движении твердого тела в идеальной жидкости, а также в двойственной задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой в силовом поле с квадратичным потенциалом. Динамическая система рассматривается на неодносвязном римановом многообразии четной размерности.

Ключевые слова: негиперболические периодические траектории, гауссова кривизна, проективная плоскость.

Рассмотрим задачу о движении твердого тела в неограниченном объеме идеальной несжимаемой жидкости, описываемом уравнениями Кирхгофа. Если тело имеет три плоскости симметрии, то уравнения Кирхгофа приводятся к уравнениям Эйлера – Пуассона, которые описывают движение твердого тела с неподвижной точкой в осесимметричном силовом поле. Если потенциал является квадратичной функцией единичного вектора оси симметрии силового поля, то уравнения Кирхгофа и Эйлера – Пуассона эквивалентны.

Уравнения Эйлера – Пуассона допускают три первых интеграла: энергии $H = h$, площадей $(J\omega, \gamma) = \mathrm{const}$, геометрический $(\gamma,\gamma) = 1$. Гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} < j\omega, \omega > + V(\gamma),$$

где $J = \mathrm{diag}\,(J_1, J_2, J_3)$ – матрица моментов инерции твердого тела, $\omega(p, q, r)$ – вектор угловой скорости вращения твердого тела, γ – единичный вектор оси симметрии силового поля. Далее мы положим постоянную интеграла площадей равной нулю:

$$J_1 p\gamma_1 + J_2 q\gamma_2 + J_3 r\gamma_3 = 0,$$

$$p = \dot{a}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \quad q = \dot{a}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$

$$r = \dot{a}\cos\theta + \dot{\varphi}.$$

Как известно, движение в потенциальном поле сводится к изучению геодезических линий некоторой римановой метрики. Сводим знаменитую задачу Кирхгофа (при некоторых условиях) к задаче о геодезических на неодносвязной двумерной поверхности, диффеоморфной проективной плоскости. После этого можно воспользоваться теоремой Клингенберга.

Пусть M – компактная односвязная ориентируемая поверхность, являющаяся конфигурационным пространством натуральной механической системы. В соответствии с известным принципом Мопертюи, при достаточно больших значениях h (больших, чем максимум потенциала V), на фиксированном уровне энергии можно определить метрику $(ds)^2 = 2(h - V)T(dt)^2$ [1].

На сфере Пуассона ($S^2 = \{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1\}$) отождествим антиподальные точки ($\gamma \leftrightarrow -\gamma$) и рассмотрим систему на проективной плоскости RP^2. Очевидно, что проективная плоскость является неодносвязной двумерной римановой поверхностью. Тогда верно следующее утверждение.

Теорема. *Если гауссова кривизна поверхности неотрицательна, то для произвольных значений параметра h, моментов инерции твердого тела и присоединенных масс в задаче Кирхгофа существуют устойчивые периодические траектории, конформно эквивалентные исходным.*

Для доказательства этого утверждения, основанного на теореме Клингенберга о существовании негиперболических замкнутых геодезических [2], необходимо вычислить гауссову кривизну поверхности. Воспользуемся известной формулой [3]:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial E/\partial v}{\sqrt{EG}} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial G/\partial u}{\sqrt{EG}}\right),$$

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2.$$

1. В простейшем случае, когда $J_1 = J_2 = J_3$, из интеграла площадей получим $\dot{a} = -\dot{\varphi}\cos\theta$, тогда метрика имеет вид $ds^2 = J_1 d\theta^2 + J_1(\sin\,\theta)^2 d\varphi^2$ и кривизна $K = 1/J_1$.

Итак, условия теоремы всегда выполнены. Кроме того, для малых возмущений параметров J_1, J_2, J_3 кривизна по непрерывности остается положительной, что доказывает существование устойчивых (по крайней мере в линейном приближении) периодических решений.

2. Пусть теперь $J_1 = J_2 \neq J_3$. Кривизна имеет следующее выражение:

$$K = \frac{J_3}{J_1(J_1(\sin\theta)^2 + J_3(\cos\theta)^2)^2} \times$$
$$\times (J_1(1+2(\cos\theta)^2) - 2J_3(\cos\theta)^2).$$

Если $J_3 < J_1$, то $K > 0$ и по непрерывности останется положительным и когда J_2 мало отличается от J_1.

Если $J_3 > J_1$, то область отрицательной кривизны появляется, если $J_2 > 3J_1/2$ (рис. 1).

При таком подходе после вычисления кривизны (которая является инвариантом) заключаем, что всегда существующие замкнутые геодезические имеют негиперболический тип, если кривизна неотрицательна, что доказывает их орбитальную устойчивость, по крайней мере в линейном приближении.

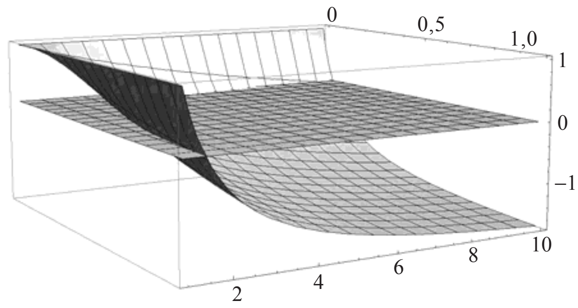


Рис. 1

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №10-01-00160) и по проекту НШ №8784.2010.1.

Список литературы

1. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики // Современные проблемы математики. Фундаментальные исследования. М. 1985. Т. 3. С. 5–304.

2. Клингенберг В. Лекции о замкнутых геодезических: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 416 с.

3. Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1987. 432 с.

ON PERIODIC SOLUTIONS OF KIRCHHOFF'S PROBLEM

T.V. Salnikova

Using one of the Klingenberg's theorems we prove the existence of non-hyperbolic solutions in the Kirchhoff's problem of motion of the rigid body in an ideal fluid as well as in the dual problem of motion of a rigid body with a fixed point with quadratic potential. The dynamical system is considered on the non-simply connected Riemannian manifold of even dimension.

Keywords: non-hyperbolic periodic trajectories, Gaussian curvature, projective plane.

УДК 539.36

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПОВЕДЕНИЯ МАЯТНИКА В ПОТОКЕ СРЕДЫ

Ю.Д. Селюцкий, П.Р. Андронов

НИИ механики Московского госуниверситета

seliutski@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Проведено сравнение результатов моделирования поведения аэродинамического маятника с помощью модифицированного метода дискретных вихрей (ММДВ) и с помощью феноменологических моделей (квазистатического подхода и модели присоединенного осциллятора).

Показано, что для вынужденных гармонических колебаний маятника и для его свободных колебаний результаты, даваемые моделью присоединенного осциллятора, соответствуют данным ММДВ в достаточно широком диапазоне параметров движения, и область применимости этой модели существенно шире, чем квазистатического подхода.

Исследована устойчивость положения равновесия «по потоку» в зависимости от параметров системы. Установлено, в частности, что при увеличении момента инерции маятника это положение равновесия теряет устойчивость, даже если точка крепления маятника находится «перед» центром давления.

Ключевые слова: колебания, устойчивость, сопротивляющаяся среда, аэродинамический маятник.

Положение равновесия «по потоку» и его устойчивость

Разработка феноменологических моделей нестационарного взаимодействия твердого тела с потоком среды, которые, с одной стороны, содержали бы относительно небольшое число параметров и позволяли проводить эффективный параметрический анализ, а с другой стороны, давали достаточно адекватное описание поведения рассматриваемых объектов, является весьма актуальной задачей для разных областей науки (например, ветроэнергетики). Исследования такого рода ведутся разными группами ученых [1, 2] как в России, так и за рубежом.

Постановка натурных экспериментов по изучению нестационарного взаимодействия тела с потоком среды сопряжена с большими техническими трудностями. Поэтому представляется полезным провести сравнение различных феноменологических подходов к моделированию динамики данного процесса с результатами численного гидродинамического эксперимента, при котором силы со стороны среды рассчитываются на основе решения уравнений гидродинамики [3]. Такая информация впоследствии будет полезна, в частности для идентификации параметров феноменологических моделей и разработки сценариев целенаправленных натурных экспериментов.

Рассмотрим аэродинамический маятник, помещенный в поток среды, имеющий на бесконечности постоянную скорость V. Пусть маятник состоит из невесомой державки и крыла с симметричным профилем (рис. 1). Введем систему координат Ox_1y_1, связанную с маятником, центр которой находится в центре вращения, а ось абсцисс проходит через носик профиля (и центр давления). Абсциссу носика в этой системе координат обозначим через l.

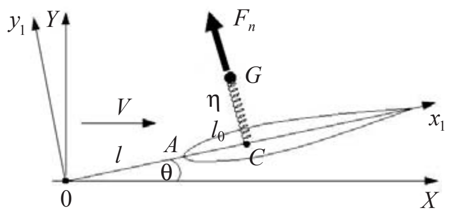


Рис. 1

Рассматриваемая система имеет очевидное положение равновесия «по потоку».

В настоящей работе для задачи об аэродинамическом маятнике сравниваются квазистатическая модель [4] и модель присоединенного осциллятора [1] (в рамках которой внутренняя динамика потока среды моделируется с помощью присоединенного осциллятора с массой m, коэффициентами жесткости и демпфирования k и h, прикрепленного к крылу в статическом центре давления), а в качестве гидродинамического аналога используется двумерный расчет численным методом дискретных вихрей [5]. Для упрощения записи выберем систему единиц измерения так, чтобы $V = 1$, $b = 1$, $\rho S/2 = 1$ (где b – длина хорды профиля, S – площадь крыла, ρ – плотность среды).

Условие асимптотической устойчивости положения равновесия по потоку в рамках квазистатической модели имеет вид: $l > -l_0$, l_0 – расстояние от носика до центра давления.

Критерии асимптотической устойчивости этого положения равновесия в соответствии с моделью присоединенного осциллятора имеют более сложный вид. В частности, в случае большого момента инерции маятника необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости имеет вид: $l > l_* = C_n^{\alpha}/k - l_0$.

Отметим, что в рамках модели присоединенного осциллятора положение равновесия по потоку для тяжелого крыла будет неустойчивым даже в случае, когда ось вращения расположена перед центром давления (но достаточно близко к нему). Таким образом, условия асимптотической устойчивости в рамках этой модели более жесткие, чем в квазистатической модели.

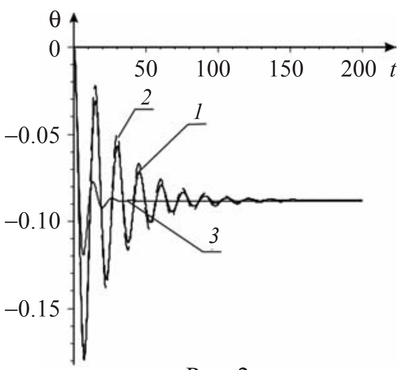


Рис. 2

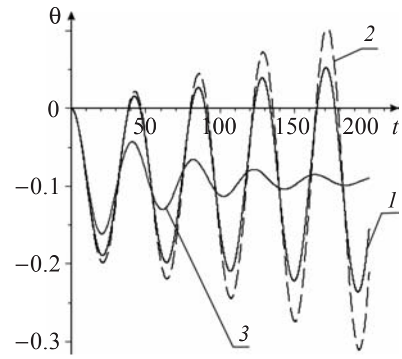


Рис. 3

Результаты численного моделирования

Пусть маятник находится в положении равновесия «по потоку». Для исследования переходных процессов приложим к середине хорды постоянную силу, перпендикулярную скорости набегающего потока. Тогда возникнет переходный процесс выхода в новое положение равновесия, определяемое равенством аэродинамического момента и момента вынуждающей силы.

Расчеты проводились для двух профилей (NACA 0009 и NACA 0012) при разных значениях длины державки и плотности ρ_0 материала крыла. Некоторые результаты численного моделирования для профиля NACA 0012 и длины державки $l = 1$ приведены на рис. 2, 3 (рис. 2 соответствует случаю $\rho_0 = 100$, рис. 3 – случаю $\rho_0 = 1000$). Кривые *1* изображают зависимость угла поворота маятника от времени, полученную с помощью ММДВ, кривые *2* – результаты расчетов по модели присоединенного осциллятора, а кривые *3* – зависимость, полученную в рамках квазистатического подхода. Во всех расчетах были приняты следующие значения параметров осциллятора: $m = 1.6$, $k = 3$, $h = 8$. Эти значения были определены по результатам моделирования гармонических колебаний маятника ($\theta = \theta_0 \sin \omega t$).

Видно, что результаты расчетов по ММДВ и по модели присоединенного осциллятора находятся в качественном согласии. Более того, в достаточно широком диапазоне значений параметров имеет место количественное согласие результатов. В то же время данные, полученные с помощью квазистатического подхода, заметно отличаются. Это может свидетельствовать о том, что для описания данного класса движений квазистатический подход в его традиционной форме неприменим.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 09-01-00340, 11-08-00444).

Список литературы

1. Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. О колебаниях пластины в потоке сопротивляющейся среды // Изв. РАН. МТТ. 2004. №4. С. 24–31.

2. Храбров А.Н. Математическое моделирование влияние схода вихрей на нестационарные аэродинамические характеристики профиля при его произвольном движении // Уч. зап. ЦАГИ. 2002. Т. XXXIII, №3–4. С. 3–17.

3. Андронов П.Р., Гувернюк С.В, Дынникова Г.Я. Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. М.: МГУ, 2006. 184 с.

4. Локшин Б.Я., Самсонов В.А. Об одной эвристической модели аэродинамического маятника // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4, №3. С. 1047–1061.

5. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. 256 с.

ON THE SIMULATION OF THE BEHAVIOR OF AN AERODYNAMIC PENDULUM

Yu.D. Selyutskiy, P.R. Andronov

Results of simulating the behavior of an aerodynamic pendulum obtained with the modified discrete vortices method (MDVM) and with phenomenological models (quasi-steady approach and attached oscillator model) are compared.

It is shown that for forced harmonic oscillations of the pendulum and for its free oscillations, results obtained using the attached oscillator model qualitatively agree with MDVM data, and the applicability domain of this model is larger than that of the quasi-steady approach.

Stability of the "along the flow" equilibrium is studied depending on system parameters. It is determined, in particular, that this equilibrium loses its stability when the moment of inertia of the pendulum increases, even if the rotation point is upstream from the center of pressure.

Keywords: oscillations, stability, resisting medium, aerodynamic pendulum.

УДК 531.8

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ПРОВОДЯЩЕГО ШАРА В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В.А. Семенов, П.В. Краузин

Пермский госуниверситет

semenov@psu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Представлены результаты расчета сил, действующих на покрытый оболочкой шар, в сферическом электростатическом подвесе в жидкости в индукционном приближении. Определены области устойчивого равновесия покрытого диэлектрической оболочкой проводящего шара.

Ключевые слова: сферический электростатический подвес, устойчивость равновесия, проводящий шар, индукционное приближение.

Совместим начало сферической системы координат (r, θ, φ) с центром сферической полости радиуса a, заполненной диэлектрической жидкостью с проницаемостью ε_m. Поместим в центр полости шар радиуса R_1, покрытый сферической оболочкой с внешним радиусом R_2. Диэлектрическая проницаемость шара ε_p, оболочки ε_d. Допустим, что на поверхности полости задано распределение потенциала $Uf(\theta)$, при котором в создаваемом электростатическом поле шар находится в равновесии в центре полости (U – характерная разность потенциалов между электродами). Угол θ отсчитывается от полярной оси z, направленной вдоль оси симметрии поля.

Вводя безразмерные величины $r \to R_2 r$, $u \to Uu$ и полагая $c = R_1/R_2$, $b = a/R_2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_d/\varepsilon_p$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_d/\varepsilon_m$, для определения потенциалов u_m в жидкости, u_2 в оболочке и u_1 в шаре имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\Delta u_1 = 0, \quad \Delta u_2 = 0, \quad \Delta u_m = 0,\\ r=c: u_1 = u_2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial r} = \varepsilon_1 \frac{\partial u_2}{\partial r},\\ r=1: u_2 = u_m, \quad \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} = \frac{\partial u_m}{\partial r},\\ r=b: u_m = f(\theta).\end{gathered} \tag{1}$$

Для установления вида равновесия найдем электрическую силу, действующую на шар при его малом смещении из центра полости вдоль и перпендикулярно оси симметрии поля. При смещении шара вдоль оси z на $\delta_z \ll 1$, функции u_m, u_2, u_1 изменяются в меру величины δ_z. В этом случае для нахождения потенциалов u_m, u_2, u_1 представим решение (1) в виде разложения в ряд до 1-го приближения по смещению шара:

$$\begin{gathered}u_m = \sum_{n=0}^{\infty}\left((\alpha_n^{(0)} + \alpha_n^{(1)}\delta_z)\left(\frac{r}{b}\right)^n + \right.\\ \left. +(\beta_n^{(0)} + \beta_n^{(1)}\delta_z) r^{-(n+1)} \right) P_n(\cos\theta),\\ u_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left((\gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)}\delta_z) r^n + \right.\\ \left. +(g_n^{(0)} + g_n^{(1)}\delta_z)\left(\frac{r}{c}\right)^{-(n+1)} \right) P_n(\cos\theta),\\ u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (d_n^{(0)} + d_n^{(1)}\delta_z)\left(\frac{r}{c}\right)^n P_n(\cos\theta).\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $P_n(\cos\theta)$ – полиномы Лежандра.

Для определения коэффициентов $\alpha_n^{(1)}$, $\beta_n^{(1)}$, $\gamma_n^{(1)}$, $g_n^{(1)}$, $d_n^{(1)}$ используем условие исчезновения возмущения потенциала на поверхности полости, а также граничные условия.

При смещении шара перпендикулярно оси симметрии поля (вдоль оси x) на $\delta_x \ll 1$, используем систему координат (r, θ', φ'), в которой угол θ' отсчитывается от оси x, а угол φ' – от оси x в плоскости yz. Распределение потенциала $f(\theta)$ в новой системе координат – $f(\theta', \varphi')$.

Известно [1], что электрическая сила, действующая на тело в электростатическом поле, определяется по формуле

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon_m}{4\pi} \oint_S \left(\mathbf{E}(\mathbf{nE}) - \frac{1}{2}E^2 \mathbf{n} \right) dS. \tag{3}$$

Здесь E – напряженность электрического поля на поверхности оболочки в жидкости, $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности.

Подставляя в (3) значение потенциала u_m на поверхности оболочки, получим выражения для сил, действующих на шар при его смещении вдоль и перпендикулярно оси симметрии поля

$$F_z = -2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\alpha_{n+1}^{(0)}\beta_n^{(1)} + \alpha_{n+1}^{(1)}\beta_n^{(0)})b^{-(n+1)}\delta_z,$$

$$F_x = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1+k)!}{(n-k)!}(\alpha_{n+1,k}^{(0)}\beta_{n,k}^{(1)} + \alpha_{n+1,k}^{(1)}\beta_{n,k}^{(0)} + \mu_{n+1,k}^{(0)}\nu_{n,k}^{(1)} + \mu_{n+1,k}^{(1)}\nu_{n,k}^{(0)})b^{-(n+1)}\delta_x, \qquad (4)$$

$$F \to F\frac{\varepsilon_m U^2}{2}.$$

Полученные выражения позволяют провести анализ устойчивости равновесия покрытого оболочкой шара для конкретных распределений потенциала и значений параметров. В частности, на рис. 1 приведена карта устойчивости равновесия проводящего шара ($\varepsilon_p \to \infty$) для разных значений отношения диэлектрических проницаемостей оболочки и жидкости ε_2 и величины отношения радиуса шара к радиусу оболочки c при распределении потенциала на поверхности полости:

$$f(\theta) = P_2(\cos\theta) = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}. \qquad (5)$$

Кривые *1–3* определяют границу устойчивости для смещений шара, перпендикулярных оси z, а кривые *4–6* – вдоль оси z для значений b, соответственно равных: 1.1, 1.2, 1.3. Кривая *7* – безындукционное приближение ($b \to \infty$). Область устойчивого равновесия находится под кривыми. Из рисунка видно, что дестабилизирующее влияние сил изображения больше для смещений, перпендикулярных оси симметрии поля. Это означает, что в целом устойчивому равновесию шара соответствуют области под кривыми *1–3*.

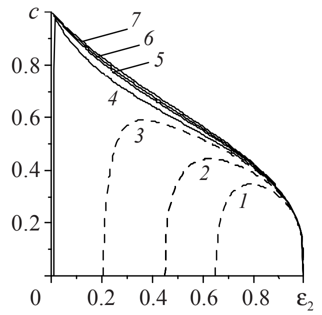


Рис. 1

Таким образом, действие сил изображения может существенно изменить условия устойчивости электростатического подвеса проводящего шара, полученные ранее в [2] в безындукционном приближении.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2005. 656 с.

2. Семенов В.А. // ЖТФ. 1984. Т. 54, №10. С. 2060–2064.

ABOUT STABILITY OF EQUILIBRIUM OF A CONDUCTIVE SPHERE IN AN ELECTROSTATIC FIELD

V.A. Semenov, P.V. Krauzin

The results of calculating the forces acting on a covered sphere in a spherical electrostatic suspension in liquid are presented in the induction approximation. Regions of stable equilibrium of the conducting sphere covered with a dielectric cover are defined.

Keywords: spherical electrostatic suspension, stability of equilibrium, conductive sphere, induction approach.

УДК 534.1:681.5

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ «УПРУГИЙ РОТОР–ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ПОДВЕС»

С.А. Сергиевский

ООО «Эм-Эс-Си Софтвэр Рус», Москва

sergey.sergievskiy@mscsoftware.com

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассмотрены методика построения комплексной динамической модели системы «упругий ротор–электромагнитный подвес» и ее реализация с применением программных пакетов MD Nastran, MD Adams и Easy5. Прдставлены результаты компьютерного моделирования динамики ротора при вращении его в электромагнитном подвесе с нелинейной системой управления.

Ключевые слова: упругий ротор, электромагнитный подвес, система управления, компьютерное моделирование.

Постановка задачи

Аналитические методы исследования динамики упругих роторов достаточно развиты и широко применяются при разработке роторных машин. Однако в связи с внедрением новых подходов к созданию роторных машин (в частности, использование в них электромагнитных подвесов ротора) выдвигается требование более точного учета конструктивных особенностей машины, а также особых условий ее эксплуатации, например переходных процессов, связанных с изменением частоты вращения ротора, внешними воздействиями на изделие и т.п.

Перспективный путь решения задачи – компьютерное имитационное моделирование работы роторной машины, предполагающее разработку и использование расчетной модели, учитывающей влияние конструктивных особенностей ротора, наличие системы подвешивания ротора с нелинейными характеристиками и системы управления подвесом ротора со сложной структурой.

Расчетная модель ротора

Ротор реальной машины (например энергетической установки) имеет, как правило, сложную конструкцию, в частности, ротор может быть составным. Это затрудняет построение точной расчетной модели ротора с использованием балочной модели, в которой свойства балок определяются «простым» вычислением моментов инерции сечений ротора.

Предлагается методика построения расчетной модели упругого ротора, базирующаяся на использовании программных пакетов MD Nastran и MD Adams компании MSC.Software (США) и включающая следующие шаги:

1. Ротор представляется совокупностью сосредоточенных масс, соединенных между собой упругими балками. Тензоры инерции каждой сосредоточенной массы соответствуют массо-инерционным характеристикам соответствующей части ротора.

2. С применением программного пакета MD Nastran решается оптимизационная задача, причем целевая функция выглядит как

$$F(d_1,..d_N) = \\ = \sum_i^N (d_i - d_{i\min})^2 + 10^6 \sum_k^M (f_k - f_{km})^2 \Rightarrow \min,$$

где суммирование по i ведется по всем упругим балкам, входящим в расчетную модель ротора, суммирование по k – по всем частотам собственных колебаний модели ротора (вычисляются программой MD Nastran), d_i – диаметр i-й упругой балки, f_k – значение k-й частоты собственных колебаний, а f_{km} – требуемое значение k-й частоты собственных колебаний (определяется расчетом с применением подробной конечно-элементной модели ротора или по результатам эксперимента на физическом образце ротора). В результате решения оптимизационной задачи определяются значения диаметров упругих балок, которые обеспечивают заданные величины частот собственных колебаний расчетной модели ротора.

3. В программном комплексе MD Adams строится расчетная модель упругого ротора,

представляющая собой совокупность сосредоточенных масс, соединенных упругими балками, с диаметрами, вычисленными в результате решения оптимизационной задачи.

Расчетная модель электромагнитного подвеса ротора

На вход системы управления электромагнитным подвесом (СУ ЭМП) ротора подается по два сигнала с величинами, равными смещениям ротора в двух взаимно-перпендикулярных направлениях в каждом из сечений, в которых установлены ЭМП. На выходе СУ – мгновенные значения сил, противодействующие смещению ротора от требуемого положения.

Моделирование СУ ЭМП выполняется в программе Easy5. Блок-схема одного канала СУ приведена на рис. 1.

мы «упругий ротор–ЭМП» с учетом массо-инерционных и жесткосных свойств ротора, структуры и характеристик СУ ЭМП, различных условий работы машины (изменение скорости вращения ротора, внешние воздействия на устройство и т.п.). На рис. 3 приведены результаты компьютерного моделирования «выбега» упругого ротора, установленного в ЭМП, при начальной частоте вращения 100 об/с (*а*) и перемещения ротора в плоскости одного из ЭМП (*б*).

Поскольку актуальным является моделирование продолжительных переходных процессов, протекающих в роторной машине (в течение нескольких минут и более), то фактор времени, затрачиваемого на расчет, приобретает очень важное значение. Однако высокая эффективность решателей программ MD Adams и Easy5 в сочетании с использованием эмуляции дисковых

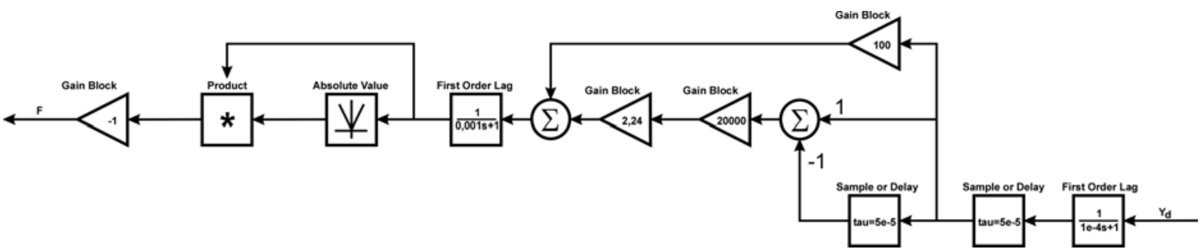


Рис. 1

Расчетная модель системы «упругий ротор–ЭМП»

Комплексная расчетная модель системы «упругий ротор–ЭМП» построена с применением программ MD Adams (моделирование динамики ротора) и Easy5 (моделирование работы шестиканального ЭМП). Блок-схема модели системы «упругий ротор–ЭМП» приведена на рис. 2.

Разработанная расчетная модель обеспечивает компьютерное моделирование динамики системесурсов компьютера с помощью оперативной памяти, позволяет достичь высокой скорости счета. В частности, продолжительность моделирования «выбега» реального ротора продолжительностью 1 мин составила 19 мин (wall clock time).

Автор выражает благодарность сотрудникам ОАО «ОКБМ Африкантов» В.Л. Патрушеву, С.А. Соловьеву, А.А. Руину и В.С. Востокову за участие в постановке задачи, обсуждении подходов к ее решению и полученных результатов.

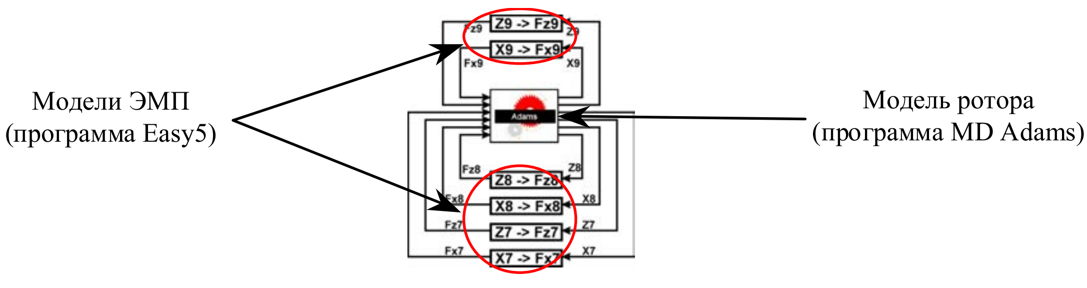


Рис. 2

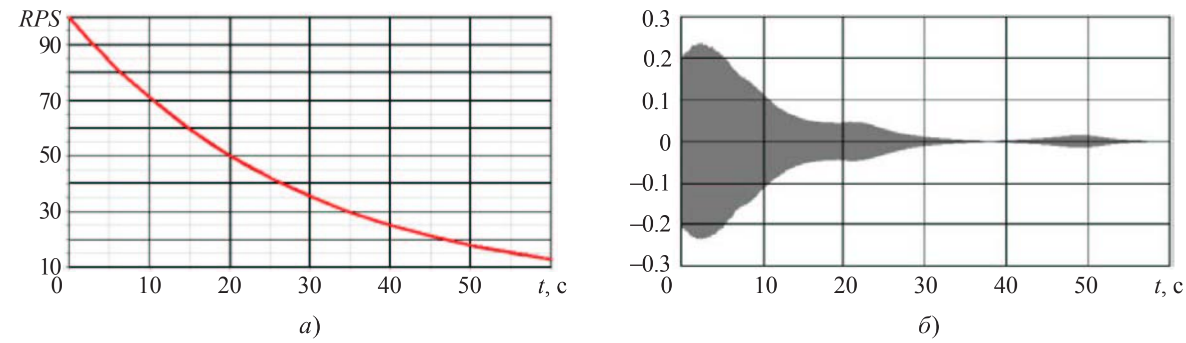


Рис. 3

COMPUTER SIMULATION OF THE DYNAMICS OF THE «FLEXIBLE ROTOR – ELECTROMAGNETIC SUSPENSION» SYSTEM

S.A. Sergievskiy

In this work a methodology of development of a complex dynamical model of system «Flexible rotor – Electromagnetic suspension» and its implementation based on MD Nastran, MD Adams and Easy5 software are described. Results of computer simulation of the dynamics of a rotor rotated in electromagnetic suspension with a nonlinear control system are considered.

Keywords: flexible rotor, electromagnetic suspension, control system, computer simulation.

УДК 621.865.8.001.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТРУКТУРЫ РОБОТОВ И МАНИПУЛЯТОРОВ

А.И. Смелягин, Е.В. Бабенко

Кубанский государственный технологический университет, Краснодар

asmelyagin@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Традиционно структура проектируемых роботов и манипуляторов выбирается не на научной основе, а интуитивно, опираясь на опыт и квалификацию разработчиков. Такой подход позволяет найти приемлемое, однако не всегда рациональное, решение. Это обусловлено тем, что разработчики не знают все структурные схемы, отвечающие начальным условиям, а, следовательно, не могут их проанализировать и выбрать лучший вариант.

Предлагается структурный синтез роботов и манипуляторов проводить на основе научных методов – с помощью построенных структурных математических моделей.

Ключевые слова: математическая модель, структура, синтез, робот, манипулятор.

В настоящее время роботы и манипуляторы (РМ) находят широкое применение как в производстве, так и в быту. Быстрое внедрение РМ привело к интенсивному развитию теории их расчетов и управления [1]. К сожалению, вопросами структурного синтеза РМ практически не уделяется внимания. Однако именно научный структурный синтез РМ позволит найти все соответствующие начальным условиям структурные схемы и определит наиболее перспективные из них для решения поставленной задачи.

Предлагается целенаправленный структурный синтез РМ проводить с использованием структурных математических моделей [1].

РМ чаще всего создаются на базе простых механизмов с разомкнутой кинематической цепью. Структурная математическая модель таких РМ в соответствии с [1] имеет вид:

$$\begin{cases} W = \sum\limits_{i=1}^{\Pi-1} i p_i, \\ p = n, \\ p = \sum\limits_{i=1}^{\Pi-1} p_i. \end{cases} \tag{1}$$

Анализ модели (1) показывает, что синтез РМ можно проводить, если задаться их подвижностью и пространством, в котором они будут существовать, либо числом звеньев или кинематических пар.

Рассмотрим синтез простых РМ с разомкнутой кинематической цепью с использованием структурной математической модели (1). Пусть необходимо синтезировать манипулятор подвижностью $W = 5$, который должен иметь три подвижных звена ($n = 3$).

Из второго уравнения (1) следует, что общее число кинематических пар в синтезируемом манипуляторе должно быть равно трем ($p = 3$). С учетом этого, первое и третье уравнения (1) примут вид:

$$\begin{cases} p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 = 5, \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 3. \end{cases} \tag{2}$$

Анализ (2) показывает, что в синтезируемом манипуляторе четырех- и пятиподвижные кинематические пары не могут быть использованы, так как даже при условии, что $p_2 = 0$ и $p_3 = 0$, система (2) не имеет целочисленного решения. Значит, для синтезируемого механизма систему (2) можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 5, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 3. \end{cases} \tag{3}$$

Из первого уравнения (3) видно, что одновременно использовать при синтезе РМ одно-, двух- и трехподвижные кинематические пары нельзя. Следовательно, синтезируемый манипулятор может состоять из двух различных по подвижности кинематических пар. Найдем эти решения.

Случай 1. Синтезируемый манипулятор должен содержать только одно- и двухподвижные кинематические пары, т.е. $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$, $p_3 = 0$. Тогда (1) для исследуемого случая примет вид:

$$\begin{cases} p_1 + 2p_2 = 5, \\ p_1 + p_2 = 3. \end{cases}$$

Целочисленными корнями последней системы будут следующие решения: $p_1 = 1, p_2 = 2$. На рис. 1 приведены некоторые возможные структурные схемы манипуляторов, отвечающие условиям: $W = 5$, $n = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ (A – одноподвижная вращательная кинематическая пара; A' – одноподвижная поступательная кинематическая пара; B, C – двухподвижные цилиндрические кинематические пары; *1*, *2*, *3* – подвижные звенья).

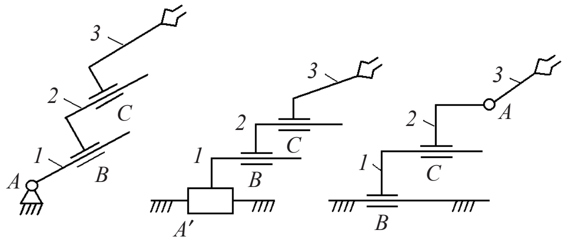


Рис. 1

Случай 2. Синтезируемый манипулятор не должен иметь двухподвижные кинематические пары, т. е. $p_1 \neq 0$, $p_2 = 0$, $p_3 \neq 0$. Система (1) в этом случае примет вид

$$\begin{cases} p_1 + 3p_3 = 5, \\ p_1 + p_3 = 3. \end{cases} \tag{4}$$

Решая (4), найдем, что $p_1 = 2$, а $p_3 = 1$. На рис. 2 приведены некоторые структурные схемы манипуляторов, соответствующие условиям: $W = 5$, $n = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 3$ (A, B – вращательные кинематические пары; D – поступательная кинематическая пара; E – винтовая кинематическая пара; C – сферическая кинематическая пара; *1*, *2*, *3* – подвижные звенья).

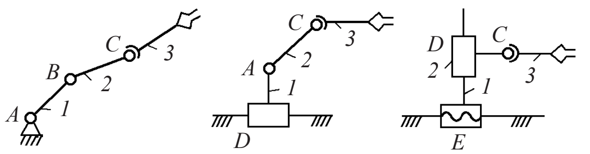


Рис. 2

Случай 3. Синтезируемый манипулятор может иметь только двух и трехподвижные кинематические пары, т.е. $p_1 = 0$, $p_2 \neq 0$, $p_3 \neq 0$. Модель (1) в этом случае примет вид:

$$\begin{cases} 2p_2 + 3p_3 = 5; \\ p_2 + p_3 = 3. \end{cases} \tag{5}$$

Анализ (5) показывает, что положительных целочисленных решений эта система не имеет.

Перебирая все возможные сочетания одно-, двух- и трехподвижных кинематических пар, можно построить различные структурные схемы манипуляторов, отвечающие начальному условию ($W = 5$, $n = 3$).

Рассмотрим количественный синтез манипуляторов с ранее заданными условиями.

При исследовании случая *1* в качестве решений системы уравнений были получены следующие условия: в синтезируемых манипуляторах должна быть одна одноподвижная и две двухподвижные кинематические пары. Пусть в синтезируемых манипуляторах будут использоваться вращательные (В) и цилиндрические (Ц) кинематические пары. Путем различного сочетания выбранных кинематических пар можно построить несколько манипуляторов с различными структурными схемами.

Найдем число формальных устройств, соответствующих этим решениям.

Общее число возможных разновидностей структурных схем C, состоящих из числа l и q видов кинематических пар различного конструктивного исполнения, в соответствии с [1], определится как

$$C = q^l. \tag{6}$$

Так как для создания синтезируемых механизмов будут использоваться два вида кинематических пар, то для рассматриваемого случая $q = 2$, а $l = 3$. Тогда общее число возможных разновидностей механизмов (C) в соответствии с (6) будет равно восьми. Значит, формально можно создать восемь устройств. Располагая различным образом кинематические пары, можно получить следующие их сочетания – это ВВВ, ВЦВ, ВВЦ, ЦВВ, ЦЦЦ, ЦВЦ, ЦЦВ, ВЦЦ.

Поступая аналогичным образом, можно синтезировать все возможные схемы РМ, соответствующие заданным начальным условиям и создать их атласы.

Список литературы

1. Смелягин А.И. Структура машин и механизмов. М.: Высшая школа, 2006. 304 с.

MODELLING OF STRUCTURE OF ROBOTS AND MANIPULATORS

A.I. Smeljagin, E.V. Babenko

Traditionally structure of projected robots and manipulators gets out not on a scientific basis, and intuitively, leaning on experience and qualification of developers. Such approach allows to find comprehensible, however, not always rational, the decision. It is caused by that developers do not know all block diagrammes answering to entry conditions, and, hence, cannot analyses and choose them the best variant.

Is offered structural synthesis of robots and manipulators to spend on the basis of scientific methods – by means of the constructed structural mathematical models.

Keywords: mathematical model, structure, synthesis, the robot, the manipulator.

УДК 539.3:534.1

О ДВИЖЕНИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ОБЪЕКТОВ ВДОЛЬ ОДНОМЕРНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ

М.Л. Смирнова

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

smml2@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

В приближении второго порядка рассмотрена согласованная задача о малых продольно-поперечных колебаниях струны и движении скользящей вдоль нее бусины. Обсуждается вопрос об импульсе возбуждаемых в струне волн и их взаимодействии с бусиной. Данная задача служит иллюстрацией общей вариационной постановки задачи динамики одномерных распределенных упругих систем с движущимися ограничителями и нагрузками.

Ключевые слова: упругая система, движущаяся нагрузка, волна, импульс, нелинейность.

В [1, 2] на простых примерах показано, что для вычисления импульса волн и сил, возникающих при взаимодействии волн с отражающими препятствиями, необходимо рассматривать задачу о волновом движении в среде в нелинейной постановке. При исследовании поперечных движений одномерных упругих систем для вычисления сил, возникающих на границе системы, необходим учет нелинейной связи поперечных и продольных движений, как в уравнениях движения, так и в краевых условиях. Исходя из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского, в работе получены уравнения движения одномерных упругих систем и соответствующие естественные краевые условия, причем предполагаются как неподвижные, так и движущиеся закрепления и нагрузки. На основе данных соотношений рассмотрена задача о малых продольно-поперечных колебаниях бесконечной струны с нанизанной на нее бусиной массы m.

Считаем, что поперечное смещение бусины ограничено жесткими направляющими. Пусть возбуждается локализованная поперечная волна, бегущая влево (в сторону бусины, рис. 1).

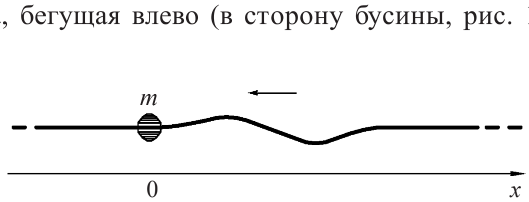


Рис. 1

В линейном приближении волна описывается непрерывной функцией $\upsilon_1(x,t) = f(x + c_0 t)$, отличной от нуля только на интервале $x_0 - c_0 t < x < x_0 - c_0 t + a$. В начальный момент времени $t = 0$ $f(x_0) = f(x_0 + a) = 0$. Пусть при $t = 0$ бусинка находится в точке $x = 0$, волна находится полностью справа от бусины ($x_0 > 0$).

Уравнения колебаний струны (с точностью до величин второго порядка малости) имеют вид:

$$u_{tt} - c_0^2 \gamma^2 u_{xx} =$$
$$= \varepsilon \left[(u_x u_t)_t + u_t u_{tx} + \upsilon_t \upsilon_{tx} + \frac{c_0^2 \varepsilon}{1-\varepsilon} \upsilon_x \upsilon_{xx} \right],$$
$$\upsilon_{tt} - c_0^2 \upsilon_{xx} = \varepsilon \left[(u_x \upsilon_t)_t + \frac{c_0^2 \varepsilon}{1-\varepsilon} (u_x \upsilon_x)_x \right],$$

где $u(x, t)$ и $\upsilon(x, t)$ – соответственно продольные и поперечные смещения точек струны, $c_0^2 = ku_{0x}/\rho_0$, k – коэффициент упругости струны, $u_0(x) = u_{0x}x$ ($u_{0x} = \text{const}$) – продольное смещение точек струны, обусловленное начальным растяжением, ρ_0 – погонная плотность недеформированной струны, $\varepsilon = 1/(1 + u_{0x}) = (\gamma^2 - 1)/\gamma^2$, $\gamma^2 = (1 + u_{0x})/u_{0x}$.

Решение уравнений представим в виде суммы величин первого и второго порядка малости: $u = u_1 + u_2$, $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$.

Закон движения бусины $l = l(t)$, при $t = 0$ $l(0) = 0$. Координата x_l элемента струны, взаимодействующего с бусиной, и $l(t)$ связаны соотношением $(1 + u_{0x})x_l(t) + u_l(t) - l(t) = 0$, ($u_l(t) = u(x_l(t), t)$, которое учитывается в вариационной постановке задачи введением неопределенного множителя Лагранжа α.

Условия согласованного движения бусины и струны записываются следующим образом ($\upsilon_l(t) = \upsilon(x_l(t), t)$:

$$m\ddot{\upsilon}_l = k(1-\varepsilon)\upsilon_{1x}\Big|_{x=x_l-0}^{x=x_l+0} + \rho_0\varepsilon^2\upsilon_{1t}\Big|_{x=x_l-0}^{x=x_l+0}\dot{l}(t),$$

$$-\alpha = \left(\frac{\rho_0}{2}\varepsilon^2\upsilon_{1t}^2 + k\varepsilon^2\frac{\upsilon_{1x}^2}{2} + ku_{2x}\right)\Bigg|_{x=x_l-0}^{x=x_l+0} +$$

$$+\rho_0\varepsilon u_{2t}\Big|_{x=x_l-0}^{x=x_l+0}\dot{l}(t),$$

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{2}(\rho_0\varepsilon\upsilon_{1t}^2 + k(1-\varepsilon)\upsilon_{1x}^2)\Big|_{x=x_l-0}^{x=x_l+0} +$$

$$+\rho_0\varepsilon^3\upsilon_{1t}\upsilon_{1x}\Big|_{x=x_l-0}^{x=x_l+0}\dot{l}(t),$$

$$m\ddot{l} = -\alpha.$$

Поперечное волновое возмущение струны $\upsilon_1(x,t) = f(x + c_0t)$, не обладающее импульсом, до появления контакта с бусиной ($t < x_0/c_0$) из-за нелинейности системы порождает группу продольных волн, бегущих в том же направлении, и продольную волну, бегущую вправо:

$$u_{2t}(x,t) = -\frac{c_0}{2}f_x^2(x+c_0t) + \frac{c_0(\gamma+1)}{4}f_x^2(x+c_0\gamma t) -$$

$$-\frac{c_0(\gamma-1)}{4}f_x^2(x-c_0\gamma t).$$

Суммарный импульс этих волн равен нулю. Группа волн, бегущих в сторону бусины, обладает импульсом, но эти продольные возмущения проходят сквозь бусину, не оказывая на нее влияние. Во время контакта бусины со струной $x_0/c_0 < t < (x_0 + a)/c_0$ в струне возникают более интенсивные продольные волны, которые назовем вторичными и обозначим $u^{\text{вт}}(x,t)$:

$$u_t^{\text{вт}}(x,t) = \frac{c_0}{\gamma(1+u_{0x})^2}\left[f_x^2\left(\frac{x}{\gamma} + c_0t\right) + \right.$$

$$\left. + f_x^2\left(-\frac{x}{\gamma} + c_0t\right)\right], \quad t \geq \frac{x_0 + a}{c_0}.$$

Это волны второго приближения (наряду с $u_2(x,t)$. Они обладают импульсом в горизонтальном направлении, равным

$$2\rho_0c_0\varepsilon^2\int_{x_0}^{x_0+a} f_x^2(x)\,dx.$$

Такой же по величине импульс, но направленный в противоположную сторону, приобретает бусина и приходит в движение. Суммарный импульс системы струна–бусина остается равным нулю.

Таким образом, изменение импульса бусины в результате интегрального воздействия на нее волнового возмущения таково:

$$\Delta p = -2\rho_0c_0\varepsilon^2\int_{x_0}^{x_0+a} f_x^2(x)\,dx.$$

Под действием набегающего справа поперечного возмущения бусина смещается влево (см. рис. 1).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00411).

Список литературы

1. Денисов Г.Г. О волновом импульсе и усилиях, возникающих на границе одномерной упругой системы // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 1. С. 42–51.

2. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Смирнова М.Л. К вопросу об импульсе упругих волн и их воздействии на препятствие // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Вып. 70. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2008. С. 39–50.

ON THE MOTION OF CONCENTRATED OBJECTS ALONG ONE-DIMENSIONAL ELASTIC SYSTEMS

M.L. Smirnova

The consistent problem of small transverse-longitudinal vibrations of a string and the bead motion along the string is considered in the second-order approximation. The question of the momentum of waves excited in the string and its interaction with the bead is discussed. This task is an example of the general variational problem of the dynamics of a one-dimensional continuous system with moving limiters and loads.

Keywords: elastic system, moving load, wave, momentum, nonlinearity.

УДК 532.5

ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПРИ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИИ ТОПЛИВА В РАКЕТАХ-НОСИТЕЛЯХ И КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТАХ

М.И. Степанова[1]***, А.Н. Темнов***[2]

[1]Государственный космический научно-производственный центр
им. М.В. Хруничева, Москва
[2]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва

s_masyanya@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Перераспределение топлива, то есть передача топлива из одного объема в другой, является решением ряда проблем в авиационной и ракетно-космической технике. Одним из возможных путей улучшения энергетических характеристик современных ракет-носителей тяжелого класса, является повышение весовой эффективности конструкции за счет перераспределения части топлива из баков одной ступени в другую и обеспечения более полной заправки к моменту отделения предшествующей ступени. Новизной рассматриваемых проблем является исследование влияния перераспределения топлива на динамику конструкции разрабатываемой ракеты.

Ключевые слова: ракета-носитель, устойчивость движения системы, гидродинамическая задача, колебания жидкости переменной глубины, потенциал Жуковского.

Прогресс в освоении космоса и постоянно возрастающая коммерческая деятельность требует от конструкторов современной космической индустрии создания более надежных ракет-носителей (РН), разгонных блоков и космических аппаратов (КА), то есть средств выведения (СВ), с максимальными энергомассовыми характеристиками.

Основными задачами, возникающими при решении этой сложной проблемы, являются задачи, связанные с устойчивостью процесса подачи и перераспределения компонентов топлива и задачи устойчивости движения самих СВ.

Рассматриваемые проблемы устойчивости условно могут быть разделены на 2 класса: внешние и внутренние.

Внешние задачи устойчивости связаны с актуальным вопросом создания в космосе длительно эксплуатируемых спутников, созданием заправочных космических аппаратов (КА) и транспортно-космических систем в условиях, близких к условиям невесомости.

К внутренним задачам динамики можно отнести задачи, возникающие при подаче и перераспределении компонентов топлива с целью получения максимальных энергомассовых характеристик, а также задачи, связанные с разработкой КА, требующих многократного включения.

Поскольку жидкие компоненты топлива составляют 85% от всей массы РН, то представляется интересным рассмотреть влияние перераспределения компонентов топлива на динамику возмущенного движения ракеты. Для этого была прежде всего рассмотрена гидродинамическая задача о движении жидкости, частично заполняющей подвижный бак и вытекающей через заборное устройство. Так как движение жидкости предполагается безвихревым, задача о возмущенном движении жидкости в полости подвижного твердого тела сводится к нахождению потенциала скоростей.

Задача о колебаниях топлива рассмотрена в линейной постановке и сводится к квазистационарной задаче о колебаниях жидкости ограниченного объема с дополнительным динамическим граничным условием.

Рассматриваемая задача отличается от предыдущих [1–3] тем, что имеется наличие обобщенной координаты $\lambda_n(t)$, которая учитывает возмущение жидкости на поверхности слива. Под поверхностью слива понимается условная поверхность, через которую происходит забор компонента.

Получены решения спектральных задач о колебаниях жидкости переменной глубины и задачи о вынужденных движениях жидкости; определены потенциалы Жуковского и гидродинамические коэффициенты уравнения.

Расчеты выполнены для полостей различных форм (цилиндрической, конической, сферической).

Построены области устойчивости в параметрах, характеризующих невозмущенное движение жидкости, и в плоскости параметров твердого тела.

В результате решения краевых задач с использованием уравнения количества движения и уравнения моментов для системы «твердое тело + жидкость», отбрасывая члены высших порядков малости, можно получить уравнения возмущенного движения РН в векторном виде и уравнения, описывающие колебания жидкости в движущейся полости. При этом $s_n(t)$ и $\lambda_n(t)$ являются обобщенными координатами, характеризующими движение жидкости на свободной поверхности и на поверхности слива.

Данная система уравнений полностью определяет возмущенное движение твердого тела с полостью, содержащей идеальную жидкость, и учитывает перетекание ее из одной емкости в другую.

Список литературы

1. Моисеев Н.Н., Петров А.А. Численные метода расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М.: ВЦ АН ССР. 1966. 269 с.

2. Рабинович Б.И. Введение в динамику ракет и космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1975. 416 с.

3. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 460 с.

THE PROBLEMS OF STABILITY OF MOTION OF LAUNCH VEHICLES AND SPACECRAFTS WITH FUEL REDISTRIBUTION

M.I. Stepanova, A.N. Temnov

Fuel redistribution, in other words the transfer of fuel from one tank to another, is the solution of some problems in the aviation, rocket and space engineering. One of the ways to improve the power budget of modern heavy-class launch vehicle is to increase the weight efficiency due to the transfer of fuel from one rocket stage tank to another and provide a more complete filling at the separation moment. The novelty of the research is to study the influence of the fuel redistribution on the dynamics of the developed rocket design.

Keywords: launch vehicle, stability of the motion of the system, the hydrodynamic problem, sloshing of a variable-depth fluid, Zhykovski potential.

УДК 534

ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ФРЕЗЕРНОГО СТАНКА С НЕЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ ТИПА «ЗАЗОР»

С.Н. Стребуляев

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского,

stsn@vmk.unn.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Исследуются автоколебания консольных вертикально-фрезерных станков с числовым программным управлением с нелинейностью типа «зазор». Математическая модель учитывает колебания несущей системы в плоскости его симметрии и динамические силы резания. При определении частот и амплитуд автоколебаний использован метод гармонического баланса. По результатам вычислительного эксперимента были найдены параметры, оказывающие наибольшее влияние на изменение указанных характеристик автоколебаний.

Ключевые слова: станки, вибрации, нелинейное звено, математическая модель, динамика.

Из всех видов фрезерных станков наиболее сильно подвержены вибрациям консольные вертикально-фрезерные станки, что связано со спецификой конструкций их несущих систем, привода главного движения и процесса фрезерования. Вибрации при фрезеровании в зависимости от условий обработки могут относиться к принципиально различным по своей природе видам колебаний: вынужденным колебаниям и автоколебаниям.

Исследования колебаний консольных вертикально-фрезерных станков (КВФС) с числовым программным управлением (ЧПУ) имеют большое значение для поиска путей их совершенствования, повышения производительности и улучшения других технико-экономических показателей. Автоколебания обычно возникают при интенсификации эксплуатационных режимов станков. Изучение устойчивости колебаний фрезерных станков связано с решением наиболее сложных вопросов динамики станков и теории колебаний, так как сводится к исследованию систем дифференциальных уравнений в частных производных с запаздыванием. Наличие адекватных математических моделей, описывающих динамику конструкции и процесса фрезерования, позволит оценить виброустойчивость на стадии проектирования, что очень важно для станков с числовым программным управлением в условиях адаптивного управления.

Динамическую модель станка с ЧПУ можно представить с помощью блок-схемы (рис. 1), имеющей линейную часть $W(p)$ и эквивалентную передаточную функцию нелинейного звена $R(A)$. Станок, обладающий упругими свойствами, характеризуется передаточной функцией $W(p)$.

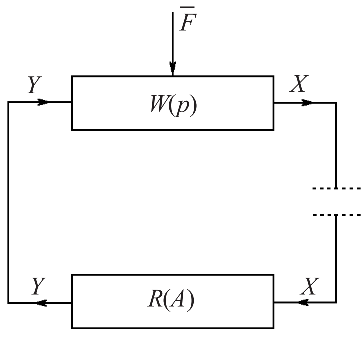


Рис. 1

Процесс фрезерования, зависящий от различных технологических параметров, представляется с помощью обратных связей с передаточными функциями, учитывающими характеристики при относительных колебаниях резца и детали и при срезании переменного припуска.

При вращении фрезы каждый ее зуб снимает с детали определенную часть металла. В результате возникает сила, действующая на деталь спустя промежуток времени $\tau = 1/(nz)$ (запаздывание), равный времени поворота зуба на угол $2\pi/z$, где n – число оборотов фрезы в минуту, z – число всех зубьев фрезы.

Наличие запаздывания в динамических системах часто является причиной возникновения их неустойчивых режимов работы. Рассматривалась система, не подверженная внешним периодическим воздействиям.

Ставилась задача построения адекватной математической модели станка, разработка алгоритма нахождения частот и амплитуд автоколебаний, анализа этих характеристик в зависимости от заданных параметров системы. Особенность созданной модели состоит в том, что в ней учитываются изменения жесткостных, диссипативных и инерционных характеристик в соединениях «стол–салазки» и «салазки–консоль».

Параметры замкнутой на процесс фрезерования математической модели станка были взяты из его паспортных данных, научной и методической литературы, а также из экспериментальных данных, представленных в [1].

На первом этапе рассмотрена математическая модель линейной части системы. При построении модели учитывалась специфика конструкции указанного типа станков с ЧПУ и процесса механической обработки. На втором этапе определялись параметры эквивалентной передаточной функции нелинейного звена. Рассматривалась нелинейность типа «зазор» в подвижном соединении «консоль–салазки».

На практике использование метода гармонического баланса в рассматриваемой задаче имело ряд трудностей. Так, нахождение точек пересечения годографов, характеризующих линейную и нелинейную части, затруднено в связи с громоздкостью их аналитических выражений. Для автоматизации поиска этих точек было разработано программное обеспечение с использованием пакета компьютерной алгебры Maple11. Получение значений амплитуды и частоты автоколебаний производилось в режиме мультипликации.

С использованием разработанного программного обеспечения проводился многофакторный вычислительный эксперимент на ЭВМ [2]. Цель указанного эксперимента – определить параметры замкнутой динамической системы фрезерного станка, оказывающие наибольшее влияние на изменение амплитуд и частот автоколебаний. При анализе на ЭВМ показателей динамического качества станка модели 6Д12Ф20 были найдены параметры системы, оказывающие наибольшее влияние на изменение амплитуды автоколебаний.

Полученные результаты и программное обеспечение могут быть использованы при проектировании новых конструкций станков и в составе систем их автоматизированного проектирования а также в учебном процессе при подготовке студентов соответствующих специальностей.

Список литературы

1. Городецкий Ю.И., Стребуляев С.Н. Информационная система для исследования динамических характеристик резания металлов // Тез. докл. V конф. по нелинейным колебаниям механических систем, Н.Новгород, 1999. С. 78–79.

2. Городецкий Ю.И., Стребуляев С.Н., Майорова Ю.Е. Исследование автоколебаний динамической системы фрезерного станка с нелинейным элементом // Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем «DYVIS-2009»: Сб. трудов XVI симпозиума. М.-Звенигород. 2009. С. 483–489.

RESEARCH OF SELF-EXCITED OSCILLATIONS OF LENAMICAL SYSTEM OF A MILLING MACHINE WITH A NONLINEAR ELEMENT AS «CLEARANCE»

S.N. Strebulyaev

This article considers the problem of computer-aided research of nonlinear differential equations describing milling process.

Keywords: machine tools, vibration, nonlinear link, mathematical model, dynamic.

УДК 519.6

ГИБРИДНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.Д. Сулимов

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва

spm@bmstu.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматриваются задачи глобальной оптимизации основных динамических характеристик гидромеханических систем. Критериальные функции предполагаются непрерывными, липшицевыми, многоэкстремальными, не всюду дифференцируемыми. Предложены новые гибридные алгоритмы, в которых пространство поиска сканируется с помощью современных стохастических алгоритмов, основанных на использовании аналогии с процессами абсорбции и рассеяния частиц при ядерных реакциях. Локальный поиск в последовательном гибридном алгоритме проводится методом линеаризации для сглаживающих аппроксимаций критериальных функций, в параллельном алгоритме – методом редукции размерности. Приведены результаты решения модельных задач идентификации по спектральным данным аномалий фазового состава теплоносителя в контуре реакторной установки.

Ключевые слова: гидромеханическая система, динамические характеристики, глобальная оптимизация, критериальная функция, гибридный алгоритм.

Современные изделия области высоких технологий, такие как летательные аппараты, реакторные установки АЭС и др., включают в себя гидромеханические системы различного назначения. Создание, отработка и последующая эксплуатация таких систем связаны с поиском решения двух типов экстремальных задач – оптимизации и диагностики. Задачи первого типа возникают при выборе оптимальных параметров систем, а также для реализации оптимального управления системой или процессом. Обеспечение безопасной и эффективной эксплуатации требует решения задач второго типа: диагностирования систем по результатам косвенных измерений. Входными данными для диагностирования являются результаты измерений некоторых следственных характеристик системы или процесса, например, регистрируемые параметры колебательных и ударных процессов; искомыми являются причинные характеристики, к которым относятся коэффициенты уравнений расчетной динамической модели, граничные условия, геометрические и другие характеристики. В задачах этого типа необходимо учитывать недифференцируемость и многоэкстремальность критериальных функций ввиду наличия кратных частот и неполноты информации, полученной при измерениях. Значительная трудоемкость решения обратных спектральных задач обусловлена их некорректностью, которая чаще всего проявляется в неустойчивости решения относительно погрешностей входных данных. Используемый подход основан на разработке и применении математических моделей систем, математических методов расчета основных динамических характеристик систем, методов теории обратных задач, методов глобальной оптимизации.

К настоящему времени разработаны и находят широкое применение многочисленные методы глобальной минимизации многоэкстремальных функций. Следует отметить, что эффективность детерминированных методов и соответствующих алгоритмов существенно ограничена их зависимостью от размерности задачи. При реализации стохастических алгоритмов требуются значительные вычислительные ресурсы. Так, чувствительность к выбору параметров алгоритма, устанавливаемых пользователем или определяемых содержанием задачи, существенно влияет на скорость сходимости решения. В число наиболее мощных современных стохастических алгоритмов глобальной оптимизации входит алгоритм PCA [1]. Существенным шагом алгоритма является сравнительная оценка качества решения, определяемого текущей и предшествующей конфигурациями системы. Пробное решение принимается с некоторой вероятностью, что исключает сходимость к локальному минимуму. Локальный поиск также осуществляется стохастическим методом. При использовании алгоритма PCA единственным параметром, устанавливаемым пользователем, является число итераций. Алгоритм удобен для реализации в виде прикладной программы и может использоваться при решении как непрерывных, так и дискретных задач оптимизации. Одним из ресурсов повышения эффективности стохастического алгоритма является совершенствование процедуры локального поиска. Предложено семейство гибридных алгоритмов глобальной оптимизации, в которых сканирование пространства переменных проводится стохастическим методом, а при локальном поиске в перспективной на глобальный экстремум области используются детерминированные методы. Вместе с тем, последовательные комплексы программ не всегда могут быть применены к решению актуальных задач из-за ограничений производительности одного процессора. Возникает проблема разработки специальных кодов с учетом специфики параллельных вычислений. Существующие многопроцессорные вычислительные системы значительно расширяют возможности решения задач многоэкстремальной оптимизации за счет реализации параллельных алгоритмов.

Работа современных стохастических алгоритмов PCA и M-PCA [2] основана на использовании аналогии с физическими процессами абсорбции и рассеяния частиц при ядерных реакциях. В алгоритме PCA для исследования области поиска используется одна частица. На начальном шаге выбирается пробное решение (Old_Config), которое затем модифицируется посредством стохастического возмущения (Perturbation()), что позволяет найти новое решение (New_Config). С помощью функции Fitness() дается сравнительная оценка нового и предыдущего решений, на основании которой новое решение может быть принято или отвергнуто. Если новое решение отвергнуто, то происходит переход к функции Scattering(), реализующей схему Метрополиса. Для сканирования области, перспективной на минимум, применяются функции Perturbation() и Small_Perturbation(). Новое решение принимается, если оно лучше предыдущего (абсорбция); если найденное решение хуже предыдущего, то происходит переход в отдаленную область пространства поиска (рассеяние), что позволяет преодолевать локальные минимумы. Эффективность описанного поиска глобального решения алгоритмом PCA может быть значительно повышена за счет одновременного использования большого числа частиц. Такой подход реализует алгоритм M-PCA, который непосредственно ориентирован на применение в среде параллельных вычислений. В отличие от алгоритма PCA, в разработанном позднее алгоритме M-PCA используются одновременно несколько частиц для сканирования пространства поиска. Наилучшее решение определяется с учетом данных о всех частицах, участвующих в процессе. Единственным задаваемым параметром для алгоритма M-PCA является число итераций. При этом общее число итераций должно быть разделено на число частиц, используемых в решении, что приводит к значительной экономии компьютерного времени.

Предложен подход к решению экстремальных задач для гидромеханических систем с использованием новых гибридных алгоритмов глобальной оптимизации. В последовательном гибридном алгоритме исследование пространства переменных модели проводится, как и в алгоритме PCA, стохастическим методом; при локальном поиске градиентная информация определяется для сглаживающих аппроксимаций не всюду дифференцируемых критериальных функций [3, 4]. Новый параллельный гибридный алгоритм объединяет стохастический алгоритм M-PCA, используемый при сканировании области поиска, и детерминированный метод кривой, заполняющей пространство, при локальном поиске. Выбор метода редукции размерности задачи, который предназначен собственно для поиска глобального экстремума, обусловлен тем, что во многих случаях градиентные алгоритмы сходятся медленно и, с другой стороны, при очень больших областях поиска метод редукции оказывается недостаточно эффективным. Гибридный алгоритм обеспечивает сужение области поиска, что повышает вычислительную эффективность метода. Для решения задачи липшицевой минимизации исходная многомерная задача редуцируется к эквивалентной одномерной с использованием кривой Пеано, построение которой проводится по схеме Гильберта. Кроме того, если исходная многомерная функция редуцируемой задачи удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой, то минимизируемая одномерная функция удовлетворяет на единичном интервале условию Гельдера. Следует отметить, что построенная численными методами кривая аппроксимирует теоретическую кривую Пеано – Гильберта с точностью, определяемой заданной плотностью развертки. Метод редукции многомерных задач обладает рядом важных свойств, таких как непрерывность и сохранение равномерной ограниченности разностей функций при ограниченной вариации аргумента. К недостаткам следует отнести потерю части информации о близости точек в исходном многомерном пространстве. Предложенный подход не требует вычисления производных критериальных функций по переменным модели, что позволяет расширить применение гибридного алгоритма на класс задач глобальной недифференцируемой оптимизации. Разработано программное обеспечение, реализующее гибридные алгоритмы, и получено решение задач, принятых в современной литературе в качестве стандартных эталонных тестов глобальной оптимизации. Установлена высокая вычислительная эффективность новых гибридных алгоритмов. Приведены результаты решения модельных задач идентификации по спектральным данным аномалий фазового состава теплоносителя в контуре реакторной установки с достаточной для приложений точностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (грант Президента РФ по поддержке научных исследований ведущих научных школ РФ № НШ-5271.2010.8).

Список литературы

1. Sacco W.F., de Oliveira C.R.E. A new stochastic optimization algorithm based on particle collisions // Proceedings of the 2005 ANS Annual Meeting. Transactions of the American Nuclear Society. 2005. Vol. 92. P. 657–659.

2. Luz E.F.P., Becceneri J.C., de Campos Velho H.F. A new multi-particle collision algorithm for optimization in a high performance environment // Journal of Computational Interdisciplinary Sciences. 2008. Vol. 1. P. 3–10.

3. Kinelev V.G., Shkapov P.M., Sulimov V.D. Application of global optimization to VVER-1000 reactor diagnostics // Progress in Nuclear Energy. 2003. Vol. 43, No. 1–4. P. 51–56.

4. Сулимов В.Д. Локальная сглаживающая аппроксимация в гибридном алгоритме оптимизации гидромеханических систем // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2010. №3. С. 3–14.

HYBRID ALGORITHMS FOR OPTIMIZATION OF DYNAMIC CHARACTERISTICS OF HYDROMECHANICAL SYSTEMS

V.D. Sulimov

Consideration is being given to problems of global optimization of main dynamic characteristics of hydromechanical systems. It is suggested that criterion functions are continuous, Lipschitzian, multiextremal and not everywhere differentiable. New hybrid algorithms are proposed with scanning a search space by use of modern stochastic algorithms on base of analogy with absorption and scattering processes for nuclear particles. The local search is implemented using a linearization method with smoothing approximations of criteria for the sequential algorithm or reduction of the problem dimension for the parallel one. Some results on solving model problems in identification of the coolant phase constitution anomalies in the reactor circuit with the use of spectral data are presented.

Keywords: hydromechanical system, dynamic characteristics, global optimization, criterion function, hybrid algorithm.

УДК 534.4

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИЛЬНО ЗАШУМЛЕННЫХ ПОДЗЕМНЫХ АНОМАЛИЙ

А.А. Суханов

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Alexeevich@post.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматривается задача раннего обнаружения и идентификации подземной детерминированной аномалии на фоне случайных колебаний земной или морской поверхности. Эти колебания могут носить как естественный характер в виде волнения морской поверхности над аномалией, так и искусственный в виде ответных колебаний земной поверхности при использовании сейсмической пушки во время геологической разведки. Для решения задач идентификации предлагаются оригинальные методы, подтвердившие высокую эффективность и надежность обнаружения слабых полезных сигналов на фоне широкополосных случайных помех.

Ключевые слова: сейсмические аномалии, случайные колебания, корреляционный анализ, обнаружение, фильтрация, идентификация.

Постановка задачи

Подземные детерминированные аномалии имеют различную природу возникновения и различные последствия своего проявления. В настоящей работе рассматривается сейсмическая природа аномалий, являющихся предвестником экологической катастрофы. Поэтому задача раннего обнаружения таких аномалий весьма актуальна.

Задача обнаружения подземной аномалии заключается в распознании ее в зоне проведения измерений уровня колебаний земной или морской поверхностей. Физика возникновения земных и морских волн различна. Однако проблемы выделения на их фоне полезного сигнала во многом схожи. Поэтому в дальнейшем для определенности будем рассматривать задачу идентификации подземной аномалии на фоне случайных морских волнений. Возможность подобной идентификации обусловлена наличием в случайном волновом профиле детерминированного характерного следа аномалии. Ширина и высота этого следа определяются глубиной и мощностью очага или источника возмущения земной коры. Распознание небольшого полезного сигнала на фоне широкополосного случайного волнения требует разработки нестандартных оригинальных методов исследования и соответствующего алгоритмического и программного обеспечения.

Поставленная задача в общем случае чрезвычайно сложна, главным образом, за счет ее естественной пространственной трехмерности с дополнительным развитием во времени. Поэтому на первом этапе рассмотрим статическую плоскую задачу обнаружения по «мгновенной» дискретной фотографии вертикального среза волновой поверхности. Задача распознавания заключается, в основном, в выявлении присутствия аномалии в зоне сканирования. При этом необходимо также установить ее горизонтальные координаты, диаметр (ширину) и высоту профиля, с помощью которых можно в дальнейшем определить мощность источника сейсмического возмущения.

Моделирование волновой поверхности

Для разработки алгоритмов распознавания, их оптимизации и тестирования, отладки соответствующего программного обеспечения необходима модель волновой поверхности, позволяющая генерировать различные случайные волновые поверхности, соответствующие заданной ветровой или иной нагрузке. На рис. 1 представлен процесс получения стационарного случайного процесса с заданной спектральной плотностью волнения.

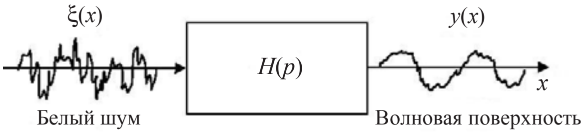


Рис. 1. Моделирование волновой поверхности

Для описания случайного морского волнения наиболее распространена модель Фирсова в модификации Рахманина, в соответствии с которой спектральная плотность в области низких частот отлична от нуля, что вносит дополнительные сложности обнаружения, обусловленные наличием длинных волн, сравнимых с размерами аномалии. Данный спектр от временной частоты имеет вид

$$S(\omega) = 4D\frac{\omega_0^2 n}{\omega_0^2 + n^2} \cdot \frac{\omega^2 + n^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4n^2\omega^2}, \quad (1)$$

где $D = \sigma^2 = 0.282(V/g)^5$ – дисперсия волн (м^2); $\omega_0 = g/V$ – основная круговая частота волн; $n = \xi\omega_0$ – размерный коэффициент затухания, определяющий ширину спектра; $\xi = 0.2$ – безразмерный коэффициент затухания; V – скорость ветра (и фазовая скорость волн на глубокой воде); $g = 9.81$ м/с^2 – ускорение свободного падения; ω – текущая круговая частота волны. По спектру (1) подбирается формирующая передаточная функция фильтра (см. рис. 1):

$$H(p) = 2\sigma\sqrt{\frac{\xi}{1+\xi^2}k_0} \cdot \frac{\sqrt{4+3\xi^2}\,p + \xi k_0}{p^2 + 4\xi k_0 p + k_0^2},$$

$$k_0 = g/V^2. \quad (2)$$

Детерминированный профиль подземной аномалии моделируется небольшим экспоненциальным бугорком с заданными длиной и высотой и добавляется к случайному сигналу сгенерированной морской поверхности. Типичный вид полученного зашумленного аномального следа высотой 10 мм и длиной 100 м на отметке 600 м на фоне метровых случайных волн представлен на рис. 2.

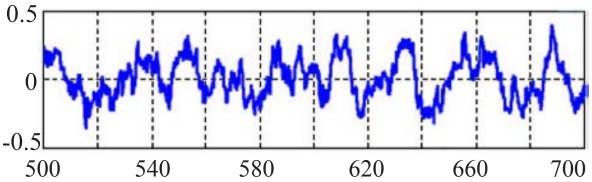


Рис. 2. Профиль волновой поверхности с подземной аномалией

Распознавание подземной аномалии

Задачами распознавания являются обнаружение аномалии, определение ее координат и параметров. Сложность задачи распознавания обусловила разработку нескольких методов, начиная от простейших и заканчивая достаточно сложными, различающихся по эффективности в десятки раз. Под точностью метода понимается минимальная высота профиля аномалии, при которой метод надежно идентифицирует ее и правильно определяет все ее параметры.

Из множества рассмотренных методов идентификации наиболее эффективным оказался модифицированный корреляционный анализ, суть которого заключается в корреляционном анализе результата несмещенной двухсторонней динамической фильтрации с шаблоном профиля аномалии, подверженного аналогичной процедуре двухсторонней фильтрации. Подобная согласованная фильтрация позволяет в наибольшей степени «зацепиться» за следы возникновения аномалии. На рис. 3 представлен результат такого оригинального подхода. Здесь наглядно просматривается распознанная аномалия со среза рис. 2 с достаточно точным определением ее характеристик.

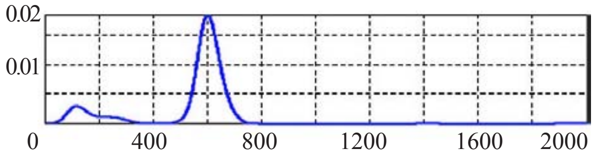


Рис. 3. Идентификация подземной аномалии и определение ее параметров

В заключение отметим, что разработанные методы идентификации могут служить основой дальнейших исследований по раннему обнаружению слабых источников сейсмического возмущения.

IDENTIFICATION OF VERY NOISY UNDERGROUND ANOMALIES

A.A. Sukhanov

The problem of early detection and identification of the underground deterministic anomaly overlapped by random disturbance of earth or water surface is addressed. In order to handle the problem we suggest some original approaches which demonstrated high efficiency and reliability of detecting weak useful signals in the field of broad band random noise.

Keywords: seismic anomalies, random vibration, correlation analysis, detecting, filtration, identification.

УДК 534.121+004.4

РАСЧЕТ ЧАСТОТ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В.Л. Тарасов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

vl-tarasov@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Для распараллеливания вычислений при расчете собственных частот оболочек вращения предлагается строить отдельные общие решения разрешающей системы дифференциальных уравнений на нескольких участках оболочки с последующей стыковкой решений для определения постоянных интегрирования. Задачи расчета собственных частот для различных волновых чисел независимы и распараллеливаются непосредственно. Реализация параллельных вычислений выполнена с использование библиотеки MPICH2. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: собственные частоты, волновые числа, оболочка вращения, распараллеливание вычислений, система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задачи расчета колебаний осесимметричных оболочечных конструкций в линейной постановке могут быть сведены к краевым задачам для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка путем разложения в ряд Фурье по окружной координате [1]:

$$y' = A(x, \lambda, m)y, \quad 0 \le x \le l. \tag{1}$$

Здесь y – вектор из 8 неизвестных, описывающих напряженно-деформированное состояние оболочки, штрих обозначает дифференцирование по меридиональной координате x; $A(x,\lambda,m)$ – квадратная матрица коэффициентов системы, λ – параметр, пропорциональный собственной частоте, m – число волн в окружном направлении в форме колебаний. В качестве основных неизвестных y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8 удобно выбрать величины, пропорциональные соответственно: сдвиговому усилию в срединной поверхности, меридиональному изгибающему моменту, меридиональному усилию, поперечному усилию, перемещению в окружном направлении, углу поворота нормали к срединной поверхности, перемещению в меридиональном направлении и нормальному перемещению точек срединной поверхности.

Граничные условия задаются на левом ($x = 0$) и правом ($x = l$) торцах оболочки:

$$H_L y(0) = 0, \quad H_R y(l) = 0. \tag{2}$$

Здесь H_L, H_R – матрицы коэффициентов граничных условий размером 4×8 на левом (L) и правом (R) торцах оболочки.

Алгоритм решения краевой задачи (1), (2) состоит в следующем. Строится набор из 4-х линейно независимых решений, удовлетворяющих системе (1) и граничным условиям слева. Составляется линейная комбинация с произвольными коэффициентами этих решений, в результате чего получается общее решение системы (1), удовлетворяющее краевым условиям слева. Это общее решение подставляется в краевые условия на правом конце, получается система уравнений для нахождения произвольных постоянных. В случае расчета собственных частот система для определения постоянных интегрирования будет однородной и будет иметь ненулевое решение при равенстве нулю определителя системы, значение которого зависит от параметра λ. Значения λ, обращающие в нуль этот определитель, дают значения собственных частот. Форма колебаний, соответствующая найденной собственной частоте, определяется с точностью до постоянного множителя. Для вычисления формы колебаний нужно выбрать некоторое ненулевое начальное условие, удовлетворяющее краевому условию на левом конце, и решить задачу Коши для системы (1) при найденном параметре собственной частоты λ. Выбор ненулевого начального условия всегда возможен, так как краевое условие на левом конце представляет систему 4-х уравнений относительно 8 неизвестных. Таким образом, численное решение краевой задачи (1), (2) сводится к многократному интегрированию системы дифференциальных уравнений (1) с различными начальными условиями. Для ускорения расчетов естественно применение современных программных и аппаратных средств распараллеливания вычислений.

Поскольку решением линейной краевой задачи (1), (2) является линейная комбинация с произвольными коэффициентами линейно независимых частных решений, то очевидной является идея строить параллельно эти частные решения. В случае с системой уравнений теории тонких оболочек такое распараллеливание оказывается невозможным, так как одни частные решения оказываются быстро растущими, а другие – быстро убывающими, в результате чего первоначально независимые решения оказываются фактически зависимыми, что не позволяет определить постоянные интегрирования. Для борьбы с этим явлением можно использовать метод ортогональной прогонки С.К. Годунова [2], состоящий в том, что система частных решений строится не по отдельности, а совместно и для преодоления «сплющивания» системы векторов решения проводится их ортонормирование через определеннее число шагов интегрирования. Таким образом, при реализации метода ортогональной прогонки невозможно распараллеливание для независимого построения частных решений.

Тем не менее, возможно распараллелить решение линейной краевой задачи (1), (2). Для этого можно начинать построение двух систем независимых решений методом ортогональной прогонки одновременно с обоих торцов оболочки навстречу друг другу, выбирая начальные условия, удовлетворяющие краевым условиям на левом и правом торце. Общие решения для левой и правой части оболочки содержат по 4 постоянные интегрирования. Из условия совпадения решений в точке стыковки решений получается система 8 алгебраических уравнений для нахождения 8 постоянных интегрирования. Построение левого и правого решения можно распределить на 2 процессора. Данный подход можно обобщить, разбивая оболочку на большее число участков интегрирования и используя соответствующее число процессоров. Недостатком такого подхода является увеличения порядка системы уравнений для определения постоянных интегрирования. Общие решения для концевых участков содержат по 4 постоянных интегрирования, для внутренних – по 8, таким образом, если участков интегрирования будет $n > 1$, то потребуется определить $8(n-1)$ постоянных интегрирования

При расчете собственных частот требуется каким-либо методом найти параметр частоты λ, обращающий в нуль упомянутый выше определитель, что требует многократного решения краевой задачи (1), (2) и многократной пересылки данных между процессорами, вследствие чего эффект от распараллеливания вычислений снижается. При расчете спектра собственных частот для нескольких значений волновых чисел в окружном направлении можно независимо вычислять собственные частоты для каждого волнового числа одновременно на нескольких процессорах.

Изложенный подход к распараллеливанию как отдельной краевой задачи, так и расчетов частот для различных волновых чисел, был реализован для конических оболочек с использованием библиотеки MPICH2 [3] и Visual Studio.

Были проведены численные эксперименты по расчету собственных частот усеченной конической оболочки с параметрами из [4]: торцы оболочки жестко защемлены, радиус большего основания равен 5 радиусам меньшего основания, угол образующей с большим основанием 60°, отношение толщины оболочки к радиусу большего основания 0.003, коэффициент Пуассона 0.3.

В численных экспериментах выполнялось распараллеливание при решении краевой задачи, распараллеливание при вычислении собственных частот для различных волновых чисел и совместное распараллеливание. Использовались компьютеры с одно- и двухъядерными процессорами, соединенные локальной сетью. В качестве примера полученных результатов в таблице приведено время в секундах расчета собственных частот для 6 волновых чисел при вычислениях с использованием двух процессоров. Видно, что при распараллеливании только по волновым числам сокращение времени составило 35%, а при дополнительном распараллеливании решения краевой задачи время расчетов сократилось на 41%.

При увеличение числа процессоров до 6 время расчета 6 частот сокращалось до 3 раз.

Таблица

Последовательный алгоритм	Распараллеливание по волновым числам	Распараллеливание по волновым числам и по решению краевой задачи
0.2265	0.1479	0.1334

Список литературы

1. Кармишин А.В. и др. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. М.: Машиностроение, 1975. 376 с.
2. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 171–174.
3. MPICH2 home page // http://phase.hpcc.jp/mirrors/mpi/mpich2/index.htm
4. Кольман Э.Р., Силкин В.Б. Свободные колебания конической оболочки при различных граничных условиях // Расчеты на прочность. 1968. Вып. 13. С. 251–273.

CALCULATION OF THE FREQUENCY OF SHELLS OF REVOLUTION USING PARALLEL COMPUTING

V.L. Tarasov

The parallel calculation of natural frequencies of shells of revolution to construct some general solutions of the resolving system of differential equations in several areas of the shell, followed by docking solutions for the determination of permanent integration is pro-posed. The problems of calculating the natural frequencies for different wave numbers are non-dependent and directly parallelized. The library of MPICH2 is used for the implementa-tion of parallel computation. The results of numerical experiments are presented.

Keywords: natural frequencies, wave numbers, parallel computing system of ordinary differential equations.

УДК 531.36:537.6:521.1

КОМПЛЕКС АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННЫХ ПРОГРАММ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

А.А. Тихонов, К.А. Антипов

Санкт-Петербургский госуниверситет

aatikhonov@rambler.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Описывается разработанный авторами комплекс программ, предназначенных для разностороннего анализа задач динамики вращательного движения ИСЗ в геофизических полях. Путем использования методов компьютерной алгебры решается задача построения максимально простой, но корректной математической модели, обеспечивающей заданную точность. Целостность комплекса, как завершенного программного продукта, предназначенного в первую очередь для анализа эффективности метода электродинамической стабилизации ИСЗ, сочетается с возможностью использования отдельных его модулей для решения широкого круга разнообразных локальных задач.

Ключевые слова: комплекс программ, динамика вращательного движения ИСЗ, геофизические поля.

Цели и задачи комплекса

В различных задачах теоретической механики, связанных с динамикой вращательного движения искусственного спутника Земли (ИСЗ) относительно центра масс, возникают однотипные проблемы, связанные с выбором той или иной приближенной математической модели, максимально простой, но вместе с тем корректной и обеспечивающей достаточную точность. К сожалению, не удается ограничиться простыми моделями, которые используются на этапе предварительного анализа задачи, а уточнение моделей не позволяет удержать задачу в рамках возможностей человека. Например, для учета влияния геофизических полей (гравитационного и магнитного) на динамику ИСЗ требуется знать вектор напряженности поля (а иногда и градиент напряженности) в функции радиуса-вектора точки околоземного пространства. Однако в действительности гравитационное и магнитное поля Земли имеют весьма сложное строение, так что указанная функциональная зависимость в аналитическом виде отсутствует. Отсюда вытекает необходимость математического моделирования геофизических полей в тех задачах, в которых требования точности не позволяют ограничиться хорошо известными простейшими приближениями (центральное ньютоновское гравитационное поле и дипольное магнитное поле). Разработанный комплекс программ направлен на решение указанных проблем путем использования возможностей компьютерной алгебры, реализованных в системе Maple, и дальнейшего использования построенных моделей для численного анализа.

Содержание комплекса

Впервые реализован алгоритм вывода мультипольного аналитического представления потенциала магнитного поля Земли (МПЗ) с произвольной степенью точности. Математическое обоснование данного метода дано в работе [1] и развито в работе [2]. Разработан алгоритм и создана программа для пакета Maple, реализующего символьные вычисления, позволяющие построить аналитические выражения компонент мультипольного тензора МПЗ произвольного ранга, выразив их элементы через известные гауссовы коэффициенты.

Составлена программа, позволяющая аналитически строить вектор индукции МПЗ в любом конечном приближении в соответствии с результатами, полученными в [1, 2].

Произведено разбиение околоземного пространства на области, в которых корректен учет конечного числа мультипольных составляющих вектора магнитной индукции МПЗ в зависимости от выбранных критериев точности. Это позволяет установить то необходимое и достаточное количество слагаемых в мультипольном разложении вектора индукции МПЗ, которое обеспечивает заданную точность нахождения этого вектора в любой точке орбиты ИСЗ с заданными параметрами радиуса и наклонения.

Составлена программа для вывода системы дифференциальных уравнений в параметрах Родрига–Гамильтона, описывающих вращательное движение ИСЗ.

Составлена программа для численного решения задачи Коши в проблеме электродинамической стабилизации ИСЗ, дальнейшего численного анализа этого решения и его визуализации. Кроме того, комплекс содержит ряд программных модулей, позволяющих автоматизировать процедуры: линеаризации дифференциальных уравнений, отыскания областей устойчивости решений дифференциальных уравнений в интересующих плоскостях параметров, оптимизации электродинамического управления [3].

Некоторые примеры практического использования комплекса

Проиллюстрируем некоторые результаты, которые можно получить с помощью разработанного комплекса программ.

Аналитически получены компоненты первых семи мультипольных тензоров МПЗ. Так, тензор седьмого ранга имеет $3^7 = 2187$ компонент, но, благодаря свойству симметричности по любой паре индексов различных из них только 36, для примера приведем лишь два:

$$M_{1111111}=\frac{\sqrt{7}}{224}(-35g_7^1+21\sqrt{3}g_7^3-7\sqrt{33}g_7^5+$$

$$+\sqrt{3003}g_7^7),\quad M_{2223333}=-\frac{\sqrt{21}}{14}(\sqrt{3}h_7^1+h_7^3).$$

На рис. 1 по горизонтальным осям отложены параметры орбиты – угол наклонения в градусах и отношение радиуса орбиты к радиусу Земли, по вертикальной оси – отношения средних по орбитальному движению значений норм мультипольных составляющих магнитной индукции $||\mathbf{B}^{(n)}||$ (выше дипольной) к первой $||\mathbf{B}^{(1)}||$ (дипольной) составляющей индукции МПЗ. Горизонтальные сечения полученных поверхностей позволяют однозначно определить необходимое и достаточное количество слагаемых в разложении вектора магнитной индукции МПЗ, обеспечивающее заданную точность (такое сечение показано на рис. 1 и соответствует точности 10%).

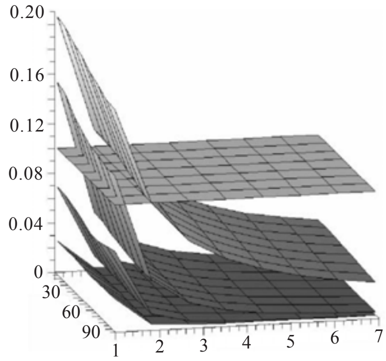


Рис. 1

На рис. 2 показан процесс угловой стабилизации ИСЗ, обеспечиваемый системой электродинамической стабилизации и рассчитанный с использованием разработанного комплекса программ.

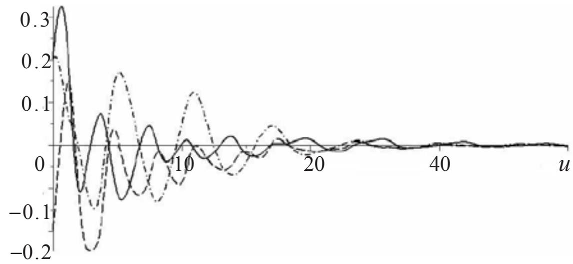


Рис. 2

Список литературы

1. Тихонов А.А., Петров К.Г. // Космические исследования. 2002. Т. 40, № 3. С. 219–229.

2. Tikhonov A.A., Antipov K.A. // Proceedings of XXXVIII Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics» APM'2010 Repino, Saint-Petersburg, Russia, 1-5 July 2010. P. 724–732.

3. Антипов К.А., Саблина М.В., Тихонов А.А. // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тез. докл. XI Междунар. конф. М., ИПУ РАН, 1–4 июня 2010 г. М.: ИПУ РАН, 2010. С. 22–23.

COMPLEX OF ANALYTIC AND NUMERICAL SOFTWARE FOR SOLVING SOME PROBLEMS OF THE SATELLITE ATTITUDE DYNAMICS

A.A. Tikhonov, K.A. Antipov

The report describes the software complex designed for comprehensive analysis of problems of the satellite attitude dynamics in geophysical fields. Using the computer algebra methods, the problem of constructing the simplest possible, but a correct mathematical model that ensures the prescribed accuracy is solved. Integrity of the complex as a complete software product, designed primarily to assess the effectiveness of the method of electrodynamic stabilization of satellites, combined with the possibility of using some of its modules to address a wide variety of local problems.

Keywords: software complex, satellite, attitude dynamics, geophysical fields.

УДК 517.977

ПОЗИЦИОНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОБРАТНОЙ ДИНАМИКИ

© 2011 г. ***Т.Б. Токманцев, Н.Н. Субботина***

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

tokmantsev@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматриваются математические модели управляемых динамических систем. Известна история замеров фазовой переменной на заданном отрезке времени и погрешность этих замеров. Решается задача о восстановлении траекторий, наилучшим образом соответствующих замерам. Обсуждаются конструкции позиционных управлений, решающих эту задачу, и их численные реализации. Приведены иллюстрирующие примеры.

Ключевые слова: задача оптимального управления, регуляризация, обратная связь, оптимальный синтез, траектория, замер, погрешность.

Постановка задачи

Рассматривается управляемая динамическая система вида

$$\dot{x} = f(t,x,u), \quad u \in P, \tag{1}$$

где $t \in [0,T]$ – время, $x \in R^n$ – фазовый вектор системы, управление u выбирается из заданного компакта $P \subset R^m$. Пусть задано компактное множество $G \subset R^n$ допустимых начальных состояний системы $x(t_0) = x_0$, $(t_0, x_0) = [0, T]\times G$. Известна история замеров $y(\cdot)$ траектории $x(\cdot)$ управляемой системы (1) на отрезке времени $[t_0, T]$. Известна погрешность ς этих замеров: $\|x(t) - y(t)\| < \varsigma$, $x \in [t_0, T]$. Требуется в течение интервала времени $[t_0, T]$ максимально точно отследить траекторию $y(t)$, выбирая начальную точку $x(t_0)$ из заданной области G. В качестве допустимых управлений $u(\cdot)$ рассмотрим множество всех измеримых функций $u(\cdot)$: $[t_0, T] \to P$, называемых программами. Символом $U(t_0, T)$ обозначается множество всех допустимых управлений.

Метод решения

Построим управление системой (1) так, чтобы в течение заданного интервала времени максимально точно отследить историю $y(\cdot)$ для любой начальной точки x_0 из заданной области G. Как известно, такой универсальный оптимальный закон управления является управлением по принципу обратной связи $u^0(t,x)$: $[t_0,T]\times R^n \to P$. Допускаются разрывные обратные связи (позиционные управления), которые формализуются в рамках подхода Н.Н. Красовского (см., например, [1]).

Введем в рассмотрение функционала качества

$$I(u(\cdot);\, t_0, x_0) = \\ = \int_{t_0}^{T}\left[\|x(\tau) - y(\tau)\|^2 + \varepsilon\frac{\|u(\tau)\|^2}{2}\right]d\tau \to \inf_{u\in U(t_0,T)}. \tag{2}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ – параметр регуляризации, $x(\cdot) = x(\cdot;\, t_0, x_0;\, u(\cdot))$ – траектория системы (1), стартующая из точки (t_0, x_0) под воздействием допустимого управления $u(\cdot)$.

Пусть $V(t,x)$ – функция цены задачи оптимального управления (1), (2), т.е.

$$(t,x) \to V(t,x) = \inf_{u(\cdot)\in U(t_0,T)} I(u(\cdot); t, x).$$

Рассмотрены два типа законов оптимального управления в задаче (1), (2): оптимальный синтез $u^0(t, x)$, построенный с помощью оптимального прицеливания вдоль суперградиентов функции цены задачи (1), (2), и стратегия экстремального прицеливания $u^e(t,x)$, реализующая метод оптимального прицеливания на историю $y(\cdot)$.

Предполагаем, что входные данные удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование и единственность минимаксного/вязкостного решения задачи Коши для уравнения Беллмана [2], совпадающего с функцией цены $V(t,x)$ задачи (1), (2), а также обеспечивают существование, единственность и продолжимость решений классической характеристической системы уравнения Беллмана. В работе [3] получена структура оптимального синтеза для задачи (1), (2) и разработан численный метод построения сеточного оптимального синтеза. Метод опирается на попятную процедуру интегрирования характеристической системы уравнения Беллмана и обобщает классический метод характеристик Коши. Получены оценки погрешности численного решения задачи (1), (2) с помощью оптимального синтеза и стратегии экстремального прицеливания.

Результаты численной реализации

Приведены примеры численного решения задач (1), (2) на плоскости. В частности, приведены результаты численного решения задачи о реконструкции управлений в макроэкономической модели по заданным статистическим данным [4]:

$$\frac{dp}{dt}=u_1(t)\frac{\partial G(p,q)}{\partial p}, \quad \frac{dq}{dt}=-u_2(t)\frac{\partial G(p,q)}{\partial p}, \qquad (3)$$

где символ p обозначает валовой продукт, q обозначает материальные затраты, $u_1(t)$, $u_2(t)$ можно рассматривать как управления. По экономическим причинам управления стеснены ограничениями: $u_1(t) \in U_1$, $u_2(t) \in U_2$, символы U_1, U_2 обозначают компакты. Функция $G(p, q) = h$ называется макроэкономическим потенциалом, h обозначает прибыль.

Имеются статистические данные, а именно, таблица значений p, q, h, измеренных в заданные моменты времени t_i на отрезке $[0, T]$. Статистические данные имеют вид:

$$(p^*(t_0),q^*(t_0),h^*(t_0)),\ (p^*(t_1),q^*(t_1),h^*(t_1)),\ldots,$$
$$(p^*(t_N),q^*(t_N),h^*(t_N)).$$

Предполагается, что функция $G(p, q)$ имеет вид полинома

$$G(p,q)=pq[a_0+a_1p+a_2q],$$

где коэффициенты a_0, a_1, a_2 постоянны.

Функционал качества в этом примере имеет вид

$$I(u_1(\cdot),u_2(\cdot);0,p_0,q_0)=\int_0^T\left[(p^*(t)-p(t))^2+\right.$$
$$\left.+(q^*(t)-q(t))^2+\varepsilon\frac{(u_1(t))^2+(u_2(t))^2}{2}\right]dt$$

и минимизируется на множестве

$U(0,T)=\{\forall u(\cdot)=(u_1(\cdot),u_2(\cdot)):[0,T]\mapsto U_1\times U_2-$ измеримы$\}$. Здесь $p^*(t)$, $q^*(t)$ – линейные интерполяции статистических данных, $\varepsilon>0$ – параметр регуляризации.

Приведены результаты численных экспериментов управления системой (3) с помощью сеточного оптимального синтеза и стратегии оптимального прицеливания.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН «Математическая теория управления», а также РФФИ (проект 08-01-00410) и программы Правительства РФ по поддержке ведущих научных школ (проект НШ-64508.2010.1).

Список литературы

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
3. Субботина Н.Н., Токманцев Т.Б. // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 11. С. 1651–1662.
4. Альбрехт Э.Г. // Электронный журнал «Исследовано в России». 2002. Т. 5. С. 47–53, http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/005.pdf.

FEEDBACKS TO INVERSE DYNAMIC PROBLEMS

T.B. Tokmantsev, N.N Subbotina

Mathematical models of controlled systems are considered. The history of measurements of phase variables on the given time interval and errors of the measurements are known. The inverse dynamic problem is solved to find trajectories closest to the given measurements. Optimal feedbacks solving auxiliary optimal control problems are obtained to construct the closest trajectories. Numerical realizations of the constructions are discussed. Illustrating examples are given.

Keywords: optimal control problem, regularization, feedback, optimal synthesis, trajectory, measurement, error.

УДК 629.576:532.5:539.3:519.673

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГИБКИХ ОГРАЖДЕНИЙ АМФИБИЙНЫХ СУДОВ НА ВОЗДУШНОЙ ПОДУШКЕ С УЧЕТОМ АЭРОГИДРОУПРУГИХ ЭФФЕКТОВ

А.В. Туманин, П.С. Кальясов

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

atumanin@gmail.com

Поступила в редакцию 16.05.2011

Представлены результаты математического моделирования гибких ограждений (ГО) баллонетного типа амфибийных судов на воздушной подушке (АСВП) с учетом аэрогидроупругих эффектов. Изложена методика расчетного определения формы, параметров сопротивления движению ГО баллонетного типа, применяемого в настоящее время на АСВП. Результаты расчетов, проведенных по разработанной методике, сопоставлены с результатами физических экспериментов.

Ключевые слова: амфибийное судно на воздушной подушке, гибкое ограждение, аэрогидродинамические нагрузки, деформированная поверхность, численное исследование.

Аэрогидроупругая задача ГО АСВП

Гибкое охлаждение (ГО) баллонетного типа амфибийных судов на воздушной подушке (АСВП) является, по существу, надувным скегом, состоящим из двух ярусов, соединенных между собой креплением типа ликпаз–ликтрос. Каждый ярус скега представляет собой оболочечную конструкцию, которая принимает под действием внутреннего давления цилиндрическую форму с конусообразными законцовками. Материал ГО – газонепроницаемая ткань на основе поливинилхорида (ПВХ) с добавкой полиуретана и армированная полиэстером. Материал является ортотропным, с укладкой нитей основы и утка под углом 90^o. Необходимые характеристики для использования в конечно-элементной модели определяются экспериментальным путем.

Скеги АСВП испытывают внешние аэродинамические нагрузки от воздушной подушки (ВП) и набегающего потока, а также динамические нагрузки, зависящие от вида опорной поверхности, по которой движется судно (например, водная поверхность, лед, бетон и т.д.). Кроме того, давление воздуха в ярусах скега при действии внешних нагрузок зависит от текущего объема яруса, причем эта зависимость более выражена с уменьшением начального давления воздуха в ярусе.

Форма яруса скега, как гибкой конструкции, зависит от действующих нагрузок, и, наоборот, действующие нагрузки зависят от формы гибкого скега. Поэтому задача определения формы ГО является задачей аэрогидроупругости.

Для численного решения задачи аэрогидроупругости применяется разделенный метод решения, при котором соотношения для деформируемого тела резрешаются в пакете вычислительной механики ANSYS Mechanical, а соотношения для жидкости – в пакете вычислительной гидрогазодинамики ANSYS-CFX. В алгоритме разделенного решения различные решатели вызываются последовательно для жидкости и твердого тела. Если решатели вызываются только однажды в течение временного шага, формируется последовательность слабосвязанных (явных, прямых) решений [1]. Ввод дополнительного цикла FSI итераций, в котором решение жидкости и твердого тела повторяется до сходимости по силам взаимодействия и перемещениям, приводит к сильно связанным (неявным) решениям [2].

Гидродинамическая часть задачи ставится в рамках модели вязкого турбулентного течения несжимаемой жидкости с границами раздела сред, в том числе при моделировании работы нагнетателей АСВП. В численной реализации определение мгновенного положения границы раздела сред осуществляется методом объемного слежения (VOF) [3]. В упругой части оболочка считается моментной, с конечными деформациями, рассчитываемыми по модели Рейснера. Масса воздуха, закачанного в ярусы скега, считается постоянной. Расчет внутреннего давления в нижнем и верхнем ярусах скега в деформированной конфигурации проводится по политропному закону на каждом временном шаге.

Результаты моделирования ГО АСВП

Задача определения формы и параметров гидродинамического сопротивления решается при заданной посадке судна, определяемой углом дифферента и погружением кормового ограждения относительно статического (невозмущенного) уровня воды, а также при различных начальных уровнях давления в нижнем ярусе скега и различных вариантах крепления скега к корпусу судна.

Результаты расчетов включают в себя изменение во времени распределений давлений в воздушной подушке АСВП, распределений внутренних усилий и смещений по конструкции скега, а также параметры гидродинамического сопротивления ГО. На рис. 1 представлены форма свободной поверхности раздела сред и смещения скега при движении АСВП по водной поверхности.

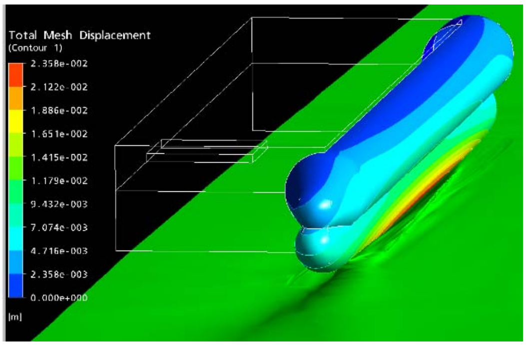


Рис. 1

Отработана экспериментальная методика определения формы надувного скега на режимах висения СВП над твердым экраном. Проведены физические эксперименты по определению деформированной формы надувного скега. Результаты сопоставления данных эксперимента и расчета по смещению характерных точек скега представлены на рис. 2.

Рис. 2

Выводы

Разработана расчетная методика по определению формы и несущих свойств ГО при действии внешних нагрузок, возникающих при движении АСВП на твердом экране и водной поверхности. По разработанной методике проведены вычислительные эксперименты определения деформированной формы скега. Сопоставление результатов вычислительных и физических экспериментов показывает, что разработанная расчетная методика в целом адекватно прогнозирует форму ГО баллонетного типа и может быть использована для определения формы ГО амфибийных АСВП баллонетного типа на начальных стадиях проектирования.

Список литературы

1. Farhat C., Lesoinne M., Maman N. Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problems: Three-field formulation, geometric conservation and distributed solution // Int. J. for Numerical Methods in Fluids. 1995. V. 21. P. 807–835.

2. Le Tallec P., Mouro J. Fluid structure interaction with large structural displacements // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2001. V. 190. P. 3039–3068.

3. Кальясов П.С., Любимов А.К., Шабаров В.В., Якимов А.К. Развитие и применение методов вычислительного эксперимента для исследования несущего комплекса амфибийных судов на воздушной подушке // Вестник ННГУ. 2009. №6. С. 142–151.

THE NUMERICAL SIMULATION OF ACV'S SKIRT INCLUDING AEROHY-DROELASTICITY EFFECTS

A.V. Tumanin, P.S. Kalyasov

The results of mathematically modeling balloon-type flexible skirts of amphibious air-cushion vehicles (ACV), taking into account aerohydroelasticity effects, are presented. A technique is presented for determining the estimated shape and parameters of the resistance of motion of the skirt currently in use onACV's. The results of the simulation using the developed technique are compared with the results of some physical experiments.

Keywords: amphibious air-cushion vehicle, flexible skirt, aerohydrodynamic loads, deformed surface, numerical simulation.

УДК 531

ПРОБЛЕМЫ ЛЕВИТАЦИИ ДИАМАГНИТНЫХ ТЕЛ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

Ю.М. Урман, Н.И. Лапин

Нижегородский государственный педагогический университет

lapinni@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Приводится методика расчета силовых характеристик, обеспечивающих левитацию диамагнитных тел различной природы и формы. Методика основана на вычислении энергии взаимодействия тела при смещении относительно центра подвеса с вывешивающим полем произвольной конфигурации. Находятся необходимые и достаточные условия консервативной устойчивости. Приводятся конкретные вычисления силовых характеристик подвеса диамагнитного тела.

Ключевые слова: левитация, математический аппарат неприводимых тензоров, диамагнетик.

Левитацией называется состояние, при котором твердое тело «парит» в силовом поле подвеса без механического контакта с окружающими телами.

При осуществлении неконтактного подвеса сила тяжести компенсируется силой, действующей со стороны подвеса на тело. При этом, кроме компенсации силы тяжести, необходимо, чтобы состояние равновесия было устойчивым. Скомпенсировать силу тяжести можно силами со стороны электромагнитных полей.

Браунбек [1] показал, что подвеска тела в стационарном электростатическом или магнитном полях не может быть стабильной, если относительная диэлектрическая постоянная ε или относительная магнитная проницаемость μ тела больше или равна единице. В природе не существуют тел, у которых диэлектрическая проницаемость меньше единицы. Диамагнитные вещества, открытые Майклом Фарадеем в 1846 году, обладают магнитной проницаемостью, близкой к единице. Поэтому для создания устойчивой левитации диамагнитных тел необходимо магнитное поле большой величины и определенной конфигурации. Уильям Томсон (Лорд Кельвин) [2] указал на возможность левитации диамагнитных тел, но высказал сомнение, что левитация никогда не станет возможной, так как существуют большие трудности создания достаточно сильного магнита и получения достаточно легкого диамагнитного вещества, потому что магнитные силы чрезмерно слабые. До начала девяностых годов XX века достичь значительных результатов по вывешиванию диамагнетиков не удавалось. Небольшие магнитные поля позволяли вывешивать незначительные по размерам и массе диамагнитные тела.

Последние технические достижения, связанные с изготовлением электромагнитов, создающих сильные магнитные поля ($B \sim 30$ Тл), вызвали во всем мире большой научный интерес к созданию подвесов, обеспечивающих левитацию различных диамагнитных тел. Появилась возможность вывешивать различные материалы, обладающие слабым диамагнетизмом, такие как дерево, пластик, вода, протеин, алмаз и многие другие подобные вещества, а также живых существ. Отличительная черта и преимущество диамагнитной левитации по сравнению с другими известными или возможными схемами, включая сверхпроводящую левитацию, есть то, что для однородного материала существуют магнитные поля с определенным профилем квадрата магнитной индукции, когда гравитация скомпенсирована фактически на уровне отдельных атомов и молекул. Это делает возможным симулирование состояния невесомости в очень хорошем приближении прямо на Земле, что позволит заменить дорогостоящие эксперименты в Космосе на более дешевые. По заказу NASA проведены опыты по левитации мышей [3]. Эти опыты позволяют моделировать как полную невесомость, так и слабую гравитацию на планете Марс ($0.38g$), на Луне ($0.16g$) или на спутнике Юпитера Европе ($0.13g$) и способны помочь в исследованиях по противодействию негативным эффектам снижения тяжести, какие ожидаются в дальних космических полетах и на поверхности других планет.

Для вычисления магнитной энергии потенциал внешнего магнитного поля в окрестности центра подвеса представляется в виде ряда по шаровым функциям. Так как шаровая функция и коэффициент разложения внешнего поля представляют собой неприводимые тензоры, то этот ряд можно выразить в виде суммы скалярных произведений шаровых функций и коэффициентов поля различных индексов. Такое представление внешнего поля позволяет получить общий вид потенциальной энергии произвольного по форме тела в произвольном магнитном поле и изучить влияние формы вывешиваемого тела на величину области устойчивости и перегрузочную способность подвеса. В таком виде запись потенциальной энергии имеет ряд достоинств: она не связана с конкретным типом физического взаимодействия, обладает свойством инвариантности, позволяет рассматривать довольно сложные типы взаимодействия, находить явную зависимость силовой функции от обобщенных координат, характеризующих положение твердого тела относительно геометрии магнитного поля, определяемого его источниками, использовать симметрию как тела, так и силового поля. Инвариантное разложение энергии позволяет исследовать сложные процессы взаимодействия ротора с полем подвеса, как взаимодействие мультиполей разных порядков. Такое представление энергии в значительной степени упрощает задачу, так как сразу удается получить зависимость силовых характеристик подвеса от смещения и от углов поворота.

Сейчас на установках, создающих большие поля, а таких установок во всем мире всего четыре и, к сожалению, в России нет ни одной, проводятся эксперименты по магнитной левитации. Уже выполнены некоторые научные эксперименты, такие как левитация жидкого гелия, динамика капелек жидкости, левитация лягушек, мышей и некоторых других живых объектов, динамика гранулированных материалов и их хаотическое поведение, выращивание кристаллов и плавка стекла. Эти эксперименты предполагают, что будут созданы технологии для синтеза новых материалов, а также материалов, обладающих очень сильными диамагнитными свойствами, у которых диамагнитная восприимчивость порядка $\chi = -0.5$ (μ достигает 0.5) в относительно широком интервале частот. В некотором смысле они похожи на эксперименты в космических лабораториях, но магнитная левитация на Земле значительно дешевле, чем полет в космосе.

Проводимые эксперименты обозначили ряд задач, которые требуют разрешения:

1. Нахождение оптимальной конфигурации магнитного поля, обеспечивающего максимальную область устойчивости диамагнитного тела в подвесе.
2. Определение необходимых условий устойчивости удержания тела в поле подвеса, его перегрузочной способности, возможности симуляции невесомости.
3. Разработка методов расчета силовых характеристик подвеса, обеспечивающих левитацию тел различной природы и формы.
4. Исследование различных типов эволюционных движений тела в подвесе при учете взаимодействия поля подвеса с телом ротора, что позволит создать теоретическую базу для применения диамагнитного подвеса при разработке новых приборов в науке и технике.

Список литературы

1. Braunbeck // Ztschr. f. Physikik. 1939. Bd 112. H. 7, 8. S. 753–763.
2. Thomson W. (Lord Kelvin) Reprints of papers on electrostatics and magnetism. London: MacMillan, 1872.
3. Yuanming L. et al. // Advances in Space Research. 2010. V 45. P. 208–213.
4. Урман Ю.М., Бугрова Н.А., Лапин Н.И. // ЖТФ. 2010. Т. 80, № 9. С. 25–33.

PROBLEMS OF LEVITATION OF DIAMAGNETIC BODIES AND ITS APPLICATION

Yu.M. Urman, N.I. Lapin

The method for analyzing force and moment characteristics of magnetic suspension providing levitation of diamagnetic bodies of various nature and shape is theoretically developed. This method is based on calculating the interaction energy of a body with the supporting field of arbitrary configuration as a function of the body displacements with respect to the center of the suspension. Necessary and sufficient conditions for conservative stability of the equilibrium state were found, and the stability region for arbitrarily shaped diamagnetic bodies was determined. Practical analyses of power characteristics of the suspension of diamagnetic bodies are presented.

Keywords: levitation, mathematical apparatus of irreducible tensors, diamagnetic.

УДК 62-50,531.38

МОБИЛЬНЫЙ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС С ЧЕТЫРЬМЯ ПОВОРОТНЫМИ КОЛЕСАМИ

А.М. Формальский, В.С. Ибрагимов, И.Е. Митрофанов, Е.В. Письменная

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

formal@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматривается мобильный робототехнический комплекс, разрабатываемый в НИИ механики МГУ с целью транспортировки предназначенного для лучевой терапии ускорителя электронов и придания ему нужной ориентации. Комплекс содержит платформу на четырех колесах и смонтированный на ней манипулятор [1]. Каждое из колес размещено в вилке, которая может поворачиваться относительно платформы вокруг перпендикулярной ей (вертикальной) оси. Колесо может вращаться вокруг своей горизонтальной оси обычным образом. Тем самым, каждое колесо, будучи одновременно и ведущим, и рулевым, управляется двумя приводами. Манипулятор имеет относительно платформы четыре степени свободы.

Платформа на поворотных колесах может совершать движение без проскальзывания колес тогда и только тогда, когда ориентации вилок и угловые скорости колес удовлетворяют определенным соотношениям. Подобным соотношениям должны удовлетворять, прежде всего, программные значения углов поворота вилок и угловых скоростей колес, которые необходимо вычислять для автоматического управления движением платформы или для управления ею при помощи оператора.

Представлены уравнения движения платформы с учетом неголономных связей. Построена система полунатурного моделирования процесса управления движением платформы. В эту систему входит человек-оператор, который при помощи трехкомпонентного джойстика дает «целеуказания» системе автоматического управления, задавая скорость движения центра платформы и ее угловую скорость. На компьютере вычисляются программные значения углов поворота вилок и угловых скоростей колес и следящие системы «отрабатывают» эти значения. Интегрирование уравнений движения платформы происходит в процессе супервизорного (с оператором) управления. На экране монитора изображается платформа и смонтированный на ней манипулятор. Выполнена визуализация движения робототехнического комплекса. Оператор, глядя на экран монитора, оценивает точность выполнения платформой задаваемой им программы движения.

Управление манипулятором осуществляется также в супервизорном режиме.

Ключевые слова: платформа, поворотное колесо, манипулятор, джойстик, супервизорное управление, неголономная связь, виртуальная модель.

Рассмотрен мобильный робототехнический комплекс, разрабатываемый в НИИ механики МГУ с целью транспортировки предназначенного для интраоперационной лучевой терапии ускорителя электронов и придания ему нужной ориентации. Комплекс содержит платформу на четырех колесах, расположенных в вершинах прямоугольника, и смонтированный на ней манипулятор [1]. Каждое из колес размещено в вилке, которая может поворачиваться (при помощи своего двигателя) относительно платформы вокруг перпендикулярной ей (вертикальной) оси. Колесо может вращаться вокруг своей горизонтальной оси обычным образом при помощи маршевого двигателя. Тем самым, каждое колесо, будучи одновременно и ведущим, и рулевым, управляется двумя приводами. Каждое колесо со своей поворотной вилкой и двумя двигателями образует «колесный блок». Движение всей платформы осуществляется при помощи восьми приводов, в то время как число ее степеней свободы равно трем. Другими словами, число управляющих приводов является избыточным. Манипулятор, смонтированный на платформе, имеет относительно нее четыре степени свободы.

Аппарат с поворотными колесами обладает большими возможностями, нежели аппарат с жестко закрепленными в корпусе платформы вилками. Дело в том, что движение центра платформы и ее угловое движение при наличии поворотных колес оказываются «развязанными», т.е. они могут осуществляться независимо: платформа может двигаться в любом направлении, произвольным образом меняя свою ориентацию. Подобными свойствами обладает также мобильная платформа на «роликонесущих» колесах.

Платформа на поворотных колесах может совершать движение без проскальзывания колес тогда и только тогда, когда ориентации вилок и угловые скорости колес удовлетворяют определенным кинематическим соотношениям. Это относится к платформам как на трех, так и на большем количестве поворотных колес. Одно из условий состоит в том, что прямые, перпендикулярные плоскостям колес и проходящие через их центры, должны пересекаться в одной точке – мгновенном центре скоростей платформы. Подобным соотношениям должны удовлетворять, прежде всего, программные значения углов поворота вилок и угловых скоростей колес, которые задаются оператором или автономной системой автоматического управления. Эти соотношения приведены в докладе. Для угла поворота вилки первого колеса β_1 и его угловой скорости ω_1, например, имеют место следующие соотношения:

$$\mathrm{tg}\beta_1 = \frac{V_y + \Omega b}{V_x + \Omega c},$$

$$\omega_1 = \frac{1}{r}[(V_x + \Omega c)\cos\beta_1 + (V_y + \Omega b)\sin\beta_1].$$

Здесь V_x, V_y – проекции скорости центра платформы на оси связанной с ней системы координат, Ω – угловая скорость платформы, b и c – половины сторон прямоугольника, в вершинах которого установлены колеса, r – радиус колеса. Подобные соотношения имеют место и для остальных трех колес. Для реализации движения платформы с желаемыми значениями компонент скорости V_x, V_y, Ω вилки колес нужно развернуть на вычисляемые по этим формулам углы и придать колесам вычисляемые по этим формулам скорости.

Приведены уравнения движения платформы с учетом наложенных на ее движение неголономных связей. Построена система полунатурного моделирования процесса управления движением платформы. В эту систему входит человек-оператор, который при помощи трехкомпонентного джойстика дает «целеуказания» системе автоматического управления, задавая скорость движения центра платформы и ее угловую скорость. (В дальнейшем предполагается использовать, вместо джойстика, датчик усилий.) Каждая из степеней свободы джойстика «подпружинена», так что оператор, отклоняя рукоятку джойстика от нейтрального положения, испытывает сопротивление. Когда оператор снимает руку с джойстика, он возвращается в нейтральное положение. Величины задаваемых оператором компонент скорости платформы пропорциональны углам отклонения джойстика от нейтрального положения. На основе задаваемых оператором компонент скорости платформы с помощью указанных выше соотношений на компьютере вычисляются программные значения углов поворота вилок и угловых скоростей колес.

В системе моделируются следящие системы, которые «отрабатывают» задаваемые значения углов поворота вилок колес и следящие системы, отрабатывающие задаваемые значения угловых скоростей колес. Интегрирование уравнений движения платформы происходит в процессе супервизорного (с оператором) управления ею. При этом на экране монитора изображается платформа и смонтированный на ней манипулятор. Оператор видит перемещения платформы. Визуализация движения робототехнического комплекса выполнена в графической среде «OpenGL». Оператор, глядя на экран монитора, визуально оценивает точность выполнения платформой задаваемой им программы движения и корректирует программу в случае необходимости. Таким образом, обратная связь в супервизорной системе управления осуществляется оператором визуально.

Управление манипулятором осуществляется также в супервизорном режиме. Оператор видит на экране дисплея результаты своего управления манипулятором и при необходимости корректирует его положение. Управление платформой и манипулятором может осуществляться независимо. Однако если требуется изменить ориентацию ускорителя без изменения «целевой» точки, куда наводится пучок электронов, то может возникнуть необходимость одновременного движения платформы и манипулятора и, тем самым, совместного управления манипулятором и платформой. Совместные перемещения платформы и манипулятора подчиняются определенным соотношениям.

Уравнения движения платформы составлены методом Лагранжа второго рода. При этом в рассмотрение вводятся силы реакции опоры, приложенные к колесам в точках их контакта с опорной поверхностью. Эти силы должны быть определены в процессе решения уравнений движения. Однако все четыре компоненты сил, перпендикулярные плоскостям колес, определены быть не могут вследствие статической неопределимости системы. Могут быть найдены только две некоторые их линейные комбинации.

Чем медленнее изменяются задаваемые оператором программные значения скорости платформы (компоненты скорости ее центра, ее угловая скорость), тем, естественно, медленнее изменяются программные значения углов поворота вилок колес и их угловых скоростей. Моделирование показывает, что при «достаточно» медленном изменении программных значений «достаточно» точно реализуются связи, наложенные на систему.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 09-01-00593-а, 10-07-00691-а).

Список литературы

1. Мартыненко Ю.Г., Митрофанов И.Е., Письменная Е.В., Формальский А.М. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2011. № 2.

A MOBILE ROBOTIC DEVICE ON FOUR SWIVEL WHEELS

A.M. Formalskii, V.S. Ibragimov, I.E. Mitrofanov, E.V. Pismennaya

A mobile wheeled robotic device is considered. The device has been developed in MSU Institute of mechanics for the purpose of transporting and orienting an electron accelerator for beam therapy. The device is composed of a horizontal platform with four wheels and a manipulator. Each wheel is mounted in a fork capable of rotating around its vertical axis relative to the platform and can at the same time rotate around its horizontal axis in a regular way. Each wheel is a driving and steering wheel at the same time; it is activated by two independent motors. The manipulator has four degrees of freedom relative to the platform.

The platform with steering wheels can move without wheel slipping only in case when the fork orientation and wheel angular velocities comply with certain conditions. These conditions are in the first place obligatory for the program values of fork rotation angles and wheel angular velocities that must be computed for automatic control of the platform motion or for its manual control by an operator.

The report presents equations of platform motion that involve non-holonomic constraints. A semi-natural modeling system for the process of motion control of this device has been developed. The system includes a human operator, who controls the automatics of the device by means of a 3-DOF joystick. The control process involves setting a desired velocity of the center point of the platform and its angular velocity. The controlling computer calculates the program values of fork rotation angles and wheel speeds. Target calculated values are implemented by means of servo systems. The integration of the motion equations of the device is done during supervisor-controlled (with a human operator) motion of the device. A virtual platform and its manipulator are shown on a PC monitor, implementing visualization of this robotic device. Thus the operator can visually evaluate the accuracy of performing the desired motion.

Control of the manipulator is also done in a supervisor-based mode.

Keywords: platform, swivel wheel, manipulator, joystick, supervisory control, non-holonomic constraint, virtual model.

УДК 677.052.3

РАЗРАБОТКА И ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ БЫСТРОХОДНОГО РОТОРНОГО УЗЛА

А.С. Чахалян

Гюмрийский филиал Государственного инженерного университета Армении

Chaxalyan84@list.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается динамика быстроходного ротора, установленного на комбинированные опоры: упругий поворотный шарнир с одного конца и дисковая опора в промежуточной части ротора с упругой подвеской. Составлены динамическая модель, уравнения движения системы и исследовано влияние упруго-геометрических параметров на условия вращения ротора. Предложенный алгоритм и программа расчета применены для решения задач минимизации динамических нагрузок в опорах и амплитуды колебаний ротора.

Ключевые слова: опора, жесткость, собственные частоты, роторный узел, амплитуда колебаний.

Исследования проводились для роторного узла новой конструкции [1]. Ротор моделирован, как жесткий вал с диском, имеющим массу m, с осевым и экваториальным моментами инерции J_C и A_C соответственно. Ротор одним концом установлен в шарнирную опору, имеющую поворотную жесткость c_φ и коэффициент затухания ξ_φ, а в промежуточной части установлен в опоре с линейной характеристикой, жесткостью c_1, коэффициентом затухания ξ_1. Эта опора, в свою очередь, установлена в упругой подвеске с массой m_3, жесткостью c_2, коэффициентом затухания ξ_2 (рис. 1).

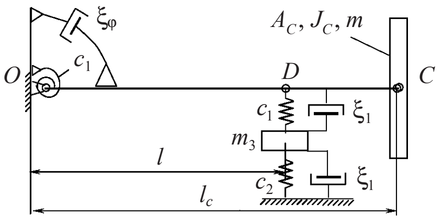


Рис. 1. Расчетная схема

Система дифференциальных уравнений движения роторной системы получена с помощью уравнений Лагранжа второго рода и имеет вид:

$$(ml_c^2 + A_C)\ddot{x} + (\xi_1 l^2 + \xi_\varphi)\dot{x} - \xi_1 l^2 \dot{x}_1 + J_C \omega \dot{z} + \\ + c_1 l^2 (x - x_1) + c_\varphi x = m l_C l e \omega^2 \cos\omega t + \\ + (A_C - J_C) l \omega^2 \delta \cos(\omega t - \varepsilon),$$

$$(ml_c^2 + A_C)\ddot{z} + (\xi_1 l^2 + \xi_\varphi)\dot{z} - \xi_1 l^2 \dot{z}_1 - J_C \omega \dot{x} + \\ + c_1 l^2 (z - z_1) + c_\varphi z = m l_C l e \omega^2 \sin\omega t + \\ + (A_C - J_C) l \omega^2 \delta \sin(\omega t - \varepsilon),$$

$$m_3 \ddot{x}_1 + (\xi_1 + \xi_2)\dot{x}_1 - \xi_1 \dot{x}_1 + (c_1 + c_2) x_1 - c_1 x = 0,$$

$$m_3 \ddot{z}_1 + (\xi_1 + \xi_2)\dot{z}_1 - \xi_1 \dot{z}_1 + (c_1 + c_2) z_1 - c_1 z = 0. \quad (1)$$

Система уравнений решена в программной среде MathCAD с помощью численного метода Рунге – Кутта с фиксированным шагом [2].

Полученный алгоритм и программа расчета позволяют оперативно оценивать изменения критической скорости и амплитуд колебания в зависимости от основных параметров системы.

На рис. 2 приведены графики изменения абсолютной величины амплитуды колебаний ротора (x) и упруго-подвешенной подвески (x_1), а также изменение относительного перемещения ротора и подвески (f).

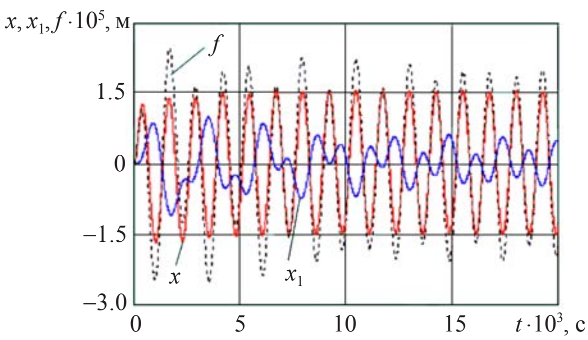


Рис. 2. Амплитуда колебаний ротора и подвески

Последняя разница – характерный показатель для оценки величины динамически составляющей нагрузки в дисковой опоре. Результаты получены при следующих исходных значениях параметров системы: жесткость дисковой опоры и подвески $c_1 = 10^6$ Н/м и $c_2 = 10^4$ Н/м соответственно, поворотная жесткость шарнира $c_\varphi = 2\cdot10^3$ Н·м/рад, коэффициенты затухания упругих элементов опор $\xi_1 = \xi_2 = 10$ Н·с/м и шарнирной опоры $\xi_\varphi = 10$ Н·м/с$^{-1}$. Частота вращения ротора $\omega = 5000$ с$^{-1}$.

Варьирование значениями коэффициентов затухания показывает, что изменение ξ_1 и ξ_2 незначительно влияет на поведение системы. В то же время выбор значения коэффициента ξ_φ очень существенен. При увеличении ξ_φ от 10 Н·м/с$^{-1}$ до 20 Н·м/с$^{-1}$ максимальные значения параметров x, x_1 и f снижаются почти в два раза (табл. 1).

Таблица 1

	ξ_φ, Н·м/с$^{-1}$	Максимальное значение колебаний, м		
		x	x_1	f
1	10	$1.5\cdot10^{-5}$	$9.7\cdot10^{-6}$	$2.2\cdot10^{-5}$
2	20	$7.2\cdot10^{-6}$	$4.7\cdot10^{-6}$	$1.2\cdot10^{-5}$

На рис. 3 показано поведение системы при разных частотах вращения: *а*) для $c_1 = 5\cdot10^6$ Н/м, $\omega = 1000$ с$^{-1}$; *б*) для $c_1 = 5\cdot10^6$ Н/м, $\omega = 2000$ с$^{-1}$; *в*) для $c_1 = 10^7$ Н/м, $\omega = 3000$ с$^{-1}$.

режиме динамического разгружателя. Однако отметим, что динамическое разгружение опоры произойдет только на определенной частоте вращения ротора. Изучение системы показало, что реально и эффективно этим процессом можно управлять с помощью жесткости дисковой опоры.

Из графиков видно, что при вращении ротора с частотой $\omega = 1000$ с$^{-1}$, когда жесткость $c_1 = 5\cdot10^6$ Н/м, дисковая опора практически полностью разгружена. (рис. 3*а*).

При увеличении частоты вращения до $\omega = 2000$ с$^{-1}$ отношение $f/x = 0.2$ (опора разгружается на 80% (рис. 3*б*)), при частоте вращения $\omega = 3000$ с$^{-1}$ отношение $f/x = 0.5$, эффективность разгружения снижается. Но достаточно увеличить жесткость опоры до $c_1 = 1\cdot10^7$ Н/м и f/x снижается до уровня 0.2 (рис. 3*в*).

Предложенный роторный узел можно весьма эффективно эксплуатировать при высоких частотах вращения ротора, если при этом целенаправленно подобрать основные характеристики

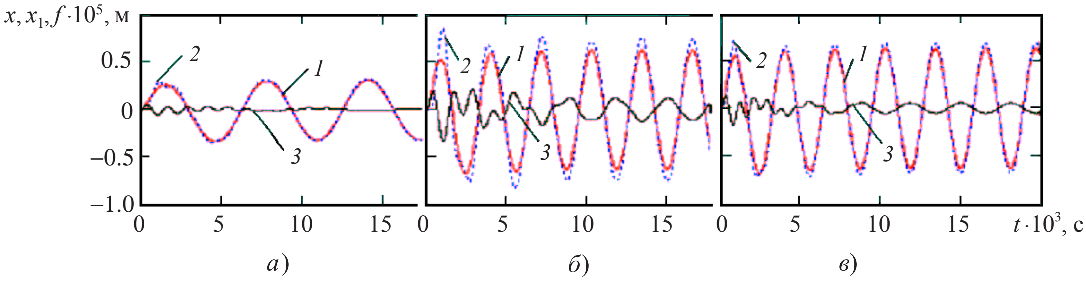


Рис. 3. Графики абсолютных амплитуд колебаний ротора x (кривая *1*), и подвески x_1 (кривая *2*) и относительной амплитуды колебаний опорных дисков f (кривая *3*)

Анализ этих результатов показывает, что при низких частотах вращения ротора доминантными являются колебания подвески. При увеличении частоты вращения ротора наблюдается относительное уменьшение амплитуд колебаний подвески, но при этом доминантным становятся колебания ротора. Этот эффект позволяет предположить, что можно подобрать такие параметры системы, при которых амплитуды колебания этих двух элементов были бы равны и находились в одной фазе. Тогда упругая подвеска дисковой опоры будет работать в жесткости и затухания упругих опор и подвесок.

Самыми эффективными параметрами для управления процессом разгружения наиболее проблемной дисковой опоры узла являются жесткости дисковой и шарнирной опор и диссипативный элемент в шарнирной опоре ротора.

Список литературы

1. А.с. №1840 А2. Опорный узел ротора / Папоян А., Чахалян А. Опубликовано 15.09.2006.

2. Кирянов Д.В. Самоучитель Mathcad 11. СПб.: БХВ–Петербург, 2004. 560 с.

DEVELOPMENT AND OPTIMIZATION OF THE PARAMETERS OF A HIGH-SPEED ROTARY UNIT

A.S. Chakhalyan

The dynamics of a high-speed rotor, mounted on combined supports, is considered: an elastic rotation hinge on one end and a disk support in the intermediate part of the rotor with a spring suspension. A dynamic model and the equations of the system are constructed; the effect of the elastic-geometric parameters on the conditions of rotation of the rotor is investigated. The proposed algorithm and the calculation program are used for the solution of the optimization problems of the minimization of dynamic loads in the supports and the amplitude of the rotor fluctuation.

Keywords: support, rigidity, natural frequencies, rotor unit, amplitude of vibration.

УДК 62-985

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ РОБОТА СО СКОЛЬЗЯЩИМ УПЛОТНЕНИЕМ

В.Г. Чащухин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

ketlk@pisem.net

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассмотрена механическая модель робота вертикального перемещения со скользящим уплотнением. Прижимающая робота к поверхности сила обусловлена наличием камеры разрежения под корпусом робота. Получены условия, ограничивающие эту силу снизу, а также условия непроскальзывания ведущих колес робота и неопрокидывания корпуса робота.

Ключевые слова: робот вертикального перемещения, скользящее уплотнение.

Механика движения робота

Механическая система робота состоит из корпуса в виде перевернутой тарелки; блока воздушного насоса; блока двигателей, включающего два мотора постоянного тока и два колеса; скользящего уплотнения, находящегося на нижней поверхности корпуса, и камеры разряжения, находящейся во внутренней полости корпуса. Воздушный насос создает требуемое пониженное давление в камере разряжения. Разность давлений ΔP между атмосферным P_0 и давлением в камере P_1, $\Delta P = P_0 - P_1$. Рассмотрим силы и моменты, действующие на механическую систему робота (рис. 1).

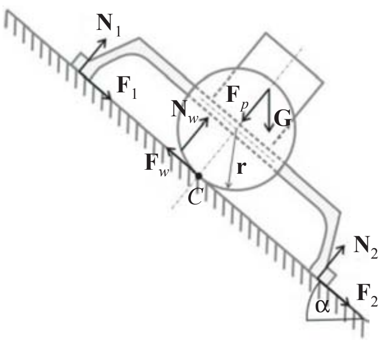


Рис. 1

На систему действуют следующие силы и моменты: G – вес робота, приложенный к центру масс, N_w – нормальная реакция опоры, приложенная к каждому из колес, F_w – сила трения колеса о поверхность (тяговое усилие). Коэффициент трения качения колеса f_r, r – радиус колеса, d_2 и d_1 – внешний и внутренний диаметры скользящего уплотнения (рис. 2), h – расстояние от центра масс робота до поверхности, F_p – сила прижима, обусловленная действием воздушного насоса, силы реакции поверхности, действующие на скользящее уплотнение F_1, F_2, N_1, N_2. Если давление в камере разряжения p_1, то $F_p = (p_1 - p_0)\pi d_1^2/4 = \Delta p \pi d_1^2/4$, где p_0 – атмосферное давление.

Предположим, что распределение давления на скользящее уплотнение описывается функцией $p_s(\varphi)$, где φ – угол отсчитываемый от оси левого колеса и лежащий в плоскости кольца уплотнения (см. рис. 2).

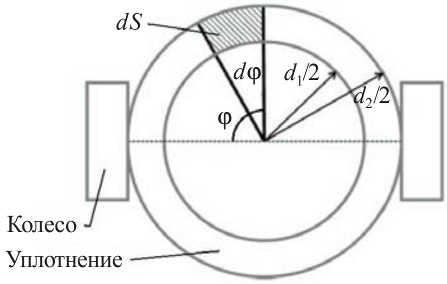


Рис. 2

Реакция поверхности, действующая на элемент площади dS есть $p_s(\varphi)dS$. Пусть $n_s(\varphi)$ проекция $p_s(\varphi)$ на плоскость, перпендикулярную поверхности по которой движется робот, а $f_s(\varphi)$ проекция $p_s(\varphi)$ на плоскость поверхности. Сила нормальной реакции опоры, действующая на уплотнение

$$N_1 = \frac{d_2^2 - d_1^2}{8}\int_0^{\pi} n_s(\varphi)d\varphi, \quad N_2 = \frac{d_2^2 - d_1^2}{8}\int_{\pi}^{2\pi} n_s(\varphi)d\varphi.$$

Сила трения, действующая на уплотнение,

$$F_1 = \frac{d_2^2 - d_1^2}{8}\int_0^{\pi} f_s(\varphi)d\varphi, \quad F_2 = \frac{d_2^2 - d_1^2}{8}\int_{\pi}^{2\pi} f_s(\varphi)d\varphi.$$

Условия сцепления робота с поверхностью

Положим массу робота равной m; x, y – координаты его центра масс. Абсциссу системы координат направим вдоль направления движения робота, а ординату перпендикулярно к поверхности движения. Предположим, что робот движется равномерно вдоль стены. Силы трения будем считать кулоновыми, т.е. $F_w \le \mu_w N_w$, где μ_w – коэффициент трения материала колеса. Уплотнение скользит во время движения робота, поэтому $F_1 = fN_1$, $F_2 = fN_2$, (f – коэффициент трения материала уплотнения).

Из уравнений равновесия получены следующие условия, накладываемые на тяговое усилие

$$F_w \ge \frac{f_r \mu}{R_2 + f_r} F_p + \left(\frac{f_r \mu}{R_2 + f_r} \cos\alpha + \frac{f_r + h\mu + R_2}{R_2 + f_r} \sin\alpha \right) G,$$

$$F_w \ge -\frac{f_r \mu}{R_1 - f_r} F_p - \left(\frac{f_r \mu}{R_1 - f_r} \cos\alpha + \frac{f_r + h\mu - R_1}{R_1 + f_r} \sin\alpha \right) G,$$

$$F_w \le \mu F_p + (\mu\cos\alpha + \sin\alpha) G,$$

$$F_w \le \frac{1}{2}\mu_w F_p + \frac{1}{2}(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) G. \qquad (1)$$

Первое неравенство обеспечивает выполнение условия $N_1 \ge 0$, т.е. предотвращение отрыва передней части корпуса. Второе неравенство обеспечивает условие $N_2 \ge 0$, т.е. предотвращение отрыва задней части корпуса. Третье неравенство гарантирует сцепление колеса с поверхностью, т.е. $N_w \ge 0$.

Четвертое неравенство гарантирует отсутствие проскальзывания колеса $F_w \le \mu_w N_w$. На рис. 3, отражающем ограничения для тягового усилия, отнесенного к весу, в зависимости от α (цифры соответствуют правым частям неравенств системы (1)), штриховкой отмечена область возможных решений системы (1) при следующих параметрах $F_p = 3G$, $R_2 = 1.1R_1$, $h = 0.5R_1$, $f_r = 0.1R_1$, $\mu_w = 0.6$, $\mu = 0.3$. Если $F_w \le 0$, то двигатель должен работать в режиме торможения (закрашенная область).

Если $F_w \ge 0$, то двигатели должны работать в режиме продвижения вперед. Это выполняется, если $F_p \ge \sqrt{(\mu^2+1)/\mu^2 G}$ согласно условию непроскальзывания (рис. 4). В режиме торможения выполняется следующее условие:

$$F_p \ge \sqrt{(\mu_w^2+1)/\mu_w^2 G}.$$

Если к колесу приложен момент M, то колесо катится без проскальзывания при $F_w \le \mu_w N_w$. Если колесо вращается равномерно, то $M = N_w f_r + F_w r$.

Таким образом, при движении с постоянной скоростью на тяговое усилие накладывается следующее ограничение: $F_w \le \mu_w M/f_r + \mu_w r$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 11-01-00290-а.

Список литературы

1. Bonaccorso F., Longo D., Muscato G. Modelling an innovative actuator for climbing robot adhesion // Proc. of the CLAWAR 2009, ISBN-13 978-981-4291-26-2. Istanbul, Turkey. P. 891–898

2. Градецкий В.Г. и др. Механика миниатюрных роботов. М: Наука, 2010. 271 с.

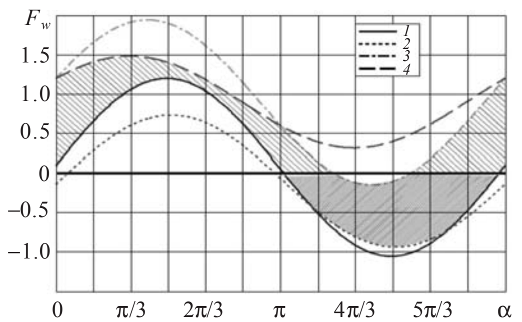


Рис. 3

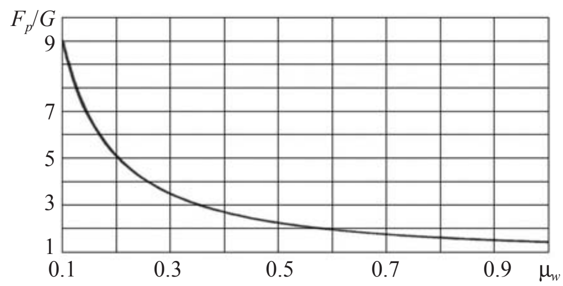


Рис. 4

PROBLEMS OF DESIGN OF ROBOTS WITH SLIDING SEAL

V.G. Chashchukhin

A mechanical model of a wall climbing robot with sliding seal is considered. The force pressing the robot against the surface is exerted by a vacuum chamber located under the body of the robot. Conditions limiting this force from below, as well as non-slip and non-tilt conditions are obtained.

Keywords: wall climbing robots, sliding seal.

УДК 531.53

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ МАЧТЫ ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОСЬЮ

О.Ю. Черкасов

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

oyuche@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассмотрена задача об устойчивости мачты ветроэнергетической установки с горизонтальной осью в условиях изменения скорости вращения ветроколеса, которое вызывается подключением и отключением потребителей электроэнергии. Математической моделью мачты служит перевернутый маятник с упругим закреплением в основании, поток воздуха предполагается квазистационарным. Найдены режимы изменения скорости вращения ветроколеса, приводящие к нарастанию колебаний мачты. Приводятся результаты численного моделирования.

Ключевые слова: ветроэнергетическая установка, устойчивость, линейная обратная связь, оптимальное управление.

Постановка задачи

Рассмотрим ветроэнергетическую установку, состоящую из турбины с горизонтальной осью, расположенной на вершине мачты. Мачта моделируется как перевернутый маятник с упругой заделкой в основании. Воздушный поток предполагается квазистационарным. Движение описывается системой уравнений:

$$J+ml^2)\ddot{\psi}=\left(\frac{M}{2}+m\right)gl\sin\psi-M_{air}+cI-kl^2\psi,$$

$$J_m(J+ml^2)\dot{\omega}=-\left(\frac{M}{2}+m\right)glJ_m\sin\psi+ \quad (1)$$

$$+M_{air}(J_m+J+ml^2)-cI(J_m+J+ml^2)+kl^2J_m\psi,$$

$$L\dot{I}=c\omega-(r+R)I.$$

Здесь ψ – угол между вертикалью и мачтой, ω – угловая скорость вращения турбины, I – сила тока, J – момент инерции мачты относительно основания, M – масса мачты, m – масса лопастей турбины, l – длина мачты, g – ускорение силы тяжести, J_m – момент инерции лопастей и электродвигателя турбины относительно оси вращения, k – коэффициент упругости (сила упругости является линейной функцией координаты), M_{air} – момент аэродинамических сил относительно оси вращения турбины, c – коэффициент, L – индуктивность, r – внутреннее сопротивление, R – сопротивление внешней нагрузки.

Введем безразмерное время τ и коэффициент θ по формулам: $t=\tau\theta$, где

$$\theta^2=\frac{J+ml^2}{(M/2+m)gl}.$$

Тогда

$$\ddot{\psi}=\frac{1}{\theta^2}\psi'',\quad \dot{\omega}=\frac{1}{\theta^2}\sigma',$$

где штрих означает производную по безразмерному времени, σ – безразмерная угловая скорость вращения турбины. Введем следующие обозначения для комбинаций исходных переменных и коэффициентов:

$$u=pcl,\quad w=\psi',\quad p=\frac{1}{(M/2+m)gl},$$

$$\kappa=kpl^2,\quad K=1-\kappa,\quad j=\frac{J_m+J+ml^2}{J_m},$$

$$\pi=\frac{pc^2}{L},\quad \rho=\frac{(r+R)\theta}{L}.$$

Предположим, что угол ψ достаточно мал, и ограничимся приближением $\sin\psi\approx\psi$.

Для аппроксимации аэродинамического момента примем, что установочный угол лопастей $\varphi=\pi/2$, угол атаки настолько мал, что подъемную силу лопасти можно рассматривать как линейную функцию угла атаки, а силу сопротивления – независящей от него. Тогда простейшая аппроксимация момента аэродинамических сил такова (см. [1]): $M_{\text{air}}=C_1V^2-C_2\sigma^2$. В безразмерных переменных система имеет вид:

$$\psi'=w,$$

$$w'=K\psi+C_2\sigma^2-C_1V^2+u,$$

$$\sigma'=-K\psi-jC_2\sigma^2+jC_1V^2-ju,$$

$$u' = \pi\sigma - \rho u. \qquad (2)$$

Заметим, что возмущение ρ входит только в четвертое уравнение системы (2). Отбросим это уравнение и перейдем к редуцированной системе, где в качестве возмущения рассматривается параметр u:

$$\psi' = w,$$
$$w' = K\psi + C_2\sigma^2 - C_1V^2 + u, \qquad (3)$$
$$\sigma' = -K\psi - jC_2\sigma^2 + jC_1V^2 - ju.$$

Если наихудший закон $u(t)$ определен, то соответствующее возмущение $\rho(t)$ может быть вычислено из четвертого уравнения системы (2).

Стационарные решения и управляемость

Стационарные решения системы (3) имеют вид: $w^* = 0, \psi^* = 0, \sigma^* = \sqrt{(C_1V^2 - u)/C_2}$, где u рассматривается как константа. Для системы (3), линеаризованной в окрестности стационарного решения, с помощью критерия Гурвица [2] установлено, что рассматриваемое стационарное решение асимптотически устойчиво. Соответствующая линейная управляемая система управляема по Калману, и, следовательно, существует линейная обратная связь, обеспечивающая положительные собственные значения характеристического многочлена. Более того, потеря устойчивости возможна, когда возмущение является линейной функцией только угловой скорости вращения турбины, $\Delta u = a\sigma$; условие неустойчивости решения задается неравенством $a < -2C_2\sigma^*$.

Показано, что устойчивость мачты с ветроэнергетической установкой на вершине может быть разрушена с помощью возмущения в виде обратной связи по угловой скорости вращения турбины. Дальнейшие исследования предполагают исследование задачи нахождения наихудшего возмущения.

Список литературы

1. Досаев М.З. и др. Конструктивная теория МВЭУ. Ч. 1. М.: МГУ, 2007. 76 с.

2. Александров В.В. и др. Оптимизация динамики управляемых систем. М.: МГУ, 2000. 304 с.

STABILITY ANALYSIS OF THE TOWER OF A WIND TURBINE WITH HORIZONTAL AXES

O.Yu. Cherkasov

The stability problem of the tower of a wind turbine with horizontal axes is considered for the conditions of a changing angular velocity of the wind wheel. An inverted pendulum with the elastic base is taken as a mathematical model of the tower. The air flow is assumed to be quasi-stationary. The regimes of the velocity changing of the wind wheel which lead to the increasing oscillations of the tower are determined. Computer simulation results are presented.

Keywords: wind turbine, stability, linear feedback, optimal control.

УДК 629.5-52

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТИПА ОСОБЫХ ТОЧЕК ПРИ УПРАВЛЕНИИ ПОДВИЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

А.В. Чернышов

Волжская государственная академия водного транспорта, Нижний Новгород

A.Chernyshov@energia.nnov.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматриваются вопросы идентификации типа неустойчивости (особой точки) при управлении подвижными объектами на примере речных водоизмещающих судов.

Ключевые слова: управляемость судна, статическая характеристика, моделирование динамики судов, неустойчивость движения, особая точка.

Создание алгоритмов управления для речных водоизмещающих судов, функционирующих в условиях непрерывно меняющейся внешней среды, – одно из направлений развития современной теории управления подвижными объектами. Задача управления такими объектами усложняется тем, что их динамика описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, параметры которых существенно зависят от непредсказуемого состояния внешней среды. В данной работе моделирование динамики проводилось с использованием общепризнанной в теории корабля модели речного водоизмещающего судна [1]:

$$\begin{cases} \dot{\beta} = -q_{21}\beta - r_{21}\omega - s_{21}\alpha - h_1|\beta|\beta, \\ \dot{\omega} = -q_{31}\beta - r_{31}\omega - s_{31}\alpha. \end{cases} \tag{1}$$

На рис. 1 изображена статическая характеристика т/х «Я. Свердлов», построенная по результатам натурных испытаний, проходивших в 1980 г. На рисунке показана область пониженной управляемости A, попадая в которую судно слабо реагирует на управляющее воздействие. Также отмечена область B, в которой проявился эффект, не подтверждаемый математической моделью. На поясняющей осциллограмме видно, что в области B временная характеристика угловой скорости представляет собой колебательный процесс.

Из практики известно, что суда относятся к неустойчивым на курсе подвижным объектам. При анализе фазовых портретов системы (1) с различными наборами коэффициентов (значения которых зависят от состояния внешней среды) было выявлено, что ветвь A_+–A_- характеризуется особыми точками типа «седло». При таком типе неустойчивости на статической плоскости появляются фазовые пятна (области A_+ и A_- на рис. 1).

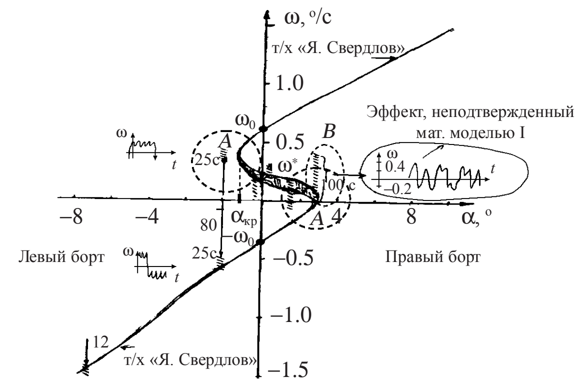


Рис. 1

Для объяснения возникновения областей B предлагается методика, суть которой состоит в следующем. Математическая модель (1) записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\beta} = -q_{21}\beta - r_{21}\omega - G(\alpha,\beta), \\ \dot{\omega} = -q_{31}\beta - r_{31}\omega - R(\alpha), \end{cases} \tag{2}$$

где $G(\alpha,\beta) = s_{21}\alpha + h_1\,|\beta|\,\beta$ и $R(\alpha) = s_{31}\alpha$.

Характеристическое уравнение системы (2):

$$(-r_{31} - \lambda)(-q_{21} - \lambda) - q_{31}r_{21} = 0. \tag{3}$$

Это уравнение имеет два корня λ_1 и λ_2 которые определяют один из типов особой точки:

– «устойчивый фокус» (корни комплексные с отрицательными действительными частями);

– «неустойчивый фокус» (корни комплексные с положительными действительными частями);

– «устойчивый узел» (корни действительные отрицательные);

– «неустойчивый узел» (корни действительные положительные);

– «седло» (корни действительные разных знаков);

– «фокус» или «центр» (корни чисто мнимые).

При вычислении корней характеристического уравнения (3) при различных r_{31}, q_{21}, q_{31}, r_{21}, оказалось, что такие эффекты, как в области *B*, возникают в случае, когда значения этих коэффициентов такие, что корни λ_1 и λ_2 – комплексные с отрицательными действительными частями. На рис. 2 и рис. 3 показаны результаты моделирования при таких параметрах модели и различных управляющих воздействиях (при $\alpha = 0°$ и $\alpha = 3°$ соответственно).

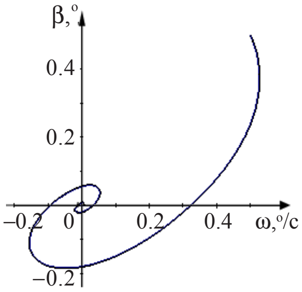


Рис. 2

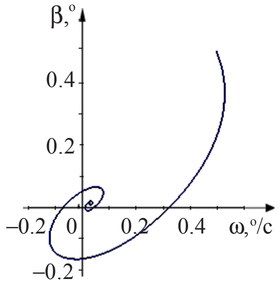


Рис. 3

Следует отметить, что по виду характеристики чувствительности [2] также можно определить, какой вид неустойчивости присутствует при различных внешних условиях.

Практический интерес представляет тот факт, что идентификация особенностей динамики происходит почти в реальном времени и полученную информацию о типе неустойчивости можно использовать в алгоритме управления для корректировки параметров регулятора. Кроме того, предложенное характеристическое уравнение наглядно демонстрирует, какие параметры модели «отвечают» за динамические характеристики объекта.

Список литературы

1. Войткунский Я.И., Першиц Р.Я., Титов И.А.. Справочник по теории корабля. Судовые движители и управляемость // Л.: Судостроение, 1973. 512 с.

2. Чиркова М.М., Чернышов А.В. Статико-динамические особенности управляемых объектов (на примере водоизмещающих судов) // М.: Изв. РАН. Серия математическая. Теория и системы управления. 2003. №4. С. 153–158.

IDENTIFICATION OF THE INSTABILITY KINDS IN THE PROCESS OF OBJECTS MANEUVERING

A.V. Chernyshov

The dentification of the instability kinds in the process of maneuvering problems are considered in this paper.

Keywords: vessels controllability, static characteristic, vessels maneuvering modeling, instability, instability kinds.

УДК 629.5-52

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПОДВИЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

М.М. Чиркова

Волжская государственная академия водного транспорта, Нижний Новгород

chirkova@aqua.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Обосновывается решение двух задач, предшествующих разработке алгоритмов управления подвижными объектами. Первая задача – разработка специальной методики проведения испытаний (машинного или натурного) для оценки управляемости объекта, вторая – разработка способа представления результатов испытания для оценки статико-динамических особенностей управляемого объекта.

Ключевые слова: суда, алгоритм управления, технология проведения эксперимента, скрытые динамические особенности судов.

Повышение качества управления сложными техническими устройствами и создание систем автоматического управления их состоянием невозможно без детального изучения свойств объекта. Известно, что исследование свойств и решение задачи управления усложняется, если динамика объектов описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, структура и параметры которых существенно зависят от состояния внешней среды. Широко распространенными, но мало изученными с точки зрения статико-динамических особенностей и влияния внешней среды на свойства объекта являются речные водоизмещающие суда, неустойчивые на курсе и функционирующие в среде непредсказуемых быстроменяющихся внешних помех.

Анализ результатов натурных испытаний пассажирских и грузовых речных судов, проведенных в бассейне реки Волга, показал, что с изменением глубины фарватера меняется не только динамика судна, но принципиально меняется статика управляемого объекта. Так, на глубокой воде (характеристика *A*, рис. 1) судно имеет практически линейную статическую характеристику управляемости: «угловая скорость перехода судна на новый курс (ω) – угол перекладки руля (α)». При переходе на мелководье (характеристика *B*, рис. 1) характеристика становится нелинейной в определенной зоне перекладки руля направления ($-\alpha^*<\alpha<+\alpha^*$) и судно при небольших управлениях может выходить на любое из трех возможных стационарных состояний равновесия (ω_1, ω_2, ω_3).

Таким образом, одна из задач, которая предшествует созданию системы управления движением судна (как и любого другого подвижного объекта), – это изучение влияния внешней среды на статические и динамические особенности объекта.

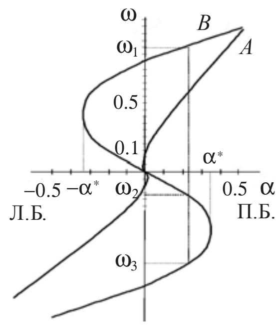


Рис. 1

Данную задачу можно разбить на две подзадачи:

– разработка специальной методики проведения эксперимента (машинного или натурного) для оценки статико-динамических особенностей объекта управления;

– разработка способа представления результатов испытания.

Необходимость решения первой подзадачи возникла в связи со спецификой объекта. Речное водоизмещающее судно – объект, функционирующий в среде, которая постоянна в окрестности небольшого водного пространства и на коротком интервале времени. Это требует специальной методики для изучения динамики объекта, выявлению скрытых, редко проявляемых свойств, некоторые из которых усложняют процесс управления, иногда даже приводят к катастрофическим последствиям, другие, наоборот, способствуют существенному улучшению качества процесса управления и значительной экономии энергии.

Вторая подзадача возникла в связи с тем, что существующие способы отображения информации – частотные, временные характеристики и фазовые отображения, как показал опыт работы с судами, недостаточно информативны и наглядны, а некоторую информацию, такую как расположение и размеры, исчезновение и возникновение под влиянием внешней среды особых точек и областей различной управляемости объекта, с помощью этих способов практически получить невозможно.

Классический способ определения свойств объекта по виду отклика $y(t)$ на единичное ступенчатое воздействие $u(t) = l(t)$ дает достоверный результат лишь в случае линейных объектов. В реальности практически все подвижные объекты описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, а их реакция зависит от начальных условий, величины воздействия и достаточно сильно от состояния внешней среды, в основном, глубины фарватера. Поэтому целесообразно при проведении экспериментов для оценки статико-динамического портрета судна управляющее воздействие – перекладку рулей направления $u(t)$ формировать по закону, представленному на рис. 2 сплошной линией. Штриховой линией представлен возможный вид отклика $y(t)$ – угловой скорости поворота судна.

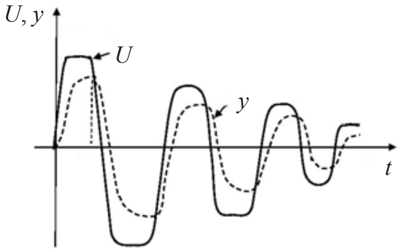
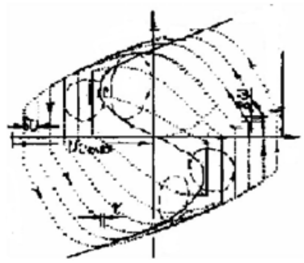
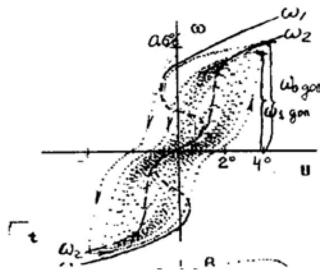


Рис. 2. Алгоритм изменения управляющего воздействия при снятии статико-динамического портрета

Смена знака управляющего воздействия осуществляется в момент, когда координата состояния (в случае статических объектов) или скорость ее изменения (для объектов с астатизмом первого порядка) приближается к своему установившемуся состоянию. Результаты эксперимента представим на плоскости статической характеристики $y - u$ (рис. 3) в виде набора дискретных точек, взятых из осциллограмм $u(t)$, $y(t)$ с шагом дискредитации по времени τ. На рис. 3 координата состояния $y(t)$ – угловая скорость рысканья $\omega(t)$, управляющее воздействие $u(t)$ – перекладка руля $\alpha(t)$.



а)



б)

Рис. 3. Статико-динамические портреты судов

По полученным статико-динамическим портретам можно оценить возможный вид статической характеристики судна, наличие областей пониженной управляемости (по сгущению точек на плоскости) и величины критических управлений.

PROBLEMS OF THE CONTROL OF MOVING OBJECTS

M.M. Chirkova

Two tasks are discussed that must be solved before starting the development of algorithms of controlling movable objects. The first task is to work out a way of conducting experiments (computer or natural). The second task is to work out of a way of representation of the results of the test. The solution of these problems will make it possible to discover the latent dynamic features of the object which must be considered when developing the control algorithm.

Keywords: a vessel dynamic, control algorithm, a way of conducting experiments, latent dynamic features of the vessel.

УДК 531.552

ДИНАМИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

М.В. Шамолин

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

shamolin@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Предложена качественная методика построения геометрических и нахождения динамических инвариантов (первых интегралов) интегрируемых механических систем с переменной диссипацией.

Ключевые слова: динамическая система, переменная диссипация, трансцендентный первый интеграл.

Работа посвящена развитию методов анализа в теории неконсервативных систем, возникающих в таких областях, как динамика твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой [1–5], теория колебаний и др. В принципе, данный материал может быть интересен специалистам по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и механике жидкости и газа [6–10].

В общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удается найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций.

Получен целый спектр случаев полной интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обусловливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств (как, например, притягивающих и отталкивающих фокусов).

Получены новые семейства фазовых портретов систем с переменной диссипацией на маломерных и многомерных многообразиях. Обсуждаются вопросы их абсолютной или относительной грубости. Обнаружены новые интегрируемые случаи движения твердого тела, в том числе в классической задаче о движении сферического маятника, помещенного в поток набегающей среды.

Приводятся предварительные суждения и кратко обсуждаются полученные ранее результаты. Конкретизируются так называемые динамические системы с переменной диссипацией. Данный класс систем характеризуется как класс, в ряде случаев допускающий полное интегрирование. Поскольку в системе присутствуют отталкивающие и притягивающие предельные множества, полное интегрирование если и может производиться, так только в классе трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций.

Рассказывается о наглядных характеристиках таких систем, затем дается определение (или, точнее, одно из определений) системы с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним.

Вводится в рассмотрение важный класс динамических систем с дополнительными симметриями. На самом деле, вводимые симметрии вполне естественны, поскольку, в принципе, правую часть системы можно разложить в ряд Фурье, при этом часто бывает, что эти ряды конечны. Вводимый класс систем оказывается классом систем с переменной диссипацией с нулевым средним. Приводятся естественные примеры из динамики плоскопараллельного и пространственного движения твердого тела.

Изучаются системы с симметриями на двумерном цилиндре. И хотя часть материала уже появлялась в печати, автор счел нужным опубликовать данный материал в данном контексте.

Изучаются также маятниковые системы на касательном расслоении к двумерной сфере. Приводится достаточно общий вид таких систем третьего порядка, которые допускают наличие трансцендентных первых интегралов. Задачи, порождающие проблемы качественного анализа, берутся из плоской и пространственной динамики твердого тела, взаимодействующего со средой.

Исследуются новые случаи интегрируемости в плоской и пространственной динамике, т.е. случаи, описываемые динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним. Подавляющая часть данного материала ранее не публиковалась. Преимущество изложения такого материала состоит в том, что практически все исследуемые системы описывают вполне конкретные движения и имеют соответствующие гидродинамические аналогии. На примере конкретной динамической системы, вводится характеристический индекс, «кодирующий» соответствующий тип фазового портрета (абсолютно) грубой системы в пространстве ее квазискоростей. При этом каждый такой индекс соответствует топологически изолированному (т.е. неэквивалентному другим типам) типу фазового портрета.

Список литературы

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А. О рождении предельных циклов из петли сепаратрисы и из сепаратрисы состояния равновесия типа седло-узел // Математический сборник. 1959. Т. 48. Вып. 3.

2. Андронов А.А., Леонтович Е.А. Динамические системы первой степени негрубости на плоскости // Математический сборник. 1965. Т. 68. Вып. 3.

3. Андронов А.А., Леонтович Е.А. Достаточные условия для негрубости первой степени динамической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, №12.

4. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. 14, №5. С. 247–250.

5. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.

6. Шамолин М.В. Случаи интегрируемости уравнений пространственной динамики твердого тела // Прикл. механика. 2001. Т. 37, №6. С. 74–82.

7. Шамолин М.В. Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке набегающей среды // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2001. №5. С. 22–28.

8. Шамолин М.В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем // Успехи матем. наук. 2002. Т. 57, вып. 1. С. 169–170.

9. Шамолин М.В. Геометрическое представление движения в одной задаче о взаимодействии тела со средой // Прикл. механика. 2004. Т. 40, №4. С. 137–144.

10. Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 352 с.

DYNAMICAL INVARIANTS OF INTEGRABLE DYNAMIC SYSTEMS WITH VARIABLE DISSIPATION

M.V. Shamolin

The paper presents results referred to geometric and dynamic invariant theory of completely integrable systems and also to the classification of integrable cases of low-dimensional and high-dimensional rigid body dynamics in a non-conservative force field.

Keywords: dynamical system, transcendental integrability, phase pattern.

УДК 531.391

ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАНЕТЫ

А.В. Шатина, Е.В. Шерстнев

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики
(технический университет)

shatina_av@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Исследуется движение спутника в гравитационном поле вращающейся массивной деформируемой планеты. Планета моделируется однородным изотропным вязкоупругим телом из материала Кельвина – Фойгта, имеющим шаровую форму в естественном недеформированном состоянии, а спутник – материальной точкой.

Ключевые слова: вязкоупругое тело, эволюция движения, устойчивость, стационарное движение, переменные Делоне, орбита спутника.

1. Постановка задачи. Уравнения движения

Рассмотрим задачу о движении системы планета–спутник в гравитационном поле взаимного притяжения. Планету будем моделировать однородным изотропным вязкоупругим шаром, а спутник – материальной точкой P. Пусть m, μ – массы планеты и спутника соответственно, r_0 – радиус планеты в естественном недеформированном состоянии, ρ – плотность планеты ($m = 4\rho\pi r_0^3/3$).

Введем инерциальную систему координат $OXYZ$ с началом в центре масс системы. Для описания вращательного движения планеты введем подвижную систему координат $Cx_1x_2x_3$ с началом в центре масс деформированной планеты и систему осей Кенига $C\xi_1\xi_2\xi_3$. Положим $\mathbf{R} = \overline{CP}$.

Радиусы-векторы точки P и точки M вязкоупругого шара в инерциальной системе координат имеют вид:

$$\mathbf{R}_P = \frac{m}{m+\mu}\mathbf{R}, \quad \mathbf{R}_M = -\frac{\mu}{m+\mu}\mathbf{R} + \Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u}),$$

где Γ – оператор перехода от системы координат $Cx_1x_2x_3$ к системе осей Кенига, $\mathbf{u}$ – вектор упругого смещения.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы получим из вариационного принципа Даламбера – Лагранжа:

$$\int_V (\ddot{\mathbf{R}}_M, \delta\mathbf{R}_M)\rho dv + \mu(\ddot{\mathbf{R}}_P, \delta\mathbf{R}_P) + \delta\Pi + \int_V (\nabla_{\mathbf{u}} E[\mathbf{u}] +$$

$$+ \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} D[\dot{\mathbf{u}}] + \lambda_1, \delta\mathbf{u})dv + \int_V (\lambda_2, \operatorname{rot}\delta\mathbf{u})dv = 0,$$

где

$$\Pi = -f\mu\int_V \frac{\rho dv}{|\mathbf{R} - \Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})|}$$

– потенциальная энергия гравитационного поля; f – универсальная гравитационная постоянная; $E[\mathbf{u}]$ – функционал потенциальной энергии упругих деформаций, соответствующий классической теории упругости малых деформаций; $D[\dot{\mathbf{u}}] = \chi E[\dot{\mathbf{u}}]$ – функционал диссипативных сил, соответствующий модели Кельвина – Фойгта, $\chi > 0$ – коэффициент внутреннего вязкого трения; $\boldsymbol{\lambda}_1$, $\boldsymbol{\lambda}_2$ – неопределенные множители Лагранжа, порожденные условиями, определяющими центр масс C деформированного шара и подвижную систему координат $Cx_1x_2x_3$ [1, 2].

2. Построение возмущенной системы уравнений движения

Предположим, что жесткость вязкоупругой планеты велика, и введем малый параметр ε, обратно пропорциональный модулю Юнга. Методом разделения движений [1] построим приближенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений в векторном виде, описывающую поступательно-вращательное движение системы планета–спутник с учетом возмущений, вызванных упругостью и диссипацией:

$$\mu\ddot{\mathbf{R}} + \frac{f\mu(\mu+m)}{R^3}\mathbf{R} + \frac{\varepsilon C_1}{R^4}\Gamma\{\xi(\omega^2 + 6f\mu R^{-3}) +$$

$$+ 2\omega(\xi,\omega) - 5\xi(\xi,\omega)^2\} + \frac{\varepsilon\chi C_2}{R^7}\Gamma\{\dot{\xi} + 3\dot{R}R^{-1}\xi\} = 0,$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{\varepsilon C_3}{R^3}\Gamma\{[\xi\times\omega](\xi,\omega)+3\chi f\mu R^{-3}[\xi\times\dot{\xi}]\}, \quad (1)$$

где

$$R=|\mathbf{R}|,\ \xi=\Gamma^{-1}\mathbf{R}/R,\ \omega\times(\cdot)=\Gamma^{-1}\dot{\Gamma}(\cdot),\ C_1=$$

$$=3f\rho^2 D_1\mu m^{-1}(\mu+m),\ C_2=6f\mu C_1,\ C_3=6f\rho^2 D_1\mu,$$

$$D_1=\frac{4\pi(1+\nu)(9\nu+13)}{105(5\nu+7)}r_0^7,$$

ν – коэффициент Пуассона планеты,

$$\mathbf{L}=\int_V \Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})\times\frac{d}{dt}[\Gamma(\mathbf{r}+\mathbf{u})]\rho\,dv$$

– вектор кинетического момента вязкоупругого шара относительно центра масс.

3. Стационарное движение спутника и его устойчивость

Будем полагать, что масса планеты много больше массы спутника, рассмотрим задачу о движении материальной точки в гравитационном поле вращающейся вязкоупругой планеты. Уравнение для радиуса-вектора точки $\mathbf{R}$ представляется в виде уравнения (1), в котором вектор $\mathbf{\Omega} = \Gamma\boldsymbol{\omega}$ считаем постоянным. Ось OZ инерциальной системы координат направим по вектору $\mathbf{\Omega}$, а координаты вектора $\mathbf{R}$ выпишем в сферических координатах: $\mathbf{R}=(R\cos\beta\sin\eta;\ R\sin\beta\sin\eta;\ R\cos\eta)$.

Уравнения движения спутника в сферических координатах имеют вид:

$$\ddot{R}-R\dot{\eta}^2-R\dot{\beta}^2\sin^2\eta+\frac{f(\mu+m)}{R^2}+$$

$$+\frac{\varepsilon b}{R^4}\times\left\{\Omega^2(1-3\cos^2\eta)+\frac{6f\mu}{R^3}+\frac{18\chi f\mu}{R^4}\dot{R}\right\}=0,$$

$$(R\ddot{\beta}+2\dot{R}\dot{\beta})\sin\eta+2R\dot{\beta}\dot{\eta}\cos\eta+$$

$$+\frac{6\varepsilon\chi bf\mu}{R^7}\sin\eta(\dot{\beta}-\Omega)=0, \quad (2)$$

$$R\ddot{\eta}+2\dot{R}\dot{\eta}-R\dot{\beta}^2\sin\eta\cos\eta-\frac{\varepsilon b}{R^4}\Omega^2\sin 2\eta+$$

$$+\frac{6\varepsilon\chi bf\mu}{R^7}\dot{\eta}=0,\quad b=C_1/\mu.$$

Система уравнений (2) имеет стационарное решение: $\eta=\pi/2,\ \dot{\beta}=\Omega,\ R=R_*$, где R_* является корнем уравнения

$$\frac{f(\mu+m)}{R^3}+\frac{\varepsilon b\Omega^2}{R^5}+\frac{6\varepsilon bf\mu}{R^8}=\Omega^2.$$

Указанное стационарное движение является неустойчивым, что следует из уравнений возмущенного движения 1-го приближения.

4. Построение эволюционной системы уравнений

Получена система уравнений движения спутника в переменных Делоне L, G, H, l, g, h [6]. Методом усреднения по «быстрой» угловой переменной – средней аномалии – получена замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая эволюцию переменных «действие» и медленных угловых переменных. Из эволюционной системы уравнений получена замкнутая система дифференциальных уравнений относительно среднего движения по орбите n, эксцентриситета ε, наклонения орбиты i и долготы перигелия от восходящего узла g. В частности,

$$\frac{di}{dt}=-\frac{\Delta_1\Omega n^{13/3}\sin i}{(1-e^2)^5}\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{9}{4}-\frac{3}{2}\sin^2 g\right)e^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{5}{16}-\frac{1}{4}\sin^2 g\right)e^4\right\},$$

$$\Delta_1=\frac{27\varepsilon\chi\mu m r_0(1+\nu)(9\nu+13)}{70\pi(5\nu+7)f^{2/3}(\mu+m)^{5/3}},$$

откуда следует, что или $i\equiv 0$, или наклонение орбиты во все время движения монотонно уменьшается до нуля.

Список литературы

1. Вильке В.Г. Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во МГУ, 1997. Ч. 1. 216 с.; Ч. 2. 160 с.
2. Вильке В.Г. // Прикладная математика и механика. 1980. Т. 44, вып. 3. С. 395–402.
3. Приливы и резонансы в Солнечной системе: Сборник статей / Под ред. В.Н. Жаркова. М.: Мир, 1975.
4. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: МГУ, 1975.
5. Марков Ю.Г., Миняев И.С. // Астрономический вестник. 1994. Т. 28, № 2. С. 59–72.
6. Шатина А.В. // Космические исследования. 2001. Т. 39, № 3. С. 303–315.

THE EVOLUTION OF THE MOTION OF A SATELLITE IN THE GRAVITATIONAL FIELD OF A ROTATING VISCOELASTIC PLANET

A.V. Shatina, E.V. Sherstnev

The motion of a satellite in the gravitational field of the rotating massive deformed planet is investigated. The planet is modeled by a homogeneous isotropic viscoelastic body of a Kelvin – Voigt material which in the natural non-deformed state occupies a spherical region. The satellite is modeled as a material point.

Keywords: viscoelastic body, evolution of the motion, stability, stationary motion, Delaunay variables, orbit of a satellite.

УДК 531.391

ЭВОЛЮЦИЯ ДВИЖЕНИЯ СВЯЗКИ ДВУХ ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАНЕТ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ МАССИВНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАНЕТЫ

Л.С. Шатина

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

l_shatina@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Исследуется эволюция поступательно-вращательного движения двойной планеты в гравитационном поле вязкоупругой планеты много большей массы. Предполагается, что расстояние между центром масс притягивающей планеты и центром масс системы двух планет много больше расстояния между центрами масс планет, составляющих двойную планету. Все планеты, входящие в рассматриваемую механическую систему, моделируются однородными изотропными телами, занимающими шаровые области в естественном недеформированном состоянии. Рассмотрен пример двойной планеты Земля–Луна в гравитационном поле Солнца.

Ключевые слова: вязкоупругое тело, эволюция поступательно-вращательного движения, двойная планета, уравнения Рауса.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении двойной планеты в гравитационном поле планеты большей массы. Планеты будем моделировать вязкоупругими телами с массами m_1, m_2, m_3 и плотностями ρ_1, ρ_2, ρ_3 занимающими в естественном недеформированном состоянии области $V_i = \{\mathbf{r} \in \mathrm{E}^3 : |\mathbf{r}| \le r_{i0}\}$ $(i = 1, 2, 3)$ в трехмерном евклидовом пространстве. Предполагается, что $m_3 \ll m_2 \ll m_1$.

Введем инерциальную систему координат $OXYZ$ с началом в центре масс системы. Обозначим через C_1 центр масс планеты с массой m_1, через C – центр масс связки двух планет. Взаимное расположение планет будем определять векторами $\mathbf{R}_1 = \overline{C_1C}$ и $\mathbf{R}_2 = \overline{C_2C_3}$, $|\mathbf{R}_2| \ll |\mathbf{R}_1|$. Для описания вращательного движения i-й планеты введем подвижную систему координат $C_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} x_3^{(i)}$ и систему осей Кенига $C_i \xi_1^{(i)} \xi_2^{(i)} \xi_3^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Радиусы-векторы произвольных точек M_i, принадлежащих i-й планете, запишутся в виде:

$$\mathbf{R}_{M_1} = -((m_2 + m_3)/M)\mathbf{R}_1 + \Gamma_1(\mathbf{r}_1 + \mathbf{u}_1),$$

$$\mathbf{R}_{M_2} = (m_1/M)\mathbf{R}_1 - (m_3/(m_2 + m_3))\mathbf{R}_2 + \Gamma_2(\mathbf{r}_2 + \mathbf{u}_2),$$

$$\mathbf{R}_{M_3} = (m_1/M)\mathbf{R}_1 + (m_2/(m_2 + m_3))\mathbf{R}_2 + \Gamma_3(\mathbf{r}_3 + \mathbf{u}_3),$$

где $M = m_1 + m_2 + m_3$, $\mathbf{u}_i = (u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, u_3^{(i)})$ – вектор упругого смещения i-й планеты, Γ_i – оператор перехода от подвижной системы координат $C_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} x_3^{(i)}$, интегральным образом связанной с i-й планетой, к соответствующей системе осей Кенига $(i = 1, 2, 3)$.

Ограничимся рассмотрением частного случая движения системы, когда центры масс планет движутся в неподвижной плоскости OXY, а векторы угловых скоростей планет направлены по нормали к этой плоскости. В этом случае векторы угловых скоростей планет равны $\boldsymbol{\omega}_i = \dot{\varphi}_i \mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_3$ – орт оси OZ, φ_i – угол между осями $\xi_1^{(i)}$ и $x_1^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Кинетическая энергия системы представляется функционалом

$$T = (m_1(m_2 + m_3)/2M)\dot{\mathbf{R}}_1^2 + (m_2 m_3/2(m_2 + m_3))\dot{\mathbf{R}}_2^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\int_{V_i}(\boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{r}_i + \mathbf{u}_i) + \dot{\mathbf{u}}_i)^2 \rho_i dv_i,$$

потенциальная энергия внешних гравитационных полей равна

$$\Pi = -\sum_{i,j=1, i<j}^{3} \int_{V_i}\int_{V_j} \frac{f\rho_i\rho_j}{|\mathbf{R}_{M_i} - \mathbf{R}_{M_j}|} dv_i dv_j,$$

где f – универсальная гравитационная постоянная, а потенциальная энергия упругих деформаций соответствует линейной теории упругости. Для функционала внутренних диссипативных сил принимается модель Кельвина–Фойгта.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы выписываются в форме уравнений Рауса, причем канонические переменные Андуайе – Делоне используются для описания поступательно-вращательного движения системы, а лагранжевы переменные $u_j^{(i)}(\mathbf{r}_i, t)$ $(i, j = 1, 2, 3)$

– для описания деформаций.

2. Эволюционная система уравнений

Предположим, что жесткости вязкоупругих планет велики, и введем малые параметры ε_i, обратно пропорциональные модулям Юнга. Методом разделения движений и усреднения [1] получим приближенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений в переменных Делоне, описывающую эволюцию поступательно-вращательного движения рассматриваемой системы. Используя полученную эволюционную систему уравнений, можно получить замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно величин ω_i (i = 1, 2, 3), n_i, e_i (i = 1, 2), (ω_i – угловая скорость i-й планеты; n_1 – среднее орбитальное движение центра масс двойной планеты относительно массивной планеты; n_2 – среднее орбитальное движение конца вектора $\mathbf{R}_2$ относительно центра масс второй планеты; e_1, e_2 – эксцентриситеты соответствующих орбит):

$$\dot{\omega}_1 = \frac{27(m_2+m_3)^2 m_1 \Delta_1 Q^{(1)}_{\omega_1}}{28\pi M^2 r_{10}};$$

$$\dot{\omega}_2 = \frac{27 m_2 \Delta_2}{28\pi r_{20}}\left(\frac{m_1^2 Q^{(1)}_{\omega_2}}{M^2} + \frac{m_3^2 Q^{(2)}_{\omega_2}}{(m_2+m_3)^2}\right);$$

$$\dot{\omega}_3 = \frac{27 m_3 \Delta_3}{28\pi r_{30}}\left(\frac{m_1^2 Q^{(1)}_{\omega_3}}{M^2} + \frac{m_2^2 Q^{(2)}_{\omega_3}}{(m_2+m_3)^2}\right);$$

$$\dot{n}_1 = \frac{81 m_1}{70\pi f^{2/3} M^{5/3}}\left((m_2+m_3) r_{10}\Delta_1 Q^{(1)}_{n_1} + \frac{m_2^2 r_{20}\Delta_2}{m_2+m_3} Q^{(2)}_{n_1} + \frac{m_3^2 r_{30}\Delta_3}{m_2+m_3} Q^{(3)}_{n_1}\right);$$

$$\dot{e}_1 = -\frac{27 m_1}{70\pi f^{2/3} M^{5/3}}\left((m_2+m_3) r_{10}\Delta_1 Q^{(1)}_{e_1} + \frac{m_2^2 r_{20}\Delta_2}{m_2+m_3} Q^{(2)}_{e_1} + \frac{m_3^2 r_{30}\Delta_3}{m_2+m_3} Q^{(3)}_{e_1}\right);$$

$$\dot{n}_2 = \frac{81 m_2 m_3}{70\pi f^{2/3}(m_2+m_3)^{5/3}}\left(r_{20}\Delta_2 Q^{(2)}_{n_2} + r_{30}\Delta_3 Q^{(3)}_{n_2}\right);$$

$$\dot{e}_2 = -\frac{27 m_2 m_3}{70\pi f^{2/3}(m_2+m_3)^{5/3}}\left(r_{20}\Delta_2 Q^{(2)}_{e_2} + r_{30}\Delta_3 Q^{(3)}_{e_2}\right),$$

где

$$Q^{(j)}_{\omega_i} = \frac{n_j^4}{(1-e_j^2)^6}\{n_j F_2(e_j) - \omega_i (1-e_j^2)^{3/2} F_1(e_j)\},$$

$$Q^{(j)}_{n_i} = \frac{n_i^{16/3}}{(1-e_i^2)^{15/2}}\{n_i F_3(e_i) - \omega_j (1-e_i^2)^{3/2} F_2(e_i)\},$$

$$Q^{(j)}_{e_i} = \frac{n_i^{13/3} e_i}{(1-e_i^2)^{13/2}}\{n_i F_4(e_i) - \omega_j (1-e_i^2)^{3/2} F_5(e_i)\},$$

$$F_1(e) = 1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4,$$

$$F_2(e) = 1 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{45}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6,$$

$$F_3(e) = 1 + \frac{31}{2}e^2 + \frac{255}{8}e^4 + \frac{185}{16}e^6 + \frac{25}{64}e^8,$$

$$F_4(e) = 9 + \frac{135}{4}e^2 + \frac{135}{8}e^4 + \frac{45}{64}e^6,$$

$$F_5(e) = \frac{11}{2} + \frac{33}{4}e^2 + \frac{11}{16}e^4,$$

$$\Delta_i = \frac{\varepsilon_i \chi_i (1+\nu_i)(9\nu_i + 13)}{5\nu_i + 7},$$

ν_i – коэффициент Пуассона, $\chi_i > 0$ – коэффициент внутреннего вязкого трения i-й планеты.

Расчет коэффициентов уравнений для системы Солнце–Земля–Луна позволяет сделать вывод, что эволюция движения центра масс двойной планеты определяется слагаемым, вызванным протяженностью и нежесткостью массивного тела, а в эволюцию вращательного движения Луны главный вклад вносит слагаемое, связанное с эксцентричностью ее орбиты относительно Земли.

Список литературы

1. Вильке В.Г. Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: МГУ, 1997. Ч. 1. 216 с.; Ч. 2. 160 с.

2. Приливы и резонансы в Солнечной системе: Сб. статей / Под ред. В.Н. Жаркова. М.: Мир, 1975.

3. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: МГУ, 1975.

4. Марков Ю.Г., Миняев И.С. // Астрономический вестник. 1994. Т. 28, №2. С. 59–72.

5. Вильке В.Г., Шатина А.В. // Космические исследования. 2001. Т. 39, №3. С. 316–323.

THE EVOLUTION OF MOTION OF A DOUBLE PLANET IN THE GRAVITATIONAL FORCE FIELD OF A MASSIVE VISCOELASTIC PLANET

L.S. Shatina

The paper investigates the evolution of translational-rotational motion of a double planet in the gravitational force field of a much heavier planet. It is assumed, that the distance between the center of mass of the attracting planet is much larger than the distance between the centers of mass of the two planets forming the double planet. All of the planets in the system are modeled as homogeneous isotropic bodies, occupying spherical regions in their non-deformed state. As an example, the double Earth-Moon in the Sun's gravitational force field is considered.

Keywords: viscoelastic body, evolution of motion, Delaunay variables, double planet, Routh equations.

УДК 517.9; 530.1

БИФУРКАЦИИ И СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ

Л.П. Шильников

НИИ прикладной математики и кибернетики Нижегородского госуниверситета
им. Н.И. Лобачевского

diffequ@unn.ac.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматривается теория странных аттракторов и их бифуркации. Все известные аттракторы могут быть разделены на три типа: гиперболические, псевдогиперболические и квазиаттракторы. К первым относятся аттракторы Аносова и соленоиды Смейла – Вильямса. Их можно получить в результате глобальных бифуркаций Для аттракторов второго типа дается общее определение и описание основных свойств, к ним принадлежат аттракторы лоренцевского типа и спиральные. Они негрубые, причем спиральные допускают гомоклинические касания и их возмущения не приводят к появлению устойчивых периодических движений. Напротив, квазиаттракторы допускают устойчивые периодические движения большого периода с узкой областью притяжения. Последние наиболее часто встречаются в задачах нелинейной динамики систем со сложным поведением траекторий.

Ключевые слова: странный аттрактор, бифуркация, псевдогиперболический, спиральный, гомоклиническое касание.

Одним из выдающихся событий XX века явилось открытие динамического хаоса. К хорошо известным явлениям нелинейной динамики, как-то: стационарные режимы, автоколебания, модуляции, добавились новые – хаотические колебания, вследствие чего многие задачи современного естествознания и техники, моделируемые в рамках дифференциальных уравнений, получили адекватные математические описания. С легкой руки Рюэля и Такенса математический образ динамического хаоса получил название «странный аттрактор».

Странные аттракторы можно разделить на три класса: гиперболические, псевдогиперболические, квазиаттракторы.

1. Характерный пример гиперболических аттракторов – аттракторы Аносова, в частности, предельное множество отображения $\bar{x} = 1/2\,x$, $\bar{\theta} = A\vartheta \bmod 1$, где A – положительная матрица с $|A| = 1$, не имеющая собственных значений на единичной окружности.

Другим примером является соленоид Смейла – Вильямса, полученный как гиперболическое отображение полнотория $\bar{x} = f(x,\theta)$, $\bar{\theta} = m\theta \bmod 1$, где $x = (x_1, x_2)$ и f достаточно сильно сжимает. Отсюда и первоначальное определение аттрактора: устойчивое транзитивное предельное множество с неустойчивым поведением траекторий. В случае гиперболических аттракторов, а они грубые, неустойчивое поведение означает экспоненциальное разбегание.

В [1, 2] было установлено, что подобные аттракторы могут рождаться в результате глобальных бифуркаций, связанных с исчезновением периодического движения седло-узлового типа, а также тора с квазипериодической обмоткой.

В настоящее время найден ряд критериев существования гиперболических аттракторов в системах с седло-фокусом и седловым периодическим движением при подходящем взаимном расположении их устойчивых и неустойчивых многообразий.

2. Понятие псевдогипеболичности было введено в работах [3, 4]. Оно является эффективным критерием динамического хаоса в поглощающей области D n-мерного потока x_t.

Пусть также выполняются следующие условия.

1) Для каждой точки из D можно указать пару трансверсальных подпространств N_1 и N_2 $(\dim N_1 \geq 1)$ так, что данные семейства подпространств будут инвариантны относительно линеаризованного потока.

2) Для каждой траектории $x(t) = X_t(x_0)$ максимальный ляпуновский показатель, отвечающий N_1, строго меньше, чем ляпуновский показатель, отвечающий N_2.

3) Линеаризованный поток – экспоненциально сжимающий в ограничении на N_1.

4) Линеаризованный поток в N_2 экспоненци-

ально растягивает объемы.

Из этого определения непосредственно следует, что максимальный ляпуновский показатель положителен, т.е. все траектории в D являются седловыми.

Отметим, что условие псевдогиперболичности не нарушается при малых гладких возмущениях системы. Из этого следуют важные утверждения:

1) Если система $\dot{x} = X(x)$ псевдогиперболична в области D, то при C^1-малой $p(x, \theta)$, периодической по θ, псевдогиперболична и система $\dot{x} = X(x) + p(x, \theta)$, $\dot{\theta} = 1$ в $D \times S^1$.

2) Если система $\dot{x} = X(x)$ псевдогиперболична в ω, то при C^1-малых $p(x, y)$ и $q(x, y)$ такой будет и система $\dot{x} = X(x) + p(x, y)$, $\dot{y} = X(x) + q(x, y)$.

Псевдогиперболическим поведением обладает геометрическая модель Лоренца ([5], там же приведены явные условия, налагаемые на отображение Пуанкаре). Позднее в [3] были даны условия для случая, когда сингулярным элементом аттрактора был седло-фокус с одномерным неустойчивым многообразием. В этом случае спиральный аттрактор будет негрубым, поскольку в нем будут существовать гомоклинические касания. Гомоклинические касания будут существовать и в аттракторе, полученном при периодическом возмущении систем с аттракторами лоренцевского типа. Сейчас также строится теория псевдогиперболических аттракторов в случае, когда особым элементом являются седловые периодические движения с двумерным неустойчивым многообразием.

Однако здесь выяснилось, что в поглощающей области может не быть странного аттрактора. В качестве примера можно указать геометрическую модель Лоренца в бифуркационный момент, связанный с появлением лакуны. Поэтому для изучения псевдогиперболических аттракторов, допускающих гомоклинические касания, в [3, 4] было предложено новое определение странного аттрактора: притягивающее предельное цепно-транзитивное множество с неустойчивым поведением траекторий.

3. Квазиаттракторами мы называем такие притягивающие множества, которые наряду с гиперболическими транзитивными множествами содержат гомоклинические касания либо сами, либо близкие к ним множества. В трехмерном диссипативном случае это приводит к существованию устойчивых периодических движений, аттракторов Бенедикса – Карлесона. В многомерном же случае, кроме указанных аттракторов, могут быть торы, а также псевдогиперболические аттракторы одного из указанных выше типов [6, 7]. Однако все они имеют узкие области притяжения, и поэтому при компьютерных исследованиях смотрятся как настоящие странные аттракторы.

Существование гомоклинических касаний в конкретных моделях – это весьма обычное явление. В частности, такими свойствами часто обладают системы с гомоклиническими петлями седло-фокуса с положительной седловой величиной. А это приводит к таким явлениям, как всюду плотная негрубость в областях параметров и возможность существования периодических решений любого порядка вырождения [8, 9]. Это говорит о том, что полный анализ модели, допускающей гомоклинические касания, принципиально невозможен.

Работа выполнена в рамках гранта Правительства РФ, контракт №11.G34.31.0039.

Список литературы

1. Тураев Д.В. Шильников Л.П. // Докл. РАН. 1995. Т. 132, вып. 5. С.596–599.

2. Shilnikov L.P. // Proc. Int. Congress of Math. 2002, China, 2002. V. 3. P. 349–372.

3. Тураев Д.В., Шильников Л.П. // Матем. сб. 1998. Т. 189. С. 291–314.

4. Тураев Д.В., Шильников Л.П. // Докл. РАН. 2008. Т. 418, вып.1.

5. Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. // Труды Московс. матем. об-ва. 1982. Т. 44. С. 150–212.

6. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V. // Regular and Chaotic Dynamics. 2009. V. 13, N1. P. 136–146.

7. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V. // Nonlimearity. 2008. V. 25, N5. P. 923–972.

8. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. // Динамические системы. 1999. Т. 6. С. 69–128.

9. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V. // Nonlimearity. 2007. V. 20, N2. P. 241–275.

BIFURCATIONS AND STRANGE ATTRACTORS

L.P. Shilnikov

The paper addresses the theory of strange attractors and their bifurcations. All known attractors can be divided into three types: hyperbolic and pseudo-hyperbolic attractors as well as quasi-attractors. The Anosov and Smale-Williams attractors are examples of hyperbolic ones and they can be born by some global bifurcations. For attractors of the second type, we give a definition and describe their main properties. Lorenz-like and spiral attractors belong to this type. They are structurally unstable, moreover, spiral attractors allow homoclinic tangencies but their perturbations do not lead to the appearance of stable periodic motions. Otherwise, quasi-attractors allow the existence of stable periodic orbits of large periods and with narrow attracting domains. The latter attractors are often met in problems of nonlinear dynamics of systems with a complicated orbit behavior.

Keywords: strange attractor, bifurcations, pseudo-hyperbolic, spiral, homoclinic tangency.

УДК 531.1

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАНЕВРА КОСМИЧЕСКОЙ ТРОСОВОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ СПУСКА С ОРБИТЫ МАЛОГО КА

В.И. Щербаков

Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург

vka114@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматривается задача доставки с орбитальной станции на Землю малого космического аппарата (КА) без использования двигательной установки. Орбита спуска малого КА формируется за счет начального импульса расталкивания объектов и последующего целенаправленного перераспределения между ними начального запаса орбитальной механической энергии. В качестве проводника механической энергии рассматривается гибкий нерастяжимый трос, соединяющий эти объекты. В отличие от схем маневра [1, 2], заложенных в программу летного эксперимента YES2 (сент. 2007 г.), в работе рассмотрена схема пассивного развертывания тросовой системы.

Ключевые слова: космическая тросовая система, пассивное развертывание, подача-выборка троса, маятниковое движение, малый КА, аналитическая модель маневра.

Условия и схема маневра

Объектом исследования является космическая тросовая система (КТС) в виде двух разнопорядковых по массе орбитальных объектов: базовый КА (БКА) и малый спускаемый КА (СА), соединенные гибким, нерастяжимым и невесомым тросом. В исходном состоянии оба объекта, как единое целое, совершают движение по круговой стартовой орбите радиуса r_c в ньютоновском гравитационном поле. Начало маневра – это импульсное отделение малого КА с относительной скоростью $\Delta V = 1 \div 15$ м/с, направленной против вектора орбитальной скорости. После этого объекты осуществляют взаимное расхождение, во время которого производится выпуск соединяющего их троса. Выпуск троса происходит в неуправляемом режиме с помощью специального устройства. Технологически эту схему разделяют на три этапа (рис. 1):

1–2. Импульсное разделение объектов и пассивное развертывание связки на заданную длину троса с обеспечением в конце участка разведения условий плавного перехода связки в режим попутного колебательного движения.

2–3. Пассивное маятниковое движение связки на тросе фиксированной длины до момента прохождения СА местной вертикали БКА.

3–4. Отделение (путем разрыва троса) и переход СА на траекторию спуска с последующим входом в плотные слои атмосферы на высоте $H_{УГА}$ (условная граница атмосферы).

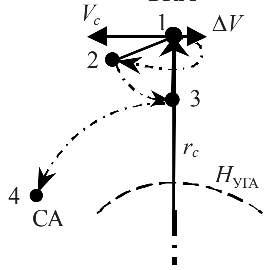


Рис. 1. Основные этапы спуска

Расчет траектории спуска производится до высоты условной границы атмосферы, поэтому ее влияние ввиду скоротечности маневра не учитывается.

Описание и характеристика модели маневра

Аналитическая модель маневра описывает движение СА на всех этапах спуска в виде алгебраических выражений. Эти выражения получены на основе использования законов Кеплера и закономерностей периодических несвободных движений КТС в поле центральной силы. Определены условия безударного сопряжения участков траекторий свободного и несвободного движения КТС [3]. Модель движения СА представлена в переменных, нормированных по соответствующим параметрам невозмущенного движения БКА на стартовой орбите. Параметром модели является относительная величина импульса расталкивания объектов $\Delta \overline{V} = \Delta V / V_c$.

Получены характеристики маневра спуска – функциональные зависимости кинематических и временных параметров движения СА в характерных точках траектории спуска (2–3–4, см. рис. 1) от параметра модели:

$\bar{t}_2 = 1.114 - 2.92\,\Delta\bar{V}$ – время развертывания КТС на заданную длину троса $\bar{l}_2 = 18.4\Delta\bar{V}$;

$V^r_{\max} = 6.44\,\Delta V$ – максимальная скорость подачи троса;

$$\bar{t}_3 = \bar{t}_2 + \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\ln(\sec\Psi + \mathrm{tg}\Psi),\ \bar{V}_3 = 1 - 50\,\Delta\bar{V},$$

$\bar{r}_3 = 1 - 18.4\,\Delta\bar{V}$, $n_{\max} = 174\,\Delta\bar{V}$ – время, скорость СА, радиус орбиты и перегрузка на момент отделения;

$\bar{r}_n = (1 - 120\Delta\bar{V})/(1 + 108\Delta\bar{V})$ – предельный радиус снижения СА и др. (рис. 2, 3).

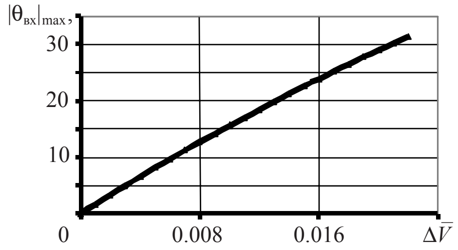


Рис. 2. Граница области допустимых значений угла входа

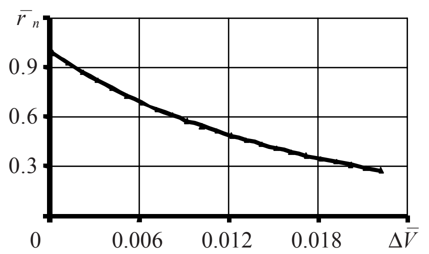


Рис. 3. Характеристика радиуса перигея орбиты спуска

Если параметры КТС и характеристики маневра разделить условно на следующие три группы:

1) параметры, характеризующие стартовые условия: r_c – геоцентрический радиус стартовой круговой орбиты, m_{CA} – масса СА, характеристики материала троса (массовая плотность, модуль упругости, предел прочности);

2) параметры, характеризующие условия входа в атмосферу: r_n – геоцентрический радиус перигея орбиты спуска, $r_{вх}$ – геоцентрический радиус условной границы атмосферы, $\theta_{вх}$ – угол входа СА в атмосферу.

3) параметры, характеризующие траекторию спуска и облик КТС: ΔV – величина трансверсального импульса разделения, t_n – время выполнения маневра, $V'_{\max}$ – максимальная скорость разматывания троса, l_2, m_{TP} – потребная длина троса и масса соединительного троса, $S_{\min}$ – минимальное допустимое сечение троса, $F_{n\max}(l_2)$, $F_{n\max}(0)$ – максимальные значения силы натяжения на концах троса,

то можно сформулировать и аналитически решить основные задачи баллистического проектирования.

Задача 1. Для заданных стартовых условий и заданных условий входа в атмосферу определить параметры, характеризующие траекторию спуска и облик КТС.

Задача 2. Для заданных стартовых условий и заданных параметров КТС и траектории спуска определить параметры входа СА в атмосферу.

Задача 3. Для заданных условий входа в атмосферу и заданным параметрам КТС и траектории спуска определить стартовые параметры.

Список литературы

1. Ишков С.А., Наумов С.А. Управление развертыванием орбитальной тросовой системы // Вестник Самарского гос. аэрокосмич. ун-та им. С.П. Королева. Самара. 2006. Вып. 1(9). С. 81–90.

2. Патент РФ № 2112714, 1998. Способ развертывания орбитальной тросовой системы / В.Г. Осипов, Н.Л. Шошунов, В.И. Кочергин.

3. Щербаков В.И. Орбитальные маневры космической тросовой системы: Монография. СПб.: ВКА им. А.Ф. Можайского, 2010. 185 с.

ANALYTICAL MODEL OF A TETHERED SATELLITE SYSTEM MANEUVER FOR THE DESCENT OF A SMALL SPACE VEHICLE FROM THE ORBIT

V.I. Scherbakov

A scheme for the passive deployment of a tethered satellite system as applied to the descent of a small space vehicle from the orbit is investigated. An analytical model of the maneuver in the form of algebraic expressions relating the initial conditions, the parameters of the tethered satellite system and re-entry conditions are developed. The investigation results are given.

Keywords: tethered satellite system, passive deployment, advance-retrieval of tether, pendular motion, small space vehicle, analytical model of maneuver.

МЕЗО-, НАНО-, БИОМЕХАНИКА И МЕХАНИКА ПРИРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

УДК 532.133

ТЕЧЕНИЕ ПРОСТОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКИХ НАНОКАНАЛАХ

А.К. Абрамян, Н.М. Бессонов

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

andabr55@gmail.com

Поступила в редакцию 16.06.2011

Исследовались течения Пуазейля и Куэтта в плоских каналах как с кристаллическими, так и с аморфными стенками. Исследовано поведение жидкости при вибрации стенок канала для течения Пуазейля. Определены профили скорости течения жидкости и ее эффективная вязкость для случаев кристаллических и аморфных стенок, а также получены временные зависимости для силы трения движущейся стенки для нескольких значений скоростей ее движения. Фурье- и вейвлет-анализ этих зависимостей показал: периодические составляющие силы трения с периодом, пропорциональным периоду решетки кристаллических стенок, отражают существование в жидкости периодической структуры, которая наводится стенками канала; в жидкости периодически возникают области разрушения периодической структуры, изначально наведенной кристаллическими стенками канала. Предлагаются уравнения, описывающие поведение простой жидкости в наноразмерных (высотой 5–20 нм) плоских каналах, учитывающие ее молекулярное строение. Предложенные уравнения дают возможность описания структурных преобразований с помощью методов континуальной механики. Введение новых степеней свободы материала произведено с помощью введения второго континуума, который восполняет роль образовывающейся новой фазы состояния. Новую фазу определяет эффект структуризации жидкости. Для случая вибрации стенок канала определено критическое значение плотности структурированной жидкости, при которой происходит запирание канала.

Ключевые слова: наноразмерный канал, течения Пуазейля и Куэтта, двухфазный континуум.

1. МД-моделирование течений Куэтта и Пуазейля в плоском наноканале и их анализ

Результаты экспериментов, проведенных в последние два десятилетия [1, 2], свидетельствуют о значительных отличиях в поведении жидкостей в наноканалах с размерами ~10 и менее молекулярных диаметров от предсказаний классических континуальных теорий. В некоторых из этих экспериментов было обнаружено значительное увеличение эффективной вязкости жидкости по сравнению с ее макроскопическим значением, а также существование слоистых структур вблизи твердых стенок. В то же время эксперименты по протеканию различных жидкостей в углеродных нанотрубках выявили увеличение на несколько порядков скорости течения по сравнению с величинами, полученными из классического уравнения Хагена – Пуазейля [2]. Эти противоречащие друг другу результаты свидетельствуют о сильном влиянии стенок на свойства жидкости в наноразмерных объемах.

При МД-моделировании течения Куэтта был выявлен пилообразный характер временной зависимости силы трения, действующей на равномерно движущуюся стенку. Такой вид этой зависимости объяснялся чередованием состояний «прилипания» и «проскальзывания» жидкости у поверхности стенок [1]. Было также найдено, что при достаточно большой скорости движения подвижной стенки такая пилообразная временная зависимость силы трения превращается в зависимость, схожую с белым шумом. С помощью МД-моделирования авторами проведено самостоятельное исследование процессов, происходящих в плоских каналах высотой 5–20 нм при течении простой жидкости.

Исследовалось течение в каналах как с кристаллическими, так и с аморфными стенками. Взаимодействия между атомами жидкости, а также атомов жидкости с атомами стенок, моделировались с помощью потенциала Леннард – Джонса. Получена зависимость силы трения от времени для движущейся кристаллической (и для аморфной) стенки при нескольких значениях скоростей их движения. Полученные временные зависимости силы трения были подвергнуты процедуре анализа сигнала с целью выявления их составляющих, отвечающих различным физическим процессам, происходящим в жидкости. Показано, что эти временные зависимости при течении Куэтта в канале с кристаллическими стенками отражают существование в жидкости периодической структуры, наведенной стенками, а также волновые процессы, происходящие поперек канала. Данные проведенного анализа сравнивались с мгновенными «фотографиями» процессов, происходящих в жидкости в разные моменты времени. В результате такого сравнения выявлено, что в полученные временные зависимости силы трения определенный вклад также вносится чередующимися процессами возникновения в жидкости областей разрушения периодической структуры, наведенной кристаллическими стенками, и ее последующего восстановления. Проведена оценка энергии, приходящейся на различные составляющие сигнала, отвечающие разным процессам, происходящим в жидкости. Проведенное МД-моделирование течения Пуазейля показало сильную зависимость расхода жидкости от расстояния между стенками и от постоянной кристаллической решетки стенки. Для аморфных стенок величины расхода совпадают с величинами, полученными по классической теории Пуазейля. При несовпадении постоянной кристаллической решетки с характерным радиусом взаимодействия молекул жидкости более чем на 8–10% расход стремится к расходу, определенному по классической формуле для течения Пуазейля.

В случае когда постоянная решетки жидкости совпадает по величине с характерным радиусом взаимодействия молекул жидкости, величина эффективной вязкости жидкости в 3 раза больше, чем для случая течения в канале с аморфными стенками при нормальной температуре.

2. Влияние вибрации стенок наноканала на течение Пуазейля

Для описания течения Пуазейля простой жидкости в канале с вибрирующими стенками используем двухкомпонентную модель, предложенную в [3]. Будем считать, что жидкость, находящаяся в канале, подвержена влиянию стенок канала, то есть имеет возможность структурироваться. В канал подается так называемая молекулярная жидкость, которая взаимодействует со структурой. Движение молекулярной жидкости внутри канала, заполненного некоторой структурированной средой, подобно протеканию через «сито», размеры «проходных» ячеек которого существенно зависят от плотности упорядоченной фазы. Во время протекания жидкости основной силой сопротивления будем считать реакцию взаимодействия частиц жидкости с ячейками структуры, которая пропорциональна разности скоростей частиц взаимодействующих компонент. Напряженное состояние структурированной среды будем моделировать как чистый сдвиг. Вибрация стенок канала на определенной частоте может приводить к запиранию канала. Запирание происходит не в тот момент времени, когда расстояние между стенками канала минимально, а с некоторой задержкой во времени. Исследование вышеупомянутых явлений проводилось с помощью МД-моделирования и сравнивалось с решениями следующей системы уравнений:

$$\nabla p = \alpha(n_s)\mathbf{v}|\mathbf{v}| + \rho_f \dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{f}},$$

$$0 \le y \le h_0 + \tilde{h}(t), \quad 0 \le x \le L,$$

$$\alpha(n_s) = \frac{k(n_s)}{D_0 - D_1 n_s},$$

$$k(n_s,) = k_0 + k_1 n_s + \cdots,$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n}\big|_{y=h(t)} = \dot{h}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n}\big|_{y=0} = 0.$$

В общем случае $k(n)$ зависит от плотности структурированных частиц жидкости. При решении задачи вибрации вязкостью пренебрегаем. Осреднение уравнения несжимаемости по высоте канала приводит к следующему соотношению между скоростью течения и вибрационными характеристиками стенки канала:

$$v_f = \dot{h}(t) + c(t), \quad h = h_0 + \tilde{h}\sin\omega t.$$

Уравнение баланса частиц имеет вид:

$$\frac{dn_s}{dt} = J(n_s, n_f), \quad \frac{dn_f}{dt} = -J(n_s, n_f).$$

Критическое значение плотности структурированных частиц жидкости при вибрирующих стенках записывается в виде:

$$\hat{n}_s = \frac{3\Delta p h_0^2}{3\Delta p h_0^2 + k_0 L^3 (h_0 \omega^2)/D_1} \cdot \frac{D_0}{D_1}.$$

Список литературы

1. Gourdon D., Israelachvili J.N. // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68. No 2. 021602. P. 1–10.

2. Majumder M., Chopra N., Andrews R., Hinds B. // Nature. 2005. Vol. 438. P. 44.

3. Абрамян А.К., Бессонов Н.М., Индейцев Д.А., Миранцев Л.В. // Изв. РАН. МТТ. 2010. №3. С. 87–96.

FLOW OF A SIMPLE FLUID IN FLAT NANOCHANNELS

A.K. Abramyan, N.M. Bessonov

Poiseuille and Couette flows in plane nanochannels with crystalline and amorphous walls are considered. The effect of the vibrating walls on the Poiseuille flow was also considered. As a result, the velocity profiles of the fluid and its effective viscosity and the time dependence of the moving wall friction force were obtained for several magnitudes of the fluid flow velocities. On the basis of Fourier and wavelets analysis of the friction force time dependence one can conclude that: the periodic components of the friction force with the period proportional to the period of the crystalline structure correspond to periodic structure in the fluid induced by the channels walls; there is a periodic process of the initiation of the domains of a fluid structure failure; there is a wave process across the channel. On the basis of the molecular dynamic simulations and experimental data taken from the literature the governing equations which describe the fluid behaviour in the above mentioned flat nanochannels (of 5– 20 nanometers size) are presented. The above equations provide a possibility to describe the observed effects in the fluid on the basis of continuum mechanics. The fluid model is a 2 phase fluid model. The one of the continuums corresponds to the new phase which can appear in the fluid flow in nanosized flat nanochannels. The critical magnitude of the two-phase fluid density which corresponds to the locking of the channel was found with the help of the suggested equations.

Keywords: nano-sized channel, Poiseuille and Couette flow, two phase continuum.

УДК 539.3

ОЦЕНКА МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КАМЕННОЙ СОЛИ, СИЛЬВИНИТА И КАРНАЛЛИТА НА УСТАНОВКЕ NANOTEST-600

В.Н. Аптуков, А.П. Скачков

Пермский госуниверситет

aptukov@psu.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Представлены результаты исследований микромеханических свойств (модуль упругости и микротвердость) отдельных зерен и межзеренных границ сильвина, галита и карналлита на установке NanoTest-600. Проведена оценка вероятностных характеристик микрорельефа поверхности сильвина на основе измерений профиля поверхности путем определения параметров Херста отдельных сегментов экспериментального ряда данных. Результаты могут быть использованы при формулировке моделей деформирования и разрушения минерального агрегата соляных пород.

Ключевые слова: каменная соль, сильвинит, карналлит, микромеханические характеристики, межзеренные границы, NanoTest-600, параметр Херста.

Микромеханические характеристики

Определение механических свойств отдельных минеральных фракций соляных пород в микро- и нанодиапазоне представляет определенный интерес как для выяснения влияния структурных факторов на прочность, так и с точки зрения изучения роли минеральных наночастиц в техно-природных процессах, происходящих при разработке полезных ископаемых. Этапу построения различных теорий должна предшествовать фаза накопления экспериментальных данных, в том числе и о механических характеристиках элементов структуры на различных масштабных уровнях. Место отбора образцов сильвинита – Второй Соликамский рудник (пласт Вс, слои №2 и № 4), подстилающей каменной соли – Четвертый Березниковский рудник, карналлита – Первый Соликамский рудник (пласт Вк, четные слои).

Эксперименты проводили на установке NanoTest-600 путем вдавливания пирамиды Берковича в образец с усилием 500 мН. На каждом образце выбирали сравнительно ровный участок, в пределах которого проводили около 100 индентирований (10×10 точек) с шагом 30 мкм. Были испытаны образцы фрагментов зерен сильвинита: (А) прозрачная фракция галита, (Б) прозрачная фракция галита с поверхностным голубым окрасом, (В) красная фракция сильвина, (Г) молочно-белая фракция сильвина; подстилающей каменной соли: (Д) прозрачные кристаллы галита, (Е) темно-серые кристаллы галита; карналлита: мясо-красная (Ж) и янтарно-перламутровая фракция (З), серая фракция (И) – предположительно зерна галита, белая пенистая фракция (К). Некоторые результаты испытаний по приведенному модулю E^*, твердости H, модулю упругости E, модулю сдвига G и объемному модулю K представлены в таблице 1.

Таблица 1

Фракция	E^*, ГПа	H, ГПа	E, ГПа	G, ГПа	K, ГПа
А	61.5±8.0	0.34±0.08	59.1±7.3	22.8±2.8	49.3±6.1
Б	64.3±12.0	0.35±0.08	62.0± 1.0	23.9±4.3	51.7±9.2
В	20.6±7.0	0.29±0.06	19.1±6.4	7.3±2.5	15.9±5.3
Г	29.4±4.1	0.23±0.03	27.4±3.7	10.5±1.4	22.8±3.0
Д	57.0±8.1	0.29±0.05	54.6±7.3	21.0±2.8	45.5±6.1
Е	59.5±6.0	0.36±0.08	57.1±5.5	22.0±2.1	47.6±4.6
Ж	30.3±4.7	0.35±0.11	28.3±4.3	10.9±1.6	23.6±3.6
З	25.2±15.0	0.18±0.09	23.4±13.8	9.0±5.3	19.5±11.5
И	20.6±14.9	0.19±0.09	19.1±13.5	7.4±5.2	15.9±11.3
К	3.9±1.4	0.05±0.01	3.6±1.3	1.4±0.5	3.0±1.1

Сильвинит состоит из фракций с различными механическими характеристиками, отличающимися по модулю Юнга в 2–3 раза, а по твердости – на 20–50%. Свойства галита, входящего как в состав каменной соли (прозрачный и темно-серый), так и в состав сильвинита (прозрачный и с голубым поверхностным окрасом), практически одинаковы (отличие 12–20%). Небольшое отличие фракций по твердости позволяет объяснить сравнительно близкие прочностные характеристики сильвинита и каменной соли. По модулю Юнга мясо-красная фракция карналлита наиболее близка к молочно-белой фракции сильвина, а по микротвердости – к прозрачным и темно-серым кристаллам галита. Для янтарно-перламутровой фракции карналлита твердость ниже почти в два раза, чем для мясо-красной фракции, а модуль Юнга – на 20%. Серая фракция, входящая в состав этих образцов, имеет приблизительно те же параметры.

При проведении 400 индентирований на площадке 190×190 мкм удалось исследовать окрестность изгибающейся границы вблизи угловой точки граничащих зерен молочно-белой фракции сильвина. На рис. 1 изображена поверхность приведенного модуля упругости (ГПа) в окрестности угловой точки.

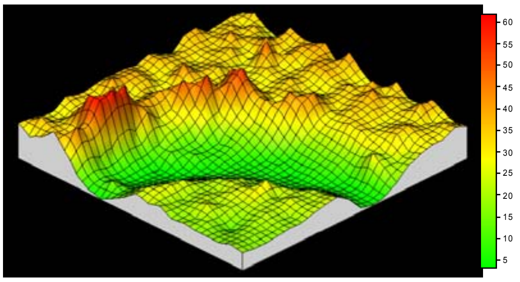


Рис. 1

Установлено, что на участке изгибающейся границы шириной около 10–20 мкм модуль E^* составляет 5-6 ГПа, а модули зерен – 18–22 и 28–32 ГПа. В отдельных локальных областях (см. рис. 1) модули достигают величин 40–50 ГПа и выше. Микротвердость межзеренной границы H = 0.03–0.05 ГПа также значительно ниже микротвердости окружающих зерен H = 0.20–0.25 ГПа и H = = 0.30–0.50 ГПа.

Характеристики микрорельефа

Проведена оценка вероятностных характеристик микрорельефа поверхности сильвина на основе измерений профиля поверхности путем определения параметров Херста отдельных сегментов экспериментального ряда данных. Показатель (параметр) Херста H определяется как угловой коэффициент наклона линии регрессии эмпирической зависимости, построенной в двойных логарифмических координатах $R/S = (\tau/2)^H$, где R/S – нормированный размах, τ – период (длина ряда) наблюдений.

Высота профиля замерялась вдоль системы параллельных линий, количество точек измерений вдоль одной линии около 2500. Для каждой линии рассматривалось три варианта статистической обработки: в прямом направлении; в обратном направлении; в обоих направлениях от центра линии.

В качестве примера на рис. 2 показана зависимость нормированного размаха от числа испытаний, построенная в логарифмических координатах, и соответствующая линия регрессии, по которой определялся параметр Херста.

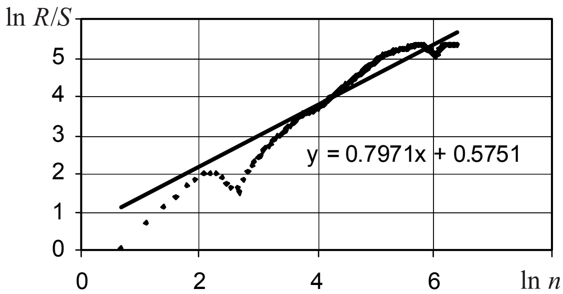


Рис. 2

Обнаружено устойчивое отличие показателей Херста на разных отрезках ($H \sim 0.8$–1.05), что говорит о качественно различном характере геометрии поверхности отдельных сегментов кристалла сильвина.

Представленные данные могут быть использованы при формулировке моделей деформирования и разрушения минерального агрегата как представительного элемента геоматериала.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность профессору С.А. Константиновой за обсуждение постановки задачи и результатов исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.2/5135).

ESTIMATION OF MICROMECHANICAL CHARACTERISTICS OF ROCK SALT, SYLVINITE AND CARNALLITE BY NANOTEST-600

V.N. Aptukov, A.P. Skachkov

The paper presents the results of the investigations of micromechanical characteristics (coefficient of elasticity and microhardness) of sylvinite, halite and carnallite particular grains and grain boundaries performed on the NanoTest-600. Probabilistic characteristics of the sylvinite surface microrelief are estimated on the basis of surface profile alterations by finding Hurst parameters for particular segments of experimental data series. These results can be used for developing deformation models and breakout patterns of salt rock mineral aggregate.

Keywords: rock salt, sylvinite, carnallite, micromechanical characteristics, grain boundaries, NanoTest-600, Hurst parameter.

УДК 539.422.23; 531.355

О ВЛИЯНИИ НЕРАВНООСНОГО СЖАТИЯ НА МЕХАНИЧЕСКИЙ ОТКЛИК БЛОЧНЫХ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕД ПРИ СДВИГОВОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

С.В. Астафуров, А.В. Андреев, В.В. Сергеев

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

astaf@ispms.tsc.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Исследуются теоретически закономерности механического отклика фрагментов блочных геологических сред, находящихся в условиях неравноосного сжатия, при сдвиговом деформировании. Исследование проведено на основе компьютерного моделирования методом подвижных клеточных автоматов. Результаты расчетов показали, что в блочной геосреде увеличение уровня внутренних напряжений приводит к смене доминирующего деформационного механизма, а это ведет к направленному изменению ряда основных характеристик отклика блочной среды, в частности предельной сдвиговой деформации, сдвиговой прочности и т.д.

Ключевые слова: блочная среда, неравноосное сжатие, сдвиговое деформирование, сдвиговая прочность, разрушение, дилатансия, дилатансионные механизмы.

Фрагменты земной коры находятся в сложном напряженно-деформированном состоянии. В частности, выделяются области, характеризующиеся как относительно высокими, так и низкими уровнями напряжений, а также различными соотношениями между давлением и интенсивностью касательных напряжений. При этом даже на достаточно большой глубине, где давление велико, распределение напряжений является существенно неоднородным [1]. Одной из важнейших характеристик напряженно-деформированного состояния горного массива является стесненность, которая в значительной степени влияет на интенсивность и последовательность вовлечения механизмов деформирования и режим разрушения среды [2]. Поэтому одним из важнейших направлений исследования закономерностей механического отклика горных пород является выявление роли стесненных условий. Отдельные области массивов горных пород, к которым относятся зоны активных разломов и мощных трещин, наряду со сжатием, испытывают и значительные сдвиговые деформации [3], причем вследствие неравномерности распределения напряженного состояния в среде величина сжатия системы в разных направлениях может существенно различаться. Таким образом, деформирование сдвиговых зон как на значительных глубинах, так и вблизи дневной поверхности зачастую происходит в условиях неравноосного сжатия. Поэтому актуальной проблемой является исследование влияния отношения напряжений, действующих на сдвиговую зону в продольном (σ_l) и нормальном (σ_n) по отношению к ее линии направлениях (далее безразмерный параметр $C_\sigma = \sigma_l/\sigma_n$ будем называть степенью стеснения блочной среды), на основные параметры механического отклика среды. Настоящее исследование посвящено теоретическому изучению влияния степени стеснения на сдвиговую прочность, величину предельной сдвиговой деформации и дилатансию блочной среды при сдвиговом деформировании. Исследование проводилось путем компьютерного моделирования методом подвижных клеточных автоматов [4]. Этот метод является разновидностью метода частиц и на протяжении ряда лет успешно применяется для изучения особенностей деформирования и разрушения консолидированных, сыпучих и геологических сред.

Для решения поставленных задач была развита двухмерная структурная модель фрагмента блочной среды. В рамках построенной модели геологическая среда представляется в виде ансамбля блоков, разделенных границами, со свойствами, существенно отличающимися от свойств структурных элементов. Для блоков задавалась линейная функция отклика, отвечающая высокопрочному материалу, деформирующемуся упруго. При этом задаваемые механические характеристики границ раздела способствовали локализации и накоплению на них необратимых деформаций. Физической причиной локализации является повышенная плотность дефектов/повреждений разного масштаба в интерфейсных зонах. Механические свойства блоков соответствовали граниту, границ раздела – брекчированным породам. Для математического описания упругопластического отклика границ раздела и блоков в рамках метода подвижных клеточных автоматов применялась модель изотропных упругопластических сред, построенная на основе деформационной теории пластичности с разгрузкой по упругому закону [4]. Использовалось приближение, аналогичное приближению плоско-деформированного состояния. Наличие в исходной структуре блочной среды повреждений/дефектов, размер которых соизмерим с шириной межблочных интерфейсных зон, учитывалось заданием несвязанных пар автоматов на границах раздела. Образование новых повреждений в процессе деформирования моделировалось разрывом межавтоматных связей при достижении величиной интенсивности напряжений в паре автоматов предельного значения. Исходное напряженное состояние образца задавалось путем двухосного сжатия с силами в вертикальном и в горизонтальном направлениях, после чего стесненный образец подвергался сдвиговому деформированию с постоянной скоростью.

Результаты теоретического изучения общих закономерностей поведения блочных геологических сред в условиях неравноосного сжатия при сдвиговом деформировании показали, что важным фактором, определяющим относительный вклад различных деформационных механизмов в интегральный механический отклик блочной системы, является степень стеснения образца. Так, увеличение сжимающих напряжений в направлении приложения сдвигового усилия (σ_l) приводит к снижению вклада деформационных механизмов низких структурных уровней, приводящих к накоплению необратимых деформаций в межблочных интерфейсных областях. Причиной этого является увеличение степени деградации среды в исходном напряженно-деформированном состоянии, приводящее к быстрому формированию несплошностей на наиболее ослабленных границах раздела блоков в процессе сдвигового деформирования. При больших степенях стеснения формирование таких несплошностей и их объединение в межблочные трещины становится доминирующим деформационным механизмом в блочной среде.

Смена доминирующего механизма деформации проявляется в виде изменения тренда интегральных характеристик механического отклика среды, таких как сдвиговая прочность (τ_c), величина предельной сдвиговой деформации (γ_c), а также изменение объема (дилатансия) сдвигаемой зоны (ΔV_c) к моменту достижения предельного состояния. При этом зависимости данных параметров от степени стеснения (параметра C_σ) имеют ярко выраженный нелинейный пороговый характер. В частности, с ростом степени стеснения от нуля (при отсутствии бокового давления) до некоторого порогового значения наблюдается возрастание основных параметров механического отклика среды до некоторого максимального значения. Дальнейшее увеличение параметра C_σ (выше порогового значения) приводит к убыванию исследуемых характеристик (τ_c, γ_c и ΔV_c). Данный эффект связан с «вымыванием» деформационных механизмов низких масштабных уровней и их замещением механизмами более высокого структурного ранга, которые не обеспечивают высоких прочностных и деформационных характеристик среды. Таким образом, степень вовлечения разноранговых механизмов необратимого деформирования блочной среды в значительной степени зависит от напряженного состояния системы и определяет целый комплекс интегральных характеристик ее механического отклика.

Необходимо отметить, что смена доминирующего деформационного механизма с ростом степени стеснения сопровождается сменой основного механизма дилатансии среды. Так, с приближением параметра C_σ к пороговому значению возрастает вклад в дилатансию от механизма, связанного с проскальзыванием поверхностей исходных и образующихся повреждений. Это сопровождается существенным (до 2 раз) увеличением значений основных дилатансионных параметров (изменение объема и коэффициента дилатансии среды).

Проскальзывание поверхностей мезоповреждений является деформационным механизмом с относительно высоким пороговым напряжением активизации; при этом величина порога значительно возрастает с ростом C_σ. Поскольку при высоких степенях стеснения происходит снижение сдвиговой прочности среды, дилатансионный механизм проскальзывания вовлекается на все более поздних этапах нагружения (данный эффект связан с затрудненностью локального сдвига при высоких степенях стеснения). В связи с этим его вклад в изменение объема среды снижается и на первый план выходит дилатансионный механизм, связанный с расширением несплошностей (пор), который характеризуется меньшим порогом активизации. Однако расширение пор не обеспечивает столь значительного изменения объема геосреды, вследствие чего имеет место убывание зависимости $\Delta V_c(C_\sigma)$.

В целом результаты исследования свидетельствуют о возможности введения некоторого безразмерного параметра, характеризующего режим механического отклика среды при сдвиговом деформировании. В общем случае этот параметр является функцией, связывающей приложенные напряжения и реологические характеристики среды (в частности, предел упругости материала межблочных границ) на рассматриваемом масштабном уровне. Важным фактором, который должен быть учтен при построении такого параметра, является степень стеснения среды.

Авторы выражают благодарность д.ф.-м.н. профессору С.Г. Псахье и д.ф.-м.н. Е.В. Шилько за помощь при проведении исследований и обсуждении результатов.

Работа выполнена в рамках проекта 7.11.1.6 программы фундаментальных исследований СО РАН, при поддержке проекта программы Президиума РАН 22.2 и проекта Президента РФ "МК-130.2010.5".

Список литературы

1. Кочарян Г.Г., Спивак А.А. Динамика деформирования блочных массивов горных пород. М.: ИКЦ "Академкнига", 2003. 423 с.
2. Николаевский В.Н. // Геология и геофизика. 2006. Т. 47, №5. С. 646–656.
3. Астафуров С.В., Шилько Е.В., Псахье С.Г. // Физическая мезомеханика. 2009. Т. 12, №6. С. 23–32.
4. Psakhie S.G. et al. // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2001. V. 37, No. 1–3. P. 311–334.

ON THE INFLUENCE OF NON-EQUIAXIAL COMPRESSION ON THE MECHANICAL RESPONSE OF BLOCK-STRUCTURED GEOLOGICAL MEDIA UNDER SHEAR DEFORMATION

S.V. Astafurov, A.V. Andreev, V.V. Sergeev

The paper is devoted to theoretical investigation of peculiarities of mechanical response of fragments of block-structured geological media that experience non-equiaxial compression under shear deformation. The investigation was based on computer-aided simulation using the movable cellular automaton method. The results of investigations show that increasing the level of inner stresses in bloc-structured medium leads to the changing of the dominated deformation mechanism. This leads to changing of some characteristics of response of the medium, such as values of ultimate shear strain, shear strength, etc.

Keywords: block-structured medium, nonequiaxial compression, shear deformation, shear strength, fracture, dilatancy, dilatancy mechanisms.

УДК 539.3, 517.958

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ С МИКРОСТРУКТУРОЙ СЛОЖНОЙ РЕШЕТКИ

Э.Л. Аэро

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

16aero@mail.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Предлагается нелинейная теория сложной кристаллической решетки, состоящей из двух взаимопроникающих подрешеток, характерных для полупроводниковых кристаллов (алмаз, кремний, германий и др.). Основное внимание уделяется эффектам ближнего порядка, ответственным за кардинальные структурные изменения (в том числе и за возникновение дефектов и новой фазы), и так называемым реконструктивным переходам – изменениям класса симметрии решетки. Выявлены решения уравнений деформирования, описывающие движение периодических волн, а также дефектов микроструктуры типа кинков и солитонов. Рассмотрены их взаимные превращения при определенных напряжениях и скоростях перемещения.

Ключевые слова: кристаллическая решетка, дефекты, солитоны, кинки.

Основные уравнения

Основные уравнения, предложенные в работах [1–4]

$$\rho\ddot{U} = \lambda U_{,xx} - [s(1-\cos u)]_{,x},$$
$$\mu\ddot{u} = ku_{,xx} - (p - sU_{,x})\sin u. \qquad (1)$$

Первое уравнение (акустических колебаний) учитывает, наряду с дальнодействующими силами, зависящими от градиентов макросмещений (деформаций) $U_{,x}$, также и силы, обусловленные структурными изменениями, зависящими от градиентов микросмещений $u_{,x}$. Второе уравнение («оптических» колебаний) содержит нелинейные силы взаимодействия подрешеток (второе слагаемое справа), которые имеют периодический характер в силу инвариантности сложной решетки по отношению к сдвигам подрешеток на один период $u = 2\pi$. Далее, ρ – плотность массы, μ – микроплотность, λ – макроскопическая упругось, k – микроупругость, s – коэффициент микрострикции, p – межчастичный потенциальный барьер.

Уединенные и периодические волны

Объектами настоящего исследования будут специальные решения уравнений (1) – уединенные и периодические волны. Первые, уединенные решения, имеют вид солитонов и кинков:

$$\mathrm{tg}(u/2) = \pm a\,\mathrm{ch}\zeta, \quad \mathrm{tg}(u/2) = \pm a\,\mathrm{sh}\zeta,$$
$$\zeta = (q - q_0)/L = (b - x + Vt)/L. \qquad (2)$$

В отличие от кинков, солитоны – это медленные дефекты, скорость которых V много ниже скорости линейного звука $V_s = \lambda/\rho$. Напротив, кинки могут двигаться не только со сверхзвуковой скоростью, но значительно ее превышать, выходя на уровень скоростей оптической моды $V_k = k/\mu$. Оказывается, что в пределах предложенной нелинейной теории можно исследовать переход уединенных волн (кинков и солитонов) между собой, а также их переход в периодические делокализованные волны. Переход происходит при определенном напряжении σ. Но кинки и солитоны могут перерождаться в периодические волны и с убыванием напряжения растяжения (ростом эффективного потенциального барьера $\tilde{p}_1$). Это наблюдается, когда напряжение преодолевает определенный порог и характерный масштаб (ширина дефекта) L становится мнимой величиной ($l = -iL$), а $L^2 < 0$. В этом случае гиперболические функции в правых частях приведенных выше решений преобразуются в тригонометрические. Тогда решения уравнения (1) принимают вид:

$$\mathrm{tg}(u/2) = \pm a\cos(q - q_0)/l,$$
$$\mathrm{tg}(u/2) = \pm a\sin(q - q_0)/l, \quad \alpha^2 = -a^2. \qquad (3)$$

Для сохранения микросмещения u в области действительных чисел необходимо взять амплитудный множитель в предыдущих формулах (2) в виде $a = i\alpha$. Точка перехода фононных мод в кинковые (и наоборот) достигается при больших волновых периодах (l) и скорости $V = V_t$, вычисляемой по формуле $V_t^2 = V_s^2 - \ -(\sigma + 2s)s/p\rho$.

В таком виде критерий перехода дает прямую связь напряжения со скоростью при переходе V_t. Таким образом, показано, что волны микросмещений испытывают переходы типа уединенная – делокализованная волна в зависимости от величины и знака внешнего напряжения σ. Это дает возможность управления формой макроскопической волны (уединенной или распределенной), ее скоростью и переносимой энергией в широких интервалах значений. Макроскопическая волна $U(\zeta)$, порожденная структурным солитоном и структурным кинком, определяется соответственно соотношениями:

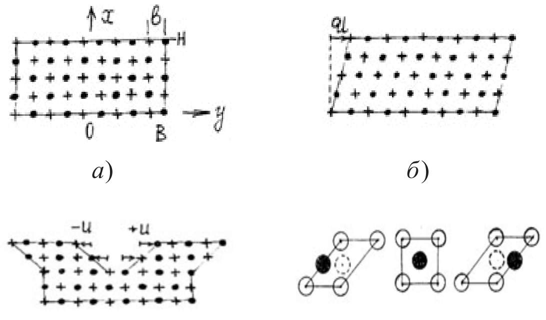
$$\lambda(1-V^2/V_s^2)U_{,q} = s\frac{2a^2\mathrm{ch}^2\zeta}{1+a^2\mathrm{ch}^2\zeta}+\sigma,$$

$$\rho(V_s^2-V^2)U_{,q} = s\frac{2a^2\mathrm{sh}^2\zeta}{1+a^2\mathrm{sh}^2\zeta}+\sigma, \qquad (4)$$

$$q = x - Vt.$$

Очевидно, что макроскопические деформации, порожденные микроскопическими дефектами, оказываются четными функциями анзаца q.

На рис. 1 изображены: *а* – сложная решетка, состоящая из двух подрешеток; *б* – макроскопическая деформация без сдвига подрешеток; *в* –микродеформации при двойниковом разделении; *г* – бифуркация структуры элементарной ячейки при микродеформации.



а) *б*) *в*) *г*)

Рис. 1

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-01-00243-а.

Список литературы

1. Aero E.L., Bulygin A.N. Nonlinear theory of cardinal rearrangement of the solid body structure in the field of intensive pressure. In: Mechanics of Generalized Continua. Advances in Mechanics / Eds. G.A. Maugin, A.V. Metrikine. 2010. Vol. 21. Part 4. P. 121–129.

2. Aero E.L., Bulygin A.N. // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2010. V. 22, No 9.

3. Аэро Э.Л., Булыгин А.Н. // Механика твердого тела. 2010. №5. С. 19–41.

4. Aero E.L., Bulygin A.N. // Acoustical Physics. 2010. Vol. 56, No 6. P. 811–830.

NONLINEAR THEORY OF DEFORMATION OF ELASTIC BODIES WITH MICROSTRUCTURE OF COMPLEX LATTICE

E.L. Aero

A nonlinear theory of a complex crystalline lattice composed of two mutually penetrating sub-lattices typical of semiconductive crystals, such as diamond, silicon, germanium, etc., is proposed. Special attention is attracted to short-range order effects responsible for cardinal structural changes, including the generation of defects and a new phase, and to so called reconstructive transitions, i.e. changes of crystal symmetry class. Solutions of deformation equations, which describe a motion of periodical waves and kink – and soliton – like defects of microstructure, are found. Their mutual transitions for certain tensions and velocities of travel are considered.

Keywords: cristalline lattice, defects, solitons, kinks.

УДК 550.3+532.5

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ЯДРА ЗЕМЛИ В СОБСТВЕННОМ И ВНЕШНЕМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

А.А. Баймухаметов

Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова, Алматы (Казахстан)

abayab@mail.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Изучен колебательный режим движения внутреннего ядра Земли. Получены численные параметры при различных начальных отклонениях. Найден период колебаний при учете и без учета сил вязкого сопротивления. Задача рассмотрена в постановке о поступательном движении двух тел. Численный расчет проведен для систем «Земля–Луна», «Земля–Солнце».

Ключевые слова: ядро, внутреннее, внешнее, Земля, вязкое сопротивление, колебание, Луна, Солнце.

Под действием приливного воздействия Луны и Солнца ядро Земли испытывает вынужденные перемещения [1, 2]. Об этом свидетельствуют материалы астрономических и геофизических наблюдений. Кроме подвижности, земное ядро имеет осевое вращение, отличное от вращения Земли в целом. В [3] установлены характерные периоды подвижности земного ядра и выбрана модель, обобщающая взаимосвязь наблюдаемых процессов.

Невозможностью непосредственного наблюдения и измерения обусловливается необходимость теоретического исследования малых колебаний внутреннего ядра Земли в собственном гравитационном поле и при взаимодействии с вязким внешним ядром, а также в постановке о поступательном движении двух тел: для систем «Земля–Луна» и «Земля–Солнце» [4, 5].

Силы вязкого сопротивления внешнего ядра при поступательном смещении твердого внутреннего ядра от положения равновесия найдены путем постановки и решения соответствующей гидродинамической задачи Навье–Стокса:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial R}=\nu\left(\Delta v_R-\frac{2v_R}{R^2}-\frac{2}{R^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{2v_\theta\operatorname{ctg}\theta}{R^2}\right),$$
$$\frac{1}{\rho R}\frac{\partial p}{\partial\theta}=\nu\left(\Delta v_\theta+\frac{2}{R^2}\frac{\partial v_R}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{R^2\sin^2\theta}\right). \quad (1)$$

Формула для сил вязкости:

$$F_v=\pi\mu U\times \quad (2)$$
$$\times\frac{-16ab^3(b^3-a^3)-8ab(b^5-a^5)-16a^4b(b^2-a^2)}{9(b-a)(b^5-a^5)-5(b^3-a^3)^2}.$$

Здесь μ – динамический коэффициент вязкости внешнего ядра, U – скорость поступательного смещения внутреннего ядра, a – радиус внутреннего ядра, b – радиус внешнего ядра.

По собственному гравитационному полю ядра Земли определена возвращающая сила

$$F_G=-\frac{4\pi}{3}Gm\rho\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)x, \quad (3)$$

где G – гравитационная постоянная, m – масса твердого внутреннего ядра, ρ – плотность внешнего вязкого ядра, ρ_0 – плотность внутреннего ядра.

Уравнение движения внутреннего ядра в собственном поле:

$$m\ddot{x}+n\dot{x}+cx=0, \quad (4)$$

где

$$n=\pi\mu_2\times \quad (5)$$
$$\times\frac{16ab^3(b^3-a^3)+16a^4b(b^2-a^2)+8ab(b^5-a^5)}{9(b-a)(b^5-a^5)-5(b^3-a^3)^2},$$
$$c=\frac{4\pi}{3}Gm\rho\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

При геофизических данных найдены параметры, определяющие решение задачи, а также период колебаний внутреннего ядра при учете сил вязкого сопротивления и при отсутствии этих сил.

Изучено колебательное движение внутреннего ядра при различных начальных отклонениях в зависимости от изменения значений коэффициента динамической вязкости внешнего ядра, а также величин плотности как внутреннего, так и внешнего ядра Земли.

Исследовано колебательное движение внутреннего ядра Земли в ньютоновом поле внешнего притягивающего центра. При этом в уравнениях движения, кроме сил вязкого сопротивления и сил собственного гравитационного поля, учтена сила, определяемая как разность действующей со стороны притягивающего центра гравитационной силы и силы инерции.

Движение внутреннего ядра в гравитационном поле внешнего притягивающего центра описывается уравнением:

$$m\ddot{x} + n\dot{x} + \left(c - 2G\frac{Mm}{R^3}\right)x = 0, \tag{6}$$

где n, c определяются вышеприведенными формулами (5).

Найдено влияние механических свойств ядра и внешнего притягивающего центра на его колебательный режим. В качестве примера рассмотрены поле притяжения Луны и поле притяжения Солнца. Результаты численных расчетов отражены на рис. 1, 2, на которых представлены графики колебаний внутреннего ядра Земли.

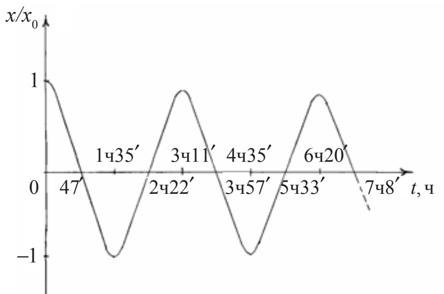


Рис. 1

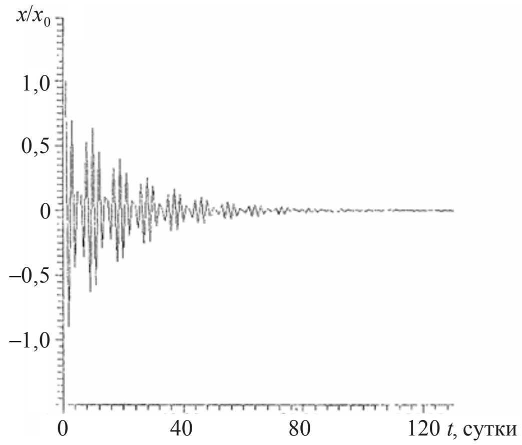


Рис. 2

Список литературы

1. Авсюк Ю.Н. О движении внутреннего ядра Земли // ДАН СССР. 1973. Т. 212, №5. С. 1097–1100.

2. Авсюк Ю.Н. Колебательный режим эволюции системы Земля–Луна и его сопоставление с геологическими процессами фанерозоя // ДАН СССР. 1986. Т. 287, №5. С. 1103–1104.

3. Авсюк Ю.Н., Адушкин В.В., Овчинников В.М. Комплексное исследование подвижности внутреннего ядра Земли // Физика Земли. 2001. №5. С. 64–75.

4. Ержанов Ж.С., Калыбаев А.А., Баймухаметов А.А., Коржымбаев Т.Т. Движение и устойчивость слоистой Земли. Алма-Ата: Наука, 1986. 240 с.

5. Баймухаметов А.А. Механика геопульсаций. Алматы: Гылым, 2003. 244 с.

ON THE INTERACTION OF AN INTERNAL AND EXTERNAL CORE OF THE EARTH IN ITS OWN AND AN EXTERNAL GRAVITATIONAL FIELD

A.A. Baimukhametov

The oscillatory mode of movement of an internal core of the Earth is studied. Numerical parameters are received for various initial deviations. The period of fluctuations is found with and without taking account of the forces of viscous resistance. The problem is considered in the formulation of the progress of two bodies. «Earth–Moon» and «Earth–Sun» systems are numerically analyzed.

Keywords: core, internal, external, Earth, viscous resistance, fluctuation, Moon, Sun.

УДК 531:534:57

СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В КРОВЕНОСНОМ СОСУДЕ

В.А. Батищев, Н.Д. Ломакин

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

batish@math.rsu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

На основе системы Навье – Стокса численно и асимптотически рассчитаны две серии спиральных волн, распространяющихся в кровеносном сосуде, ограниченном тонкой вязко-упругой оболочкой. Короткие волны заполняют все поперечное сечение сосуда. Длинные волны локализованы в пограничном слое вблизи стенки сосуда.

Ключевые слова: кровеносный сосуд, спиральные волны, течение Пуазейля, пограничный слой, критический слой.

Математическая модель

Кровеносный сосуд моделируется полубесконечным круговым цилиндром, ограниченным тонкой вязкоупругой оболочкой толщины h и радиусом срединной поверхности a. Динамические уравнения цилиндрической оболочки приведены в [1]. Движение жидкости изучается на основе нелинейной системы Навье – Стокса с учетом условий осевой симметрии. Исследуются волны в жидкости и в оболочке, которые удовлетворяют условиям периодичности по времени с заданной частотой ω и затухают с ростом осевой координаты z. В [1, 2] найдены длинные пульсовые волны, распространяющиеся в кровеносном сосуде, причем поля скоростей, давлений и смещений оболочки представлены в виде рядов Фурье с учетом нулевой гармоники, которая представляет собой течение Пуазейля. Полученные разложения оказались неравномерными по осевой координате, так как старшие члены рядов Фурье уже не описывают длинных волн, а спиральное течение оказалось сосредоточенным только в колеблющемся пограничном слое вблизи оболочки.

Асимптотические разложения

Решение задачи, описывающее спиральное течение, распространяющееся по всему поперечному сечению цилиндра, представлено в виде суммы длинных волн и волн конечной длины:

$$v_z = v_{z0}(r, z_1, t, \varepsilon_k) + \varepsilon_k^2 w_z(r, z, z_1, t, \varepsilon_k),$$
$$v_\theta = \varepsilon_k v_{\theta 0}(r, z_1, t, \varepsilon_k) + \varepsilon_k w_\theta(r, z, z_1, t, \varepsilon_k), \qquad (1)$$
$$u_z = u_{z0} + \varepsilon_k^4 u_{z1}.$$

Аналогичные формулы построены для радиальной компоненты скорости, смещений оболочки u_r, u_θ и давления. Здесь r, θ, z – цилиндрические координаты, $z_1 = \varepsilon_k z$ – медленная осевая координата, $\varepsilon_k = \omega a / c_0$ – малый параметр, c_0 – фазовая скорость Моуэнса – Кортевега [2]. Функции v_{z0}, $v_{\theta 0}$, u_{z0} описывают длинные пульсовые волны в цилиндре, а w_z, w_θ, w_{z1} – волны конечной длины. Отметим, что волны конечной длины затухают значительно быстрее, чем длинные волны, поэтому область их определения лежит недалеко от входа в цилиндр.

Все слагаемые в (1) представлены в виде асимптотических рядов по степеням введенного малого параметра. Главные члены этих рядов для функций v_{z0}, $v_{\theta 0}$, u_{z0} удовлетворяют уравнениям движения в длинноволновом приближении и найдены в [1, 2]. Краевые задачи для главных приближений, описывающих волны конечной длины, получены как возмущения пульсовой волны. Приведем уравнение для определения окружной компоненты скорости жидкости:

$$\frac{\partial w_{\theta 0}}{\partial t} + Rs\, v(r, z_1, t) \frac{\partial w_{\theta 0}}{\partial z} = \varepsilon_\nu^2 \left(\nabla^2 w_{\theta 0} - \frac{w_{\theta 0}}{r^2} \right). \quad (2)$$

Здесь $Rs = U/(\omega a)$, U – пиковая скорость пульсовой волны, ε_ν – малый параметр, пропорциональный толщине пристеночного пограничного слоя. На стенках цилиндра функция $w_{\theta 0}$ обращается в нуль, т.е. выполняется условие прилипания, как на поверхности жесткого цилиндра. Вязкоупругие свойства оболочки для волн конечной длины учитываются теперь в старших приближениях. Функция $v(r, z_1, t)$ определяется значением осевой компоненты скорости пульсовой волны и является заданной.

Расчеты спиральных волн

Спиральные волны найдены путем решения задачи на собственные значения для уравнения (2). Осевая компонента длинной пульсовой волны определена в [1, 2], а функция $v(r, z_1, t)$ представлена в виде суммы $v = f(t, z_1) + V_0(r) + h(r, z_1, t, \varepsilon_\nu)$, где f и h найдены методом пограничного слоя, а $V_0(r) = U_0(1 - r^2)$ – скорость среднего стационарного течения крови. Отметим, что пиковая скорость пульсовой волны превышает скорость среднего течения приблизительно в 8–10 раз. Решения уравнения (2) найдены асимптотически, причем поправка к спиральной моде за счет пристеночного пограничного слоя оказалась малой. Главный вклад в выражение для спиральных мод определяется формулой

$$w_{\theta 0} = Q_{n,m}(t, z_1) F_{n,m}(r) \exp(i(k_{n,m} z - nt)).$$

Здесь n, m = 1, 2, 3, … Значению $n = 0$ соответствуют «квазистационарные» моды. Влияние пульсовой волны учитывается функцией $Q_{n,m}$. Амплитуды $F_{n,m}$ и комплексные декременты $k_{n,m}$ определены как численно, так и асимптотически. Показано, что фазовые скорости и декременты затухания спиральных волн монотонно убывают как с ростом скорости среднего течения, так и с уменьшением частоты.

Для мод при $m = 1$, $n > 0$ возникает критический слой вблизи оси цилиндра. Собственные функции локализуются в этом слое, причем эффект локализации усиливается как с ростом номера моды, так и с ростом частоты, а также с уменьшением вязкости жидкости. На рис. 1 изображены амплитуды спиральных мод при $n = 1$, $m = 1$.

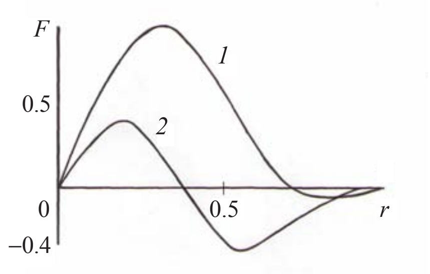


Рис. 1

Оси абсцисс и ординат соответствуют радиальной координате и действительной части (для кривой *1*) и мнимой части (для кривой *2*) амплитуды $F_{n,m}$.

Список литературы

1. Богаченко С.Е., Устинов Ю.А. // Российский журнал биомеханики. 2009. Т. 13, № 1. С. 29–42.

2. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.

SPIRAL WAVES IN A BLOOD VESSEL

V.A. Batishev, N.D. Lomakin

Based on Navier–Stokes equation, two collections of spiral waves in a blood vessel with a thin viscoelastic cover are calculated using numeric and asymptotic methods. The short waves spreade all over the cross-section of the vessel. The long waves localize in the boundary layer near the wall of the vessel.

Keywords: lood vessel, spiral waves, Puazeil flow, boundary layer, critical layer.

УДК 517.95+519.63+533.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИРОДНЫХ ВОСХОДЯЩИХ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКОВ ТИПА ТОРНАДО

С.П. Баутин*[1]*, П.С. Баутин*[1]*, Е.Д. Белова*[2]*, В.Е. Замыслов*[1]*,
***И.Ю. Крутова*[1]*, А.В. Мезенцев*[1]*, А.Г. Обухов*[3]**

[1]Уральский госуниверситет путей сообщения, Екатеринбург
[2]Снежинский физико-технический институт – филиал МИФИ
[3]Тюменский государственный нефтегазовый университет

SBautin@math.usurt.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Аналитическими и численными методами с помощью построения точных и приближенных решений системы уравнений газовой динамики моделируется движение воздуха в придонной и вертикальной частях восходящего закрученного потока. В частности, доказано, что при стоке первоначально однородного и покоящегося газа в придонной части за счет действия силы Кориолиса возникает закрутка газа соответственно в положительном и в отрицательном направлениях для Северного и Южного полушарий. При анализе движений газа в вертикальной части показана возможность существования течений, закрученных как по всему сечению вертикальной области, так и только в его кольцевой части. Во втором случае в центральной части возможна либо область вакуума, либо область покоящегося газа с ненулевой плотностью. Также установлено, что с течением времени вся вертикальная часть движется более значительно в западном и менее значительно в северном направлениях.

Ключевые слова: система уравнений газовой динамики, аналитические и численные решения, торнадо, тропические циклоны.

В монографии [1] предложена схема возникновения и устойчивого функционирования восходящих закрученных потоков (ВЗП). Эксперименты, проводимые в Объединенном институте высоких температур РАН (см., например, [2]), подтверждают эту схему в части возникновения и начального функционирования ВЗП.

Для математического моделирования движения воздуха в ВЗП исследуются решения системы уравнений газовой динамики (СУГД):

$$c_t + uc_r + \frac{\upsilon}{r}c_\varphi + \omega c_z + \frac{\gamma-1}{2}c \times$$
$$\times\left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{\upsilon_\varphi}{r} + \omega_z\right) = 0,$$

$$u_t + uu_r + \frac{\upsilon}{r}u_\varphi - \frac{\upsilon^2}{r} + \omega u_z + \frac{2}{\gamma-1}cc_r =$$
$$= (2\Omega\sin\psi)\upsilon - (2\Omega\cos\psi\cos\varphi)\omega,$$

$$u_t + u\upsilon_r + \frac{u\upsilon}{r} + \frac{\upsilon}{r}\upsilon_\varphi + \omega\upsilon_z + \frac{2}{\gamma-1}\frac{c}{r}c_\varphi =$$
$$= -(2\Omega\sin\psi)u + (2\Omega\cos\psi\cos\varphi)\omega,$$

$$\omega_t + u\omega_r + \frac{\upsilon}{r}\omega_\varphi + \omega\omega_z + \frac{2}{\gamma-1}cc_z =$$
$$= (2\Omega\cos\psi\cos\varphi)u - (2\Omega\cos\psi\sin\varphi)\upsilon - g,$$

описывающие изэнтропические течения идеального политропного газа с уравнением состояния $p = \rho^\gamma/\gamma$ ($\gamma = \mathrm{const} > 0$ – показатель политропы газа). В приведенной системе t, r, φ, z – независимые переменные, искомые функции: $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$ – скорость звука; u, υ – радиальная и окружная проекции вектора скорости в плоскости xOy; ω – проекция вектора скорости на ось Oz; Ω – угловая скорость вращения Земли, g – ускорение свободного падения, ψ – широта рассматриваемой точки.

Если для СУГД на цилиндре $r = r_0 > 0$ задать непрерывный сток

$$u(t,r,\varphi,z)\big|_{r=r_0} = u^0(t), \quad u^0(0) = 0, \quad [u^0(t)]' < 0,$$

и на звуковой C^+-характеристике, распространяющейся по покоящемуся в поле тяжести газу (по фоновому течению), задать условия непрерывного примыкания искомого течения, возникающего при стоке, к фоновому течению, то такая характеристическая задача имеет единственное аналитическое решение. Анализ первых коэффициентов бесконечных сходящихся рядов, передающих это течение, приводит к следующему выводу: в первоначально покоящемся газе наряду с радиальным движением возникает и окружное, причем в случае Северного полушария закрутка газа идет в положительном направлении, в случае Южного – в отрицательном. Численными расчетами методом характеристик описана динамика выхода одномерного течения с плавным стоком на стационарный режим. В таблице приведены размерные значения радиальной и окружной скоростей, полученные в одном конкретном расчете.

Таблица

r	10 км (приток)	1 км	200 м	20 м (сток)
$u(t_1, r)$ км/час	0.3	7	18	180
$u(t_2, r)$ км/час	0.3	7	26	180
$\upsilon(t_1, r)$ км/час	0	5	24	384
$\upsilon(t_2, r)$ км/час	0	8	40	654
$[u^2(t_1,r) + \upsilon^2(t_1,r)]^{1/2}$	0.3	8.6	30	424
$[u^2(t_2,r)+\upsilon^2(t_2,r)]^{1/2}$	0.3	10.6	48	678

В виде сходящихся рядов по степеням характеристической переменной построено трехмерное нестационарное течение в окрестности непроницаемой плоскости $z = 0$. Показано, что первые коэффициенты таких рядов являются решениями системы уравнений, ранее используемой для исследования плоских спиральных течений.

Для моделирования течения в вертикальной части ВЗП строятся начальные слагаемые бесконечных сходящихся рядов по степеням малых параметров, входящих в СУГД регулярно:

$$U(r,\varphi,z)=U_0+U_1 g+U^1\Omega+\ldots, \quad U=(c^2,u,\upsilon,\omega);$$

а также по степеням характеристической переменной в окрестности контактной границы

$$\eta = 0,\ \eta = z - z_0(t,x,y):$$

$$U(t,x,y,\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(t,x,y)\frac{\eta^k}{k!}$$

в случае использования не полярных координат r, φ, а декартовых x, y. Анализ построенных коэффициентов показал возможность существования течений, закрученных как по всему сечению вертикальной области, так и только в его кольцевой части. Во втором случае в центральной части возможна либо область вакуума, либо область покоящегося газа с ненулевой плотностью. Также показано, что основные газодинамические характеристики в вертикальной части ВЗП определяются величиной закрутки газа, поступающего из придонной части. Также установлено, что с течением времени вся вертикальная часть движется более значительно в западном и менее значительно в северном направлениях.

В проводимых исследованиях также принимал участие проф. С.Л. Дерябин (Екатеринбург, Уральский государственный университет путей сообщения).

Исследование поддержано РФФИ, проект № 08-01-00052.

Список литературы

1. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.

2. Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н. // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48, №3. С. 1–6.

MATHEMATICALLY MODELING THE TORNADO-TYPE NATURAL UPWARD VORTEX FLOWS

S.P. Bautin, P.S. Bautin, E.D. Belova, V.E. Zamislov, I.Yu. Krutova, A.V. Mezentsev, A.G. Obukhov

Using analytical and numerical methods and constructing exact and approximate solutions of system of equations of gas dynamics, the movement of air at the bottom and sides of a vertical upward vortex flow is modeled. It is proved that when the drain of the initially homogeneous gas at rest and at the bottom part due to the action of the Coriolis force arises swirling gas, respectively, in the positive and negative directions for the cases of Northern and Southern hemispheres. When analyzing the motion of the gas in the vertical part, the possibility of the existence of currents, swirling around both along the vertical cross-section area, and only in its circular part is shown. It is found that with the time, all the vertical part moves more pronouncedly to the west and less pronouncedly to the north.

Keywords: system of equations of gas dynamics, analytical and numerical solutions, tornado, tropical cyclone.

УДК 539.3

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СТАЛЬНОГО ОСКОЛКА С БИОКОМПОЗИТАМИ, ЯВЛЯЮЩИМИСЯ УСЛОВНЫМИ АНАЛОГАМИ ПЛОСКИХ И ТРУБЧАТЫХ КОСТЕЙ

***Н.Н. Белов*[1], *Т.В. Полуэктова*[2]**

[1]Томский государственный архитектурно-строительный университет
[2]Сибирский государственный медицинский университет, Томск

n.n.belov@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Предложены математические модели поведения кортикальной и губчатой костных тканей в условиях ударно-волнового нагружения. Методом компьютерного моделирования исследованы процессы деформирования и разрушения в биокомпозитах, являющихся условными аналогами диафизов длинных трубчатых костей и плоских костей свода черепа, при ударном взаимодействии с компактными стальными осколками сферической, цилиндрической и кубической формы со скоростью 500 м/с.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, костная ткань, разрушение, высокоскоростной удар.

По данным электронно-микроскопических исследований области огнестрельного ранения, кроме непосредственного раневого канала, костные ткани подвергаются разрушению в результате воздействия ударной волны и следующих за ней волн разгрузки, порождая ударно-волновой остеопороз. Целью работы является разработка подходов к математическому моделированию поведения костных тканей в условиях ударно-волнового нагружения. Рассматривается задача о высокоскоростном соударении металлического осколка с диафизом длинной трубчатой кости и лобной костью свода черепа. Условным аналогом диафиза длинной трубчатой кости является заполненная костным мозгом двухслойная труба, внешний слой которой выложен из кортикальной кости, внутренний из губчатой ткани. Условным аналогом лобной части свода черепа можно считать биокомпозит, состоящий из трех пластин равной толщины. Верхний и нижний слои биокомпозита выполнены из кортикальной кости, внутренний – из губчатой ткани. Общая толщина биокомпозита согласно среднестатистическому размеру равна 7 мм. За биокомпозитом расположен слой мозга. Уравнение состояния кортикальной и губчатой костей получено в предположении, что костная ткань представляет собой трехкомпонентную смесь органических веществ, неорганических соединений и пустот, заполненных жидкостью [1]. Предполагается, что в процессе ударно-волнового нагружения поведение губчатой кости и костного мозга описывается в рамках модели пористой упругопластической среды, а разрушение носит вязкий характер [2].

Отрывное разрушение рассматривается как процесс роста и слияния микродефектов под действием образующихся в процессе нагружения напряжений. Локальным критерием отрывного разрушения является предельная величина относительного объема пустот. В качестве критерия сдвигового разрушения служит предельная величина интенсивности пластических деформаций. Процесс разрушения кортикальной ткани носит хрупкий характер и сопровождается незначительной пластической деформацией. Считается, что кортикальная ткань при динамическом нагружении до выполнения критерия прочности описывается моделью линейного упругого тела. В качестве условия прочности используется критерий [3]:

$$3J_2 = \left[AI + B\right]\left\{1-(1-C)\left[1-\frac{J_3}{2}\left(\frac{J_2}{3}\right)^{-3/2}\right]\right\},$$

где I, J_2, J_3 – первый инвариант тензора напряжений, второй и третий инварианты девиатора тензора напряжений соответственно. Параметры A, B и C выражаются через пределы прочности при одноосном сжатии, растяжении и чистом сдвиге. После выполнения критерия предполагается, что в материале образовались трещины. Процесс фрагментирования поврежденного трещинами материала описывается в рамках модели пористой упругопластической среды.

Методом компьютерного моделирования исследованы процессы деформирования и разрушения в биокомпозитах, являющихся условными аналогами диафизов длинных трубчатых костей и плоских костей свода черепа, при ударном взаимодействии со стальными осколками кубической, сферической и цилиндрической формы со скоростью 500 м/с.

На рис. 1 представлена хронограмма ударного взаимодействия стального кубического осколка массой 6.6 г с диафизом длинной трубчатой кости.

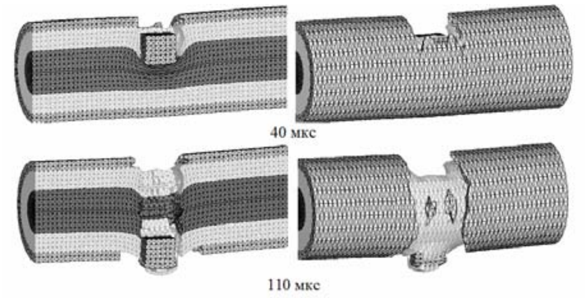


Рис. 1

Расчет проведен при следующих геометрических размерах биокомпозита: толщина внешней кортикальной кости – 3 мм; толщина слоя губчатой ткани – 6.5 мм; диаметр цилиндра из костного мозга 13.5 мм. Осколок пробивает слой губчатой ткани к моменту времени 40 мкс. В момент времени 90 мкс на тыльной стороне диафиза наблюдается откольное разрушение в кортикальной кости. Пробитие диафиза происходит на момент времени 128 мкс. Со стороны свободной поверхности диафиза в результате хрупкого разрушения осыпалась часть материала кортикальной кости. Разделения диафиза на части не произошло вследствие того, что часть губчатой ткани не разрушилась.

На рис. 2 представлены результаты математического моделирования ударного взаимодействия стальных осколков цилиндрической и сферической формы диаметром 6 мм с лобной костью черепа, за которой расположен слой мозга, толщиной 14 мм. Исследовалось влияние слоя мозга и формы ударника на конечную картину пробития. Было установлено, что при данной скорости удара на формирования отверстия в лобной кости свода черепа основное влияние оказывает форма осколка. Наличие слоя мозга не оказывает существенного влияния на процесс формирования отверстия.

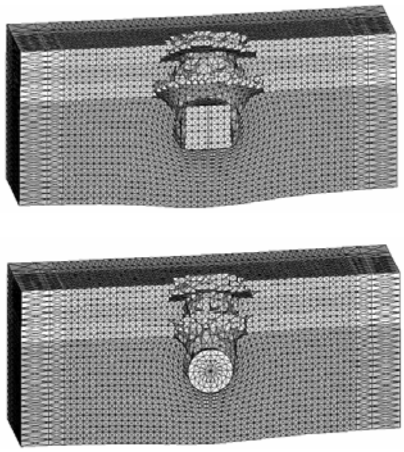


Рис. 2

Математическое моделирование высокоскоростного взаимодействия костной ткани с проникающими элементами позволит вскрыть тонкие внутренние процессы, протекающие при ударно-волновом нагружении, что в свою очередь повысит эффективность методов остеосинтеза после огнестрельного ранения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 10-01-00573) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» на 2009-2010 гг. (проект №21.1.1./4147).

Список литературы

1. Ищенко А.Н. и др. // Современная баллистика и смежные вопросы механики: Матер. Всерос. науч. конф. Томск: ТГУ, 2009. С. 31–34.

2. Белов Н.Н., Югов Н.Т., Копаница Д.Г., Югов А.А. Динамика высокоскоростного удара и сопутствующие физические явления. Томск: STT, 2005. 356 с.

3. Гениев Г.А., Кисюк В.Н. // Бетон и железобетон. 1965. №2. С. 16–29.

COMPUTER SIMULATION OF SHOCK INTERACTION OF STEEL DEBRIS WITH THE BIOCOMPOSITES, WHICH ARE ANALOGUES OF CONVENTIONAL PLANAR AND TUBULAR BONES

N.N. Belov, T.V. Poluektova

Mathematical models of the behavior of cortical and cancellous bones loaded with a shock-wave are presented. Computer simulation was used to study the deformation and damage processes in bio-composites, which are conventional counterparts of diaphysis of long tubular bones and flat bones of the skull, under a shock interaction with compact steel fragments of spherical, cylindrical and cubic shapes with the rate of 500 m/s.

Keywords: computer simulation, bone, fracture, high-velocity impact.

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕЖАТОМНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ГРАФЕНЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ СТЕРЖНЕЙ

И.Е. Беринский

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

iberinsk@gmail.com

Поступила в редакцию 16.06.2011

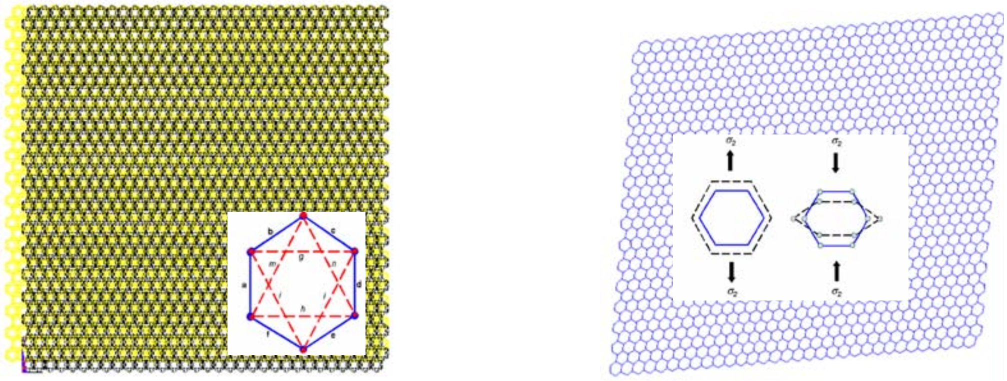
Рассмотрена кристаллическая решетка двухмерного углеродного материала – графена. Построена модель решетки графена, в которой межатомные связи моделируются линейно-упругими цилиндрическими стержнями. Предложен подход, позволяющий связать дискретное описание взаимодействия частиц, моделирующих атомы решетки, и континуальное описание с помощью классической теории стержней. Определены параметры модели, соответствующие экспериментальным данным графена.

Ключевые слова: графен, механические свойства наноструктур, теория стержней.

Компьютерное моделирование все шире используется для описания свойств материалов на микроуровне. В частности, в связи с развитием нанотехнологий большой интерес представляют углеродные материалы, обладающие исключительными характеристиками, в том числе и механическим. К таким объектам относятся и ранее неизвестные аллотропные модификации углерода, такие как углеродные однослойные и многослойные нанотрубки, фуллерены, углеродные нановолокна, наноалмазы, графен и многие другие. Существует целый ряд возможностей для применения механических свойств графена. Поэтому изучение этих свойств является важной и актуальной задачей.

Методы механики деформируемого твердого тела (МДТТ) получили широкое распространение для моделирования наноструктур. Модели МДТТ получили развитие в комплексах прикладных программ на основе метода конечных элементов, которые могли бы быть полезными для расчета наноструктур. Однако исследования показывают [1–4], что при построении таких моделей нужно тем или иным способом учитывать микроструктуру материала.

Таким образом, необходимы теории, способные объединить дискретный и континуальный подходы. В [5] предложен структурный подход для описания взаимодействия между атомами углерода. Межатомные связи там заменяются линейными пружинами различной жесткости. В [5] и в последующей литературе [6, 7] эти пружины называются стержнями, хотя изгибная жесткость, характерная для стержней, в этих моделях не учитывается. Другая дискретная модель для наноструктур, в которой межатомные связи представляются стержнями, обладающими жесткостью на растяжение и изгиб, была предложена в [7]. Параметры стержней в ней определялись с использованием известных эмпирических потенциалов взаимодействия. Подобный подход развивался позже в работах [8, 9]. Модели [5, 7] представлены на рис. 1 (*а* – модель Одегарда, *б* – модель Ли и Чу).



а) *б*)

Рис. 1

В настоящем исследовании применяется подход, схожий с подходом из [7], в частности, для моделирования межатомной связи также используются гибкие стержни. Различие состоит в том, что в качестве альтернативного описания межатомной связи используется не эмпирический потенциал взаимодействия, а квадратичная форма векторов, описывающих положение частиц-атомов. Эта квадратичная форма является следствием учета моментного вклада в дополнение к силовому при описании взаимодействия между частицами. В [10] определена связь между упругими характеристиками некоторых материалов с микропараметрами моментной модели, а именно, – со значениями продольной и поперечной жесткостей межатомной связи.

Рассматриваются модели, построенные с применением различных вариантов механической теории стержней   теории Бернулли – Эйлера и теории Тимошенко [11]. Цель исследования – получение соотношений, связывающих жесткости межатомных связей с параметрами стержневой модели и вычисление их на основе экспериментальных данных для графена.Считается, что связь между двумя атомами в кристаллической решетке моделируется линейно-упругими круглыми в сечении стержнями постоянного диаметра с длиной, равной длине межатомной связи. Модель Эйлера позволяет получить выражения для модуля Юнга и диаметра через значения продольной и поперечной жесткостей связи:

$$E = \frac{3{C_A}^2}{\pi l\, C_D}, \quad d = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{C_D}{C_A}}\, l,$$

которые полностью определяют поведение стержня для данной модели. Параметры C_A и C_D (продольная и поперечная жесткость межатомной связи) могут быть однозначно определены из упругих характеристик материала. В частности, в [10] показано, как определить такие характеристики для графена. Из данной работы следует, что в модель Тимошенко в качестве независимого параметра, кроме модуля Юнга и диаметра стержня, входит коэффициент Пуассона, который не может быть определен по известным значениям продольной и поперечной жесткостям связей, и должен быть задан из дополнительных соотношений.

Экспериментальные данные для графена [10]: $C_A = 730.2$ Н/м, $C_D = 401.6$ Н/м, $l = 0.142$ нм позволяют вычислить модуль Юнга и диаметр стержня

$$E = 8.928 \text{ ТПа}, \; d = 0.122 \text{ нм}.$$

Таким образом, удалось определить параметры стержня Бернулли Эйлера, которые могут быть использованы для моделирования упругих свойств графена.

В результате исследования была построена модель решетки графена, в которой межатомные связи моделируются линейно-упругими цилиндрическими стержнями. Предложен подход, позволяющий связать дискретное описание взаимодействия частиц, моделирующих атомы решетки, и континуальное описание с помощью классической теории стержней.

Соотношения, полученные в результате применения этого подхода для продольной и изгибной жесткости стержня, совпадают с полученными ранее в [7, 8]. Однако в вышеупомянутых работах параметры стержней определяются, в частности, из сравнения энергии изгиба стрежня с энергией изменения угла между атомными связями. В данной работе предложено сравнивать поперечную жесткость стержня с поперечной жесткости связи, определенной на основании моментной теории. Такой подход представляется более рациональным с точки зрения физического смысла. В результате определены параметры стрежней, соответствующие кристаллической решетке графена. Предложенная модель может использоваться в стандартных прикладных конечно-элементных пакетах программ с целью исследования упругих свойств графена и нанотрубок.

Список литературы

1. Yakobson B.I., Brabeck C.J., Bernholc J. // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 76. P. 2511–2514.

2. Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. // Докл. РАН. 2001. Т. 381. Вып. 3. С. 345–347.

3. Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. // Физика твердого тела. 2002. Т. 44. Вып. 12. С. 2158–2163.

4. Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М., Ченцов А.В. // Изв. РАН. МТТ. 2008. №3. С. 164–181.

5. Odegard G.M., Gates T.S., Nicholson L.M., Wise K.E. // Compos. Sci. Technol. 2002. Vol. 62. P. 1869–1880.

6. Scarpa F., Adhikari S., Srikantha Phani A. // Nanotechnology. 2009. Vol. 20. P. 065709.

7. Li C., Chou T.W. // Int. J. Solids Struct. 2003. Vol. 40. P. 2487 2499.

8. Tserpes K.I., Papanikos P. // Composites: Part B. 2005. Vol. 36. P. 468–477.

9. Wan H., Delale F. // Meccanica. 2010. Vol. 45. P. 43–51.

10. Иванова Е.А., Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 4. С. 595–615.

11. Жилин П.А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. 101 с.

MODELING INTER-ATOMIC INTERACTIONS IN GRAPHENE USING THE THEORY OF LINEAR RODS

I.E. Berinskii

A model of graphene crystal lattice is presented. The interatomic bonds are simulated with linear elastic cylindrical rods. The approach that connects the discrete mechanical description of the system of atoms and continuum description based on rod theory is proposed. The parameters of the model that correspond to the graphene crystal lattice are determined.

Keywords: graphene, theory of rods, mechanical properties of nanostructures.

УДК 539.3

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАЗМЕРНЫХ ЭФФЕКТОВ В ТЕХНОЛОГИЯХ МИКРОЭЛЕКТРОНИКИ

В.М. Богомольный

Российский госуниверситет туризма и сервиса, Московская область

yurakudrov@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Оценка размеров мельчайшей твердой кристаллической частицы использована для обоснования неразрушающего метода измерения поверхностной энергии твердых диэлектриков. Теория наноразмерных эффектов в устройствах диэлектрической электроники дает возможность расчета концентрации напряженности электрического поля вблизи вершин микровыступов на шероховатой поверхности электродов структур металл–диэлектрик–металл. Эта модель может быть полезной для выбора параметров технологии электроадгезионного соединения элементов интегральных микросхем. Результаты расчетов по приведенным формулам сравниваются с экспериментом.

Ключевые слова: размерный эффект, технология, микроэлектроника, мельчайшая твердая частица, поверхностная энергия, диэлектрик.

Количественная оценка влияния на поверхностную энергию твердых тел размерных эффектов необходима при разработке новых материалов и электрофизических упрочняющих технологий в машиностроении и приборостроении.

В микроэлектронике современные представления о поверхностной энергии твердых тел прежде всего связаны с количественной оценкой влияния радиуса кривизны вершин «микроострий» на шероховатой поверхности металлических электродов на величину и распределение электрических и температурных полей в тонком диэлектрическом слое структур металл–диэлектрик–металл (МДМ) [1–3]. Оценка радиуса кривизны вершины «микроострия» может быть сравнима с размером мельчайшей механически устойчивой твердой частицы [1].

Наночастицы, группируясь на поверхности металлического электрода, образуют микровыступы, возле вершин которых возникает аномально высокая концентрация напряженности электрического поля, которая примерно в 50–80 раз превышает усредненную (интегральную по толщине) величину. Радиус кривизны вершин микровыступов может составлять величину ~ 10–18 нм, а их плотность составляет ~ 10^8 м$^{-2}$ [2]. Поэтому в сравнительно слабых электрических полях в тонкослойных структурах МДМ возникает инжекция электронов из металла в диэлектрик (который в результате приобретает полупроводниковые свойства) [3]. При этом шероховатая граница «металл–диэлектрик» становится естественным усилителем инжекционных токов. Регистрация вольтамперных характеристик (ВАХ) в начальной обратимой стадии электротермического пробоя (когда еще нет механических разрушений на мезоскопическом уровне) позволяет наиболее точно измерить поверхностную энергию полярных диэлектриков.

В физическом материаловедении в настоящее время сложилось понимание того, что достаточно чистые кристаллические материалы состоят из мельчайших «зерен» (кластеров), размеры которых определяют физико-механические и электрические свойства твердых тел [4, 5].

Диаметр элементарной мельчайшей твердой частицы $Д_{эл}$ вычисляется по формуле [1, 3]:

$$Д_{эл} = \frac{4e^2}{3\varepsilon kT}, \qquad (1)$$

где e – заряд электрона, ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость, k – постоянная Больцмана, T – температура образования твердой фазы. При $\varepsilon = 88.5\cdot10^{-12}$ Ф/м^2, $T = 1700$ К размер элементарной частицы равен $Д_{эл} = 16.7$ нм.

Методом рентгено-структурного анализа были измерены диаметры наночастиц ферромагнетика Fe_3O_4: 8.4, 17.2 и 25 нм. Из этого эксперимента следует, что мельчайшие механически устойчивые частицы могут состоять из нескольких элементарных частиц с диаметром $Д_{ср}$ [1].

Формула (1) может быть использована для расчета размеров микропор в термическом окисле кремния. Это подтверждается экспериментальными данными [6].

Шаг первого уровня металлизации в кремниевых сверхбольших интегральных схемах составляет величину 152 нм, при этом межсоединения должны выдерживать ток порядка ~10^6 А/см^2. При таких малых размерах проводника вклад поверхностной энергии материалов в электрическую и термодинамическую стабильность становится определяющим [3].

Поверхностную энергию полярных диэлектриков и высокоомных полупроводников типа GaAs можно измерить, регистрируя ВАХ по формуле

$$\gamma = 2\pi d_{ср} d_{33}^2 < E_z^2 > E_{упр}\left(\frac{H}{R}\right), \qquad (2)$$

где d_{33}^2 – пьезомодуль, $d_{ср}$ – диаметр кристаллического зерна, $<E_z> = -2V_0/h$ – усредненная по толщине напряженность электрического поля ($\pm V_0$ – электрические потенциалы на электродах структуры МДМ, h – толщина диэлектрического слоя); $E_{упр}$ – модуль упругости, H – высота микровыступа на поверхности электрода, R – радиус кривизны его вершины (R = $Д_{эл}/2$). При $d_{33} = 2\cdot10^{-10}$ кл/Н, $<E_z> = 2.1\cdot10^6$ В/м; $E_{упр} = 8.3\cdot10^{10}$ н/м^2, $H = 13.2\cdot10^{-6}$ м, R = $= 4.2\cdot10^{-8}$ м, $d_{ср} = 1.2\cdot10^{-7}$ м величина γ = =3.46 Дж/м^2. Полученная оценка поверхностной энергии γ для пьезокерамики типа ЦТС-19 соответствует экспериментальным данным [5].

Наночастицы (кластеры, состоящие из десятков и сотен атомов) металлов проявляют необычные свойства. При действии лазерного излучения в инфракрасном диапазоне спектра волн ($\lambda = 0.5$–1 мкм) с мощностью $W >$ (1–2) Вт/см^2 частица серебра становится источником электромагнитного излучения в видимом и ультрафиолетовом диапазоне спектра. При дальнейшем увеличении мощности лазерного излучения металлические частицы размером ~5–25 мкм испаряются вследствие теплового взрыва. Таким образом, осуществляется очистка поверхности кристаллов [1].

Наночастица металла может быть селективным аккумулятором и преобразователем энергии электромагнитных волн. Светящаяся «точка» на конце иголочки из вольфрама – зонда сканирующего электронного микроскопа – является своеобразным «нанопрожектором» при исследовании строения клеток [10].

Наночастицы CdS (диаметром 4.4–6 нм) и PbS (диаметром 15–20 нм) являются акцепторами в полимерных фотовольтических композиционных материалах. Такие композиционные материалы могут быть использованы в фотоэлектрических преобразователях солнечной энергии [1].

Вблизи вершин «микроострий» на поверхности электродов структур МДМ (диэлектрических диодов) возникает аномально высокая концентрация напряженности электрического поля E_z^{max} [3], которая вычисляется по формуле [1, 5]:

$$E_z^{max} = < E_z > 2\sqrt{\frac{H}{R}}, \qquad (3)$$

где H – высота «микроострия», R – радиус кривизны его вершины, $<E_z> = U/h$ (U – напряжение между электродами, h – толщина диэлектрического слоя).

Измерение радиуса вершины «микроострия» на внутренней границе контакта металл–диэлектрик представляет достаточно сложную техническую задачу. Оценка величины R может быть получена по формулам (1) и (3) ($R = Д_{эл}/2$).

Приведенные экспериментальные данные и формулы позволяют определить:

– концентрацию электрических полей вблизи вершин микроострий на поверхности металлических электродов структур МДМ;

– оптимальную толщину подзатворного диэлектрика (полевых транзисторов), фотоприемников;

– поверхностную энергию твердых полярных диэлектриков, контактирующих с металлом;

– величину напряженности электрического поля на кончике острийного электрода, используемого при устройстве «точечных» электроадгезионных межсоединений в устройствах микроэлектроники.

Список литературы

1. Богомольный В.М. Размерные эффекты образования наноструктур в композиционных материалах // Конструкции из композиционных материалов. 2008. №3. С. 58–63.

2. Рожков В.М. Длительность стадии разрядного канала // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 1. С. 51–54.

3. Богомольный В.М. Расчет резонансных эффектов при электротермическом разрушении структур металл–диэлектрик–металл // Измерительная техника. 2000. №6. С. 53–57.

4. Веснин Ю.Н. Вторичная структура кристаллов. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1997. 105 с.

5. Богомольный В.М. Физика прочности. М.: МГУС, 2005. 308 с.

6. Ковчавцев А.П., Французов А.А. Пористость термического окисла кремния толщиной 30-600 Е // Микроэлектроника. 1979. Т. 8. Вып. 5. С. 439–444.

PHYSICAL-MECHANICAL MODELS OF DIMENSIONAL DEFECTS IN MICROELECTRONIC TECHNOLOGIES

V.M. Bogomolny

The evaluation of the dimensions of a smallest solid crystal particle is used for substantiating a non-destructive method of measuring the surface energy of solid dielectrics. The theory of nano-dimensional effects in dielectric electronic devices makes it possible to determine stress concentration of the electric field in the vicinity of the tops of micro-convexes on the rough surface of electrodes of metal-dielectric-metal structures. This model may be useful in choosing the parameters of the technology of electro-adhesive joining of elements of integral micro-chips. The results calculated using the presented formulae are compared with experimental results.

Keywords: size effect, technology, microelectronics, smallest solid particle, surface energy, dielectric.

УДК 531

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В РАЙОНАХ ВУЛКАНИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ МОНИТОРИНГА

В.А. Богоявленская

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

varvara@icmm.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Рассматривается двухслойная конструкция, включающая в себя вулканическую постройку, канал вулкана, магматический очаг и массив окружающих горных пород. Материал каждого слоя пород считается однородным, изотропным и упругим (модуль упругости верхнего слоя меньше модуля упругости нижнего). Конструкция находится под действием давления, распределенного на поверхности очага и части канала. На нижней и боковой поверхностях заданы условия взаимодействия рассматриваемой конструкции с окружающим массивом земной коры. Проведено сравнение результатов решения осесимметричной и трехмерной задач, продемонстрировано расширение возможностей по учету структуры горных пород в окрестности вулканов.

Ключевые слова: давление в очаге вулкана, квазистатические деформации земной поверхности, линейная теория упругости.

Для исследования деформационных процессов земной поверхности в зонах сейсмической и вулканической активности создаются системы геодезического мониторинга движений земной коры. Системы в целом позволяют проводить измерения деформаций земной поверхности с целью, в частности, прогнозирования извержений вулканов и землетрясений с частотой от нескольких лет до нескольких часов. Однако в [1] отмечается необходимость сгущения сети мониторинга в районах расположения вулканов. Кроме того, по результатам мониторинга сделан вывод, что для регистрации деформационных предвестников землетрясений необходимо проводить «непрерывные» измерения. Стоит также отметить, что подобные системы регистрируют, в основном, процессы, связанные лишь с геодинамическими явлениями. Однако не менее важным является регистрация предшествующих динамическим квазистатических процессов деформирования, позволяющая прогнозировать вулканическую деятельность.

В настоящее время в различных технических системах для измерения физических величин широко используются волоконно-оптические датчики. Эти датчики обладают рядом преимуществ по сравнению с датчиками других принципов действия [2]: оптический сигнал в волоконных датчиках не подвержен влиянию электромагнитных полей, связанных с работой других технических систем; они устойчивы к вибрации и ударам, имеют малые размеры и массу, обладают высокой чувствительностью и пропускной способностью; волокно устойчиво к агрессивным воздействиям окружающей среды.

С целью изучения возможности построения сети деформационного мониторинга на склонах вулкана и в его ближайшей окрестности на основе волоконно-оптических датчиков был решен ряд задач в осесимметричной постановке, на основании решения которых сделан вывод о возможности создания таких сетей мониторинга.

Рассматривается система, состоящая из вулканической постройки, очага магмы, канала вулкана и окружающих горных пород. Высота постройки составляет 1 км; размер конструкции в радиальном направлении равен 10 км; толщина рассматриваемого массива горных пород составляет 10 км. Согласно [3], земная кора на Камчатке состоит из трех слоев: осадочного, гранитного и базальтового. Максимальная мощность осадочных отложений не более 3000 м; гранитный слой достигает 23000 м. Поэтому в данной задаче рассматривается двухслойная конструкция, материал каждого слоя считается в первом приближении однородным, изотропным и упругим с модулем $5 \cdot 10^3$ МПа [4] для осадочного слоя и $5 \cdot 10^4$ МПа для гранитного, коэффициент Пуассона для обоих слоев 0.2 (рис. 1). В качестве отсчетной принята конфигурация вулканической системы, предварительно продеформированной под действием собственной тяжести. Система находится в квазистатическом состоянии под действием только приложенного давления в 10 атм, распределенного на поверхности очага и части канала. Действие горных пород, окружающих рассматриваемый массив, заменено граничными условиями: нижняя граница системы неподвижна в вертикальном направлении, боковая – в горизонтальном направлении. Остальные границы полагаются свободными.

Рис. 1

Таким образом, поведение вулканической системы в рамках линейной теории упругости описывается при помощи следующей системы уравнений:

$$\nabla \cdot \mathbf{\acute{o}} = 0, \qquad (1)$$

$$\mathbf{\acute{o}} = \lambda I_1(\mathbf{\mathring{a}})\mathbf{g} + 2\mu\mathbf{\mathring{a}},$$

$$\mathbf{\mathring{a}} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T).$$

Система уравнений (1) дополняется граничными условиями

$$u_z\big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \sigma_{rz}\big|_{\Gamma_1} = 0,$$

$$u_r\big|_{\Gamma_2} = 0, \quad \sigma_{rz}\big|_{\Gamma_2} = 0,$$

$$\sigma_n\big|_{\Gamma_3} = -p\mathbf{n}, \quad \sigma_r\big|_{\Gamma_3} = 0,$$

$$\mathbf{\acute{o}} \cdot \mathbf{n}\big|_{\Gamma\backslash(\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3)} = 0. \qquad (2)$$

На границе контакта материалов принимаются условия равенства всех полевых величин.

Проведено сравнение результатов решения осесимметричной и трехмерной задач. Результаты численных экспериментов позволили:

– оценить геометрические размеры окрестности, в которой возможна регистрация изменения давления в магматическом очаге путем измерения деформационных характеристик на поверхности с заданной точностью;

– установить глубину залегания очага, при которой будет доступной регистрация изменения внутреннего давления;

– оценить влияние степени неоднородности свойств горных пород на чувствительность измеряемых параметров при мониторинге.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН (проект №09-П-1-1010).

Список литературы

1. Левин Е.В. и др. // Вулканология и сейсмология. 2006. №3. С. 54–67.

2. Волоконно-оптические датчики. Вводный курс для инженеров и научных работников / Под. ред. Э. Удда. М.: Техносфера, 2008. 520 с.

3. Апродов В.А. Вулканы. М.: Мысль, 1982. 367 с.

4. Ефимов А.Б., Ершова Т.Я., Магуськин М.А. // Вулканология и сейсмология. 1993. №6. С. 72–98.

MATHEMATICAL MODELING DEFORMATION OF THE EARTH'S SURFACE IN THE ZONES OF VOLCANIC ACTIVITY FOR THE ORGANIZATION OF MONITORING

V.A. Bogoyavlenskaya

A two-layer structure, which comprises a volcanic edifice, a volcanic channel, a magma chamber and a surrounding mountain range, is considered. The material of each rock layer is assumed to be homogeneous, isotropic and elastic (the elastic modulus of the upper layer is lower than the elastic modulus of the lower layer). The structure is under the action of pressure distributed over the chamber surface and part of the channel. Conditions of interaction between the structure and the surrounding rock mass are imposed on the lower and lateral surfaces. The results obtained in solving axisymmetric and three-dimensional problems are compared. It is shown that the proposed approach opens new possibilities for consideration of changes in the rock mass structure in the vicinity of volcanoes.

Keywords: magma chamber pressure, earth's surface quasi-static deformation, linear elasticity theory.

УДК 539.3

МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ТОНКИХ ПЛЕНОК

А.В. Болеста

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

bolesta@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Представлены результаты молекулярно-динамического моделирования поведения тонких медных пленок под внешней нагрузкой. Исследовались два вида нагружения: индентирование и одноосная деформация. Структурное состояние исследуемых пленок задавалось как в виде монокристалла, так и в виде ультрадисперсного поликристалла. Состояние свободной поверхности пленки и выбор варианта подложки при индентировании также варьировались. В случае индентирования монокристаллической пленки, в отличие от поликристаллической, показан масштабный эффект в зависимости твердости от радиуса индентора и глубины его проникновения. Наличие шероховатости поверхности медной пленки задерживает рост кривой нагружения на глубину порядка степени шероховатости. На границе раздела между медной монокристаллической пленкой и алюминиевой подложкой наблюдалось формирование структуры шахматной доски с периодом, зависящим от несоответствия констант кристаллической решетки материалов. Данная структура границы раздела играет важную роль как источник дислокаций, понижая предел упругости композиции. Также для кривой нагружения при индентировании выявлена зависимость от расположения индентора относительно структуры границы раздела между медной пленкой и алюминиевой основой. Циклическая одноосная деформация Cu-Al композиции разрушает шахматную структуру границы раздела и приводит к формированию новой, энергетически более выгодной структуры с пространственными размерами, зависящими от толщины пленки и размера образца.

Ключевые слова: молекулярная динамика, тонкие пленки, граница раздела, индентирование, одноосная деформация.

Введение

Использование тонких пленок в современных интегральных устройствах и датчиках поднимает важнейшие вопросы механических свойств и взаимодействия твердых тел на микромасштабном уровне. В силу малой толщины пленок, объемная доля атомов, находящихся вблизи свободных поверхностей и границ раздела между материалами, становится существенной и, соответственно, существенным становится вклад этих атомов в поведение композиционного материала. Чрезвычайно малые пространственные масштабы, характеризующие толщину приповерхностных и интерфейсных слоев, уже не позволяют полностью описать весь спектр наблюдаемых физических явлений при помощи континуальных моделей, и это делает актуальным моделирование механического поведения таких систем с помощью подхода, в котором явным образом учитывается дискретность среды, – метода молекулярной динамики. В настоящем исследовании рассмотрены различные виды нагружения: индентирование, одноосное растяжение и циклическое нагружение. Основное внимание уделяется выявлению и согласованию особенностей кривых нагружения с процессами, происходящими на атомарном уровне.

Деформация тонких пленок меди

Выполнено молекулярно-динамическое моделирование квазистатического деформирования тонких пленок меди. Рассмотрены два вида структурного состояния исследуемых пленок. Это бездефектный монокристалл и поликристалл с размером зерна несколько нанометров. Также исследованы два варианта подложки, на которую нанесена пленка. Это недеформируемая жесткая подложка и монокристаллический алюминий. Показано, что при вдавливании сферических инденторов радиусом менее 10 нм твердость монокристаллической пленки меди с гладкой атомарной поверхностью испытывает масштабный эффект – твердость возрастает с уменьшением радиуса индентора, достигая 15 ГПа. На рис. 1 представлен график твердости по Бринеллю BHN для медной монокристаллической (MC) и поликристаллической (PC) пленки в зависимости от глубины проникновения индентора h, нормированной на радиус индентора R. Приведены результаты расчетов для R, равного 1, 2, 5 и 10 нм.

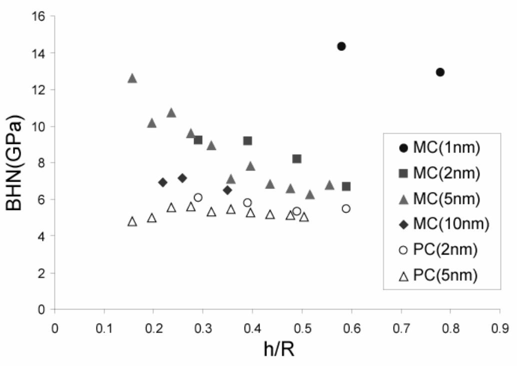
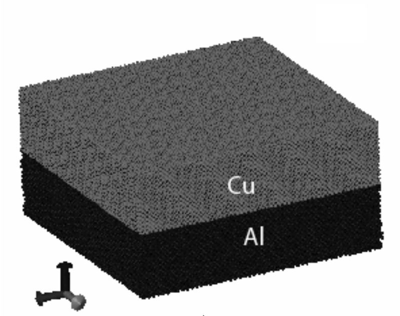
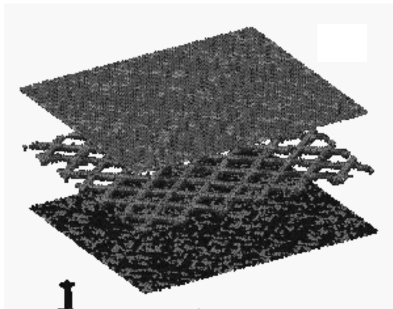


Рис. 1

Такую же величину твердости 15 ГПа демонстрирует монокристаллическая пленка при индентировании острым алмазным индентором на глубину 2 нм. Кроме того, показано, что твердость уменьшается с увеличением глубины погружения, что вызвано накоплением дефектов упаковки в объеме меди по мере проникновения индентора в пленку. Наличие шероховатости поверхности медной пленки задерживает рост кривой нагружения на глубину порядка степени шероховатости. В случае вдавливания сферического индентора в поликристаллическую пленку меди с характерным размером зерна около 2 нм масштабный эффект зависимости от радиуса и глубины внедрения индентора не наблюдается и величина твердости стабилизируется на уровне 5-6 ГПа. Для одноосного растяжения показано, что состояние свободной поверхности оказывает значительное влияние на предел упругости пленки монокристаллической меди: введение шероховатости поверхности снижает предел упругости в два раза от 10 до 5%. Одноосная деформация пленки поликристаллической ультрадисперсной меди с характерным размером зерна 2 нм демонстрирует еще большее снижение предела упругости, примерно до 1.5%. На границе раздела, образованной сопряжением монокристаллических медной пленки и алюминиевой подложки, наблюдалось формирование структуры шахматной доски с периодом, зависящим от несоответствия констант кристаллической решетки материалов. На рис. 2*а* изображена двухслойная металлическая гетероструктура Cu-Al; на рис. 2*б* показаны только атомы с локальной координацией отличной от ГЦК структуры.



а)



б)

Рис. 2

Данная структура границы раздела играет важную роль как источник дислокаций, понижая предел упругости композиции. Кроме того, наблюдается зависимость кривой нагружения при индентировании от расположения индентора относительно структуры данной шахматной границы раздела между медной пленкой и алюминиевой основой. Наиболее ярко данная зависимость проявляется на участке перехода от упругой деформации к пласпластической. Циклическая одноосная деформация Cu/Al композиции разрушает шахматную структуру границы раздела, связанную с несоответствием констант кристаллической решетки, и приводит к формированию новой, энергетически более выгодной структуры с пространственными размерами, зависящими от толщины пленки и размера образца.

MOLECULAR DYNAMICS SIMULATION OF THE DEFORMATION OF THIN FILMS

A.V. Bolesta

The results of molecular dynamics simulation of the behavior of thin copper films under mechanical loading are presented. Two kinds of loading were considered: indentation and uniaxial deformation. Consideration is given to two structural states of the film, namely a defect-free single crystal and a polycrystal with a grain size of several nanometers, and two types of the substrate on which the film is deposited, namely a perfectly rigid substrate and a single crystal Al substrate. The scale effect is shown for indentation of a single crystal film. The roughness of copper film free surface retards the increase in loading curve by about the roughness depth. At the interface between the copper single crystal film and the aluminum substrate, the formation of chess-board structure has been observed. This structure plays an important role as a dislocation source decreasing elasticity limit of the composition. For the thinnest Cu films the loading curve is found to depend on the indenter position about the chess-board structure of the coating substrate interface. Cyclic deformation of Cu-Al composition destroys chess-board structure at the interface and leads to the formation of a new energetically more favorable structure with spatial dimensions depending on the thickness and length of the composition.

Keywords: molecular dynamics, thin films, interface, indentation, uniaxial tension.

УДК 518.12: 622

ДИНАМИКА ОБРАЗОВАНИЯ ГИДРАТОВ ПРИ ДОБЫЧЕ ГАЗА

Э.А. Бондарев, К.К. Аргунова, И.И. Рожин

Институт проблем нефти и газа СО РАН, Якутск

bondarev@ipng.ysn.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Для математического описания отбора газа через одиночную скважину, расположенную в центре круговой залежи, используется нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных, полученная из законов сохранения массы и энергии и закона Дарси, а в качестве замыкающих соотношений – физическое и калорическое уравнения состояния. Эта система уравнений описывает неизотермическую фильтрацию несовершенного газа в пористой среде, в которой перенос энергии за счет теплопроводности считается пренебрежимо малым по сравнению с конвективным переносом. При этом на стенке скважины задается постоянное давление, а на контуре питания – условия, моделирующие отсутствие потоков фильтрующегося газа и тепла, то есть моделируется водонапорный режим отбора газа. В вычислительном эксперименте изучалось влияние давления на забое скважины, то есть влияние интенсивности отбора газа, на динамику изменения температуры и давления в пласте. Эти же решения использовались для оценки размеров области возможного образования гидратов в призабойной зоне газоносных пластов. Кроме этого, оценивалось влияние предположения о изотермичности процесса фильтрации на поле давления и на суммарную добычу газа.

Ключевые слова: математическое моделирование, неизотермическая фильтрация газа, гидраты.

При добыче природного газа (особенно в районах Сибири и Крайнего Севера) могут возникнуть условия, способствующие образованию и отложению гидратов в скважинах и в их призабойной зоне. В настоящее время эти процессы рассматриваются отдельно, то есть в рамках неизотермической многофазной фильтрации моделируется динамика образования гидратов при различных режимах отбора, а в рамках трубной гидравлики изучается динамика образования гидратов в скважинах [1–3]. В последнем случае температура и давление на забое задаются и, как правило, считаются равными пластовым значениям [1, 2]. В [4] сделана попытка объединить эти две задачи. Однако ее авторы ограничились только определением полей температуры и давления в пласте, а динамику роста гидратного слоя в скважине определяли в рамках модели, предложенной авторами статьи [1], то есть задача определения возможности образования гидратов в призабойной зоне даже не ставилась. Кроме того, на границе пласта и скважины было поставлено условие равенства нулю теплового потока, тогда как в действительности на этой границе тепловой поток отличен от нуля и физически определяется конвективным переносом и охлаждением газа при дросселировании. В настоящем исследовании сделана первая попытка частично объединить эти два подхода: из решения задачи неизотермической фильтрации несовершенного газа определяются поля давления и температуры в пласте и сравниваются с равновесными условиями образования гидратов. Это решение затем можно использовать для определения температуры и давления на забое.

Для математического описания отбора газа через одиночную скважину, расположенную в центре круговой залежи, используется система уравнений, описывающая неизотермическую фильтрацию несовершенного газа в пористой среде [3]:

$$\frac{\partial}{\partial \bar t}\left(\frac{\bar p}{Z\bar T}\right)=\frac{1}{\bar r}\frac{\partial}{\partial \bar r}\left(\bar r\,\frac{\bar p}{Z\bar T}\frac{\partial \bar p}{\partial \bar r}\right),\quad \bar r_w<\bar r<\bar r_k,\ \bar t>0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \bar T}{\partial \bar t}=\left(1+\frac{\bar T}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \bar T}\right)\frac{\partial \bar p}{\partial \bar t}+\frac{c_p}{R}\frac{\bar p}{Z\bar T}\times \frac{\partial \bar T}{\partial \bar r}\frac{\partial \bar p}{\partial \bar r}-\frac{\bar T}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \bar T}\left(\frac{\partial \bar p}{\partial \bar r}\right)^2,\quad \bar r_w<\bar r<\bar r_k,\ \bar t>0, \tag{2}$$

где

$$\bar p=p/p_0,\ \bar r=r/l,\ \bar r_w=r_w/l,\ \bar r_k=r_k/l,\ \bar t=\kappa_p t/l^2,$$

$$\overline{T} = c_r T/(mp_0),\ \kappa_p = kp_0/(m\mu).$$

В дальнейшем черта над безразмерными переменными для удобства опускается. Здесь приняты обозначения: c_p – удельная теплоемкость газа, c_r – объемная теплоемкость насыщенного газом пласта, k – коэффициент проницаемости пласта, l – характерный размер, m – пористость, p – давление, r – радиальная координата, R – газовая постоянная, t – время, T – температура, Z – коэффициент несовершенства газа, κ_p – пьезопроводность насыщенного газом пласта, μ – динамическая вязкость газа; нижние индексы означают: 0 – начальное состояние, k – на контуре питания, w – на стенке скважины.

На стенке скважины задается постоянное давление

$$p = p_w, \quad r = r_w. \qquad (3)$$

На контуре питания задаются условия, моделирующие отсутствия потоков фильтрующегося газа и тепла:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad r = r_k. \qquad (4)$$

В начальный момент времени давление и температура считаются постоянными:

$$p(r,0) = 1, \quad T(r,0) = T_0, \quad r_w \le r \le r_k. \qquad (5)$$

В качестве уравнения состояния принимается уравнение Латонова – Гуревича [3], в котором критические значения температуры и давления природного газа зависят от его состава.

В данной постановке температура газа на забое скважины является искомой величиной, определяемой в ходе решения задачи, а уравнение (2) является квазилинейным гиперболическим уравнением первого порядка. Характеристики данного уравнения выходят из правой границы, поэтому граничного условия отсутствия теплового потока (4) достаточно для определения его единственного решения.

Кроме вычисления полей температуры и давления, определялось общее количество добываемого газа

$$V = \int_0^t A(t)dt,$$

где безразмерный массовый расход выражается через размерные величины следующим образом

$$A = \frac{m\mu RM}{2\pi kH p_0 c_r},$$

M, H – массовый дебит газа и мощность пласта соответственно.

Для численного решения начально-краевой задачи используются неявные абсолютно устойчивые разностные схемы, которые реализуются с помощью методов простой итерации, прогонки и бегущего счета на каждом шаге итерации.

Расчеты показали, что изменения поля температур существенны только при интенсивном воздействии на газоносный пласт. Однако даже в этом случае они локализованы в узкой зоне вблизи скважины, а в остальной части пласта температура равна начальной. Получено, что на забое скважины температура вначале резко понижается, а затем начинает восстанавливаться. Такая же тенденция прослеживается и на небольшом расстоянии от забоя, однако уже на большом расстоянии наблюдается лишь незначительное понижение температуры со временем. Установлено, что при интенсивном отборе газа давление существенно изменяется во всех точках пласта, тогда как при меньшей интенсивности эти изменения затрагивают только узкую зону вблизи скважины. Кроме того, при отборе с малой интенсивностью давление довольно быстро выходит на стационарный режим, и этот выход в неизотермической модели наступает раньше, чем в изотермической. Неизотермичность процесса довольно сильно влияет на прогнозирование суммарного отбора газа. Первый период, когда суммарная добыча газа растет с большей скоростью, является более продолжительным для неизотермической модели фильтрации. Это различие наиболее заметно для отбора с малой интенсивностью.

Сопоставлением температурного поля в призабойной зоне скважины с равновесными условиями гидратообразования можно определить область возможного образования гидратов. Такую зону можно идентифицировать одним из геофизических методов, например акустическим каротажем, и на нее несложно воздействовать одним из ингибиторов гидратообразования (метанол, раствор хлористого кальция). Полученные результаты демонстрируют важность учета термодинамических процессов при математическом моделировании добычи природного газа.

Список литературы

1. Бондарев Э.А., Габышева Л.Н., Каниболотский М.А. Моделирование образования гидратов при движении газа в трубах // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1982. №5. С. 105–112.

2. Бондарев Э.А., Аргунова К.К. Математические модели образования гидратов в газовых скважинах // Информационные и математические технологии в науке и управлении: Тр. XIV Байкальской Всерос.

конф. Ч. III. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2009. С. 41–51.

3. Бондарев Э.А. и др. Термогидродинамика систем добычи и транспорта газа. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. 272 с.

4. Хайруллин М.Х., Шамсиев М.Н., Морозов П.Е., Тулупов Л.А. Моделирование гидратообразования в стволе вертикальной газовой скважины // Вычислительные технологии. Т. 13, №5. 2008. С. 88–94.

DYNAMICS OF HYDRATE FORMATION DURING NATURAL GAS PRODUCTION

E.A. Bondarev, K.K. Argunova, I.I. Rozhin

A non-linear system of partial differential equations, derived from the energy and mass conservation laws and the Darcy law is used for the mathematical description of gas production from a single well located at the center of a circular gas field. The physical and caloric equations are used as closing relations. This system of equations describes non-isothermal filtration of a real gas in a porous medium where the energy transfer due to heat conduction is assumed to be negligible as compared to convection. The pressure at the bottom-hole is assumed to be constant. Conditions modeling the absence of the flowing gas and heat fluxes are imposed on the external boundary, i.e., the water-driven regime of gas extraction is modeled. In the computational experiment the influence of pressure drop at the bottom hole, i.e. the influence of intensity of gas extraction, on the dynamics of pressure and temperature variations in the reservoir is investigated. These solutions are used to estimate the possibility of hydrate formation in the bottom hole region of the gas reservoir. In addition, we estimated the effect of the frequently used assumption of isothermal filtration process on the pressure field and on the total gas production.

Keywords: simulation, non-isothermal gas flow through porous media, hydrates.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОВМЕСТНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ РОГОВИЦЫ И СКЛЕРЫ ГЛАЗА ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ГЛАЗНОГО ДАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

В.Э. Борзых[1], В.Р. Цибульский[1], В.Л. Якушев[2]

[1]Тюменский государственный нефтегазовый университет
[2]Институт автоматизации проектирования РАН, Москва

yakushev@icad.org.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Численно моделируется процесс измерения внутриглазного давления оптическим анализатором. Роговица и склера рассматриваются как осесимметрично деформируемые оболочки вращения с жестким закреплением по краям, пространство между которыми заполнено несжимаемой жидкостью. Для описания напряженно-деформированного состояния роговицы и склеры используется нелинейная теория оболочек. Расчет оптической системы проводится на основе представлений геометрической оптики.

Получены зависимости между давлением в струе воздуха и площадью поверхности, с которой отраженный свет попадает в фотоприемник. Найдены формы областей на поверхности роговицы, от которых отраженный свет попадает в фотоприемник. Вначале свет отражается от центра роговицы, но затем по мере углубления он отражается уже только от периферии. Результаты расчетов позволят более правильно интерпретировать данные измерений.

Ключевые слова: внутриглазное давление, роговица, склера, оптический анализатор, теория оболочек, нелинейная теория.

Для объективного измерения внутриглазного давления применяют специальные устройства. В данной работе проведено численное моделирование деформации глаза при измерении давления прибором ORA (Ocular Response Analyzer), разработанным американской фирмой «Reichert» [1]. Процедура измерения заключается в следующем. На центр роговицы, которая изображена на рис. 1 в координатах x, y, z в виде сегмента сферической поверхности, с помощью специальной позиционирующей системы направляется узкий луч света под определенным углом.

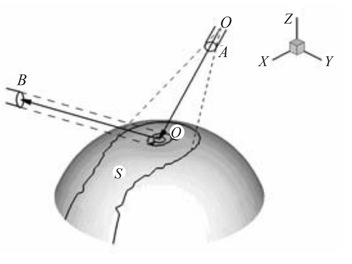


Рис. 1

Точечный источник света расположен в точке O. Свет проходит через диафрагму A, в результате чего обрезается часть светового потока, а на роговице появляется освещенная область S. Фотоприемник находится в B, его ось проходит через центр роговицы. Так как фотоприемник имеет ограниченные размеры, в него попадает только часть светового потока, отраженного от роговицы в области Q. Затем в центр роговицы направляется струя воздуха, давление в которой возрастает от нуля до некоторого значения. Роговица деформируется, и отраженный световой поток меняется в зависимости от ее формы. В результате измерений на экране прибора появляется кривая: зависимость отраженного светового потока от давления в струе. На основании многочисленных опытов, в которых проводилось сравнение результатов, даваемых ORA, с другими методами измерения внутриглазного давления, был разработан метод интерпретации результатов ORA для получения значения внутриглазного давления. Однако такая методика интерпретации результатов измерений не позволяет раскрыть полностью возможности прибора. Математическое моделирование процесса измерения дает возможность обосновать методы обработки результатов измерений и более точно судить о внутриглазном давлении.

Оболочка глазного яблока состоит из двух частей – склеры и роговицы, механические свойства которых существенно различаются. При расчетах считаем, что глазное яблоко заполнено несжимаемой жидкостью. Роговицу и склеру рассматриваем как оболочки вращения, нагруженные равномерным внутренним давлением p_i.

При увеличении внешнего давления в струе воздуха p_e роговица деформируется и часть внутриглазной жидкости перетекает в склеру, распирая ее, при этом внутриглазное давление повышается. Его значение находится из условия неизменности внутреннего объема глаза. Роговица и склера рассматриваются как упругие оболочки, деформации которых описываются геометрически нелинейной теорией при конечных перемещениях и углах поворота [2]. Форма роговицы и склеры соответствовала сегментам сфер. Расчет был проведен для серии значений внутриглазного давления от p_i = = 15 мм. рт. ст. до p_i = 50 мм рт. ст. с интервалом в 5 мм рт. ст. [3].

ной интерпретации результатов измерения.

На рис. 3 приведены зависимости между давлением в струе воздуха p_e (мм рт. ст.) и площадью S (кв. мм) поверхности области Q, с которой отраженный свет попадает в фотоприемник, для трех значений толщины роговицы 0.45, 0.55

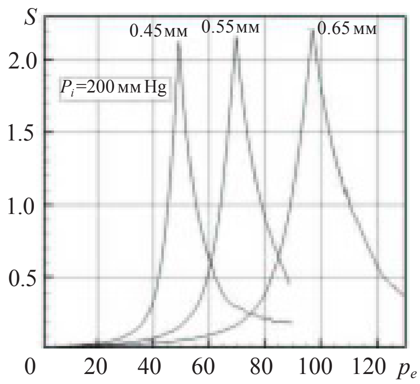


Рис. 3

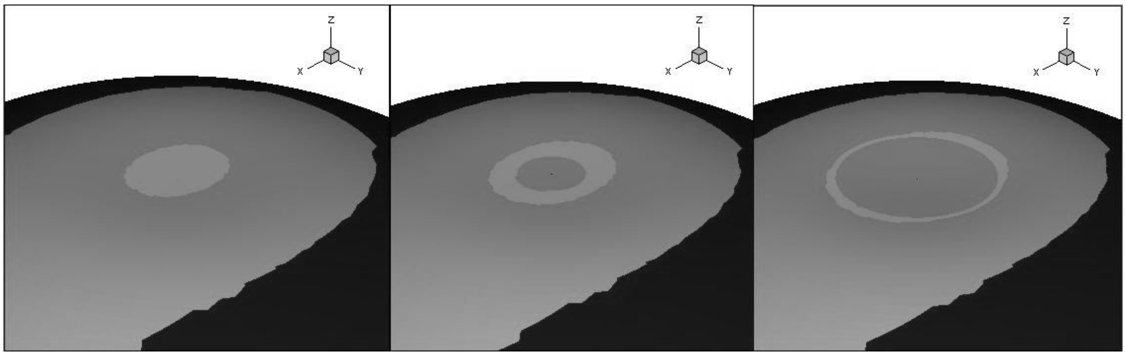


Рис. 2

На рис. 2 показаны формы областей в центральной части роговицы, соответствующие: неосвещенной части (черный цвет); освещенной, свет от которой не попадает в фотоприемник (серый цвет); освещенной, отраженный свет от которой попадает в фотоприемник (белый цвет).

Как видно, вначале свет отражается от центра роговицы, но затем, по мере увеличения давления, он отражается уже только от периферии. И это очень важный результат, поскольку никаких экспериментов по исследованию формы области для отраженного света ранее не проводилось. А это необходимо для правиль-

и 0.65 мм при начальном внутреннем давлении p_i = 20 мм рт. ст.

Список литературы

1. Lusce D., Taylor D. Reichert Ocular Response Analyzer. Measures Corneal Biomechanical Properties and IOP. Reichert Ophthalmic Instruments. 2006.

2. Якушев В.Л. Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 2004. 276 с.

3. Якушев В.Л., Цибульский В.Р., Хусаинов Р.Р. Численное моделирование световых потоков при измерении внутриглазного давления оптическим методом // Вестник кибернетики. Тюмень: Изд-во ИПОС СО РАН, 2010. № 9. С. 74–84.

SIMULATION OF JOINT DEFORMATION OF THE EYE CORNEA AND SCLERA IN THE MEASUREMENT OF INTRAOCULAR PRESSURE ON THE BASIS OF NONLINEAR SHELL THEORY

V.E. Borzih, V.R. Tsibulsky, V.L. Yakushev

The procedure of measuring the intraocular pressure by an optical analyzer is numerically simulated. The cornea and the sclera are considered to be axisymmetrically deformable shells of revolution with fixed boundaries; the space between these shells is filled with incompressible fluid. The nonlinear shell theory is used to describe the stressed and strained state of the cornea and sclera. The optical system is calculated from the viewpoint of the geometrical optics. Dependences between the pressure in the air jet and the area of the surface reflecting the light into a photodetector are obtained. The shapes of the regions on the cornea surface are found from which the reflected light falls on the photodetector. First, the light is reflected from the center of the cornea, but then, as the cornea deforms, the light is reflected from its periphery. The numerical results make it possible to better interpret the measurement data.

Keywords: intraocular pressure, cornea, sclera, optical analyzer, shell theory, nonlinear theory.

УДК 539.3

РАСЧЕТ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ В НЕОДНОРОДНОЙ НАНОРАЗМЕРНОЙ ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ПЛЕНКЕ НА ПОДЛОЖКЕ

А.А. Бычков

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

az710@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Исследовано распределение концентрации Ge в пирамидальных островках на поверхности полупроводниковой пленки, состоящих из сплава SiGe. Построена трехмерная модель островков Странского – Крастанова. Расчет упругих деформаций был выполнен с использованием метода конечных элементов. Для расчета распределения Ge использованы аппроксимирующие формулы и итерационный алгоритм.

Ключевые слова: полупроводниковая пленка, упругая деформация, островки Странского – Крастанова, смачивающий слой, свободная энергия, метод конечных элементов.

Известно [1], что на границе раздела напыленной полупроводниковой $Ge_\eta Si_{1-\eta}$ пленки на Si подложке возникает деформация несовместности $\varepsilon_0 = (a_f - a_s)/a_s$ за счет различия постоянных решетки и подложки. В случае режима роста пленки Странского – Крастанова на так называемом смачивающем слое образуются наноразмерные изолированные островки, форма которых зависит от стадии и режима роста пленки. В частности, различают островки пирамидальной формы и островки в форме усеченной пирамиды. Релаксация накопленной в процессе роста пленки упругой энергии происходит за счет роста островков.

Исследуется трехмерная модель пирамидального островка на смачивающем слое. Пирамидальные островки имеют форму правильной четырехугольной пирамиды, отношение высоты пирамиды к длине стороны основания равно 0.1. Упругая задача для исследуемой модели в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0, \quad \Omega, \\ u_i &= 0, \quad \Gamma_D, \\ \sigma_{ij} n_j &= 0, \quad \Gamma_N, \end{aligned} \tag{1}$$

где Ω – область, занятая телом; $\Gamma_D \cup \Gamma_N$ – граница тела; Γ_D – граница пленка-подложка; Γ_N – свободная граница пленки. Будем, аналогично [2], рассматривать деформацию несовместности пленки как собственную деформацию $\varepsilon_{ij}^* = \ = \varepsilon_m c(x,y,z)\delta_{ij}$, Ω_m = 0.04. Тогда закон Гука можно записать следующим образом:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*).$$

Потеря устойчивости равновесия плоской пленки определяется, аналогично [3, 4], сменой знака у приращения свободной энергии δF участка поверхности пленки при наложении возмущения на плоскую пленку

$$\delta F = \int_{\Gamma_N} \gamma dS + \int_{\Omega} w dV - \gamma_0 S_0 - W_0, \tag{2}$$

где удельная поверхностная энергия γ определена формулой $\gamma = c\gamma_{Ge} + (1-c)\gamma_{Si}$; γ_{Ge} и γ_{Si} – удельная поверхностная энергия для Ge и Si соответственно; $c = c(x,y,z)$ – доля Ge в сплаве, γ_0 – удельная поверхностная энергия невозмущенной пленки; S_0 – площадь свободной поверхности невозмущенной пленки, W_0 – упругая энергия невозмущенной пленки; плотность упругой энергии на поверхности пленки w имеет вид: $w = \varepsilon_{ij}\sigma_{ij}/2$. Первое и третье слагаемое в (2) определяют приращение поверхностной энергии, второе и четвертое – приращение упругой энергии в пленке.

Расчет упругих напряжений во втором слагаемом (2) выполнен методом конечных элементов (пакет FlexPDE5). Во всех расчетах подложка предполагалась недеформируемой. Упругие перемещения заданной области малы по сравнению с размером островков и не учитывались при определении формы свободной поверхности пленки.

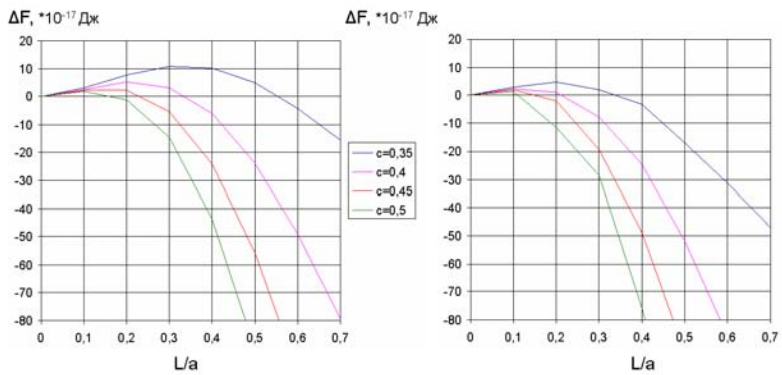
Связь между неоднородностью распределения Δc атомов Ge и деформацией ε определялась согласно [2]:

$$\Delta c = \frac{1}{3\varepsilon_m}(\mathrm{Tr}\,\varepsilon - \overline{\mathrm{Tr}\,\varepsilon}) + (\bar{c} - c). \tag{3}$$

Для вычисления $c = c(x,y,z)$ использовалась процедура, состоящая из набора последовательных итераций. На первом шаге задавалось начальное распределение $c = c_0$ и вычислялась величина упругой энергии в пленке $W = = W_0$. Далее из (3) вычислялось $c_1 = c_0 + \Delta c$ и новое значение $W = W_1$ и т.д. В итоге было получено значение $c = c_{\min}$, соответствующее минимальной упругой энергии в пленке.

Расчеты показали, что доля Ge в вершинах пирамидального островка и на возвышениях возмущенной поверхности пленки значительно превышает ее среднее значение, в то же время она уменьшается на границе островок–подложка и пленка–подложка.

На рис. 1 представлены результаты расчета, показана зависимость приращения свободной энергии образца от параметра L/a, определяющего размер островка (L – длина основания пирамиды, a – длина всего образца) и доли Ge в сплаве.



а) *б*)

Рис. 1

Изменение знака приращения свободной энергии соответствует переходу от устойчивой плоской формы поверхности пленки к форме роста, связанной с образованием островков. Кривые разного цвета соответствуют различной средней доле Ge в пленке, от 35 до 50%. На рис. 1*а* показаны результаты расчета без учета перераспределения компонентов пленки, на рис. 1*б* – результаты с учетом такого перераспределения.

Как видно из представленных графиков, учет перераспределения компонентов пленки вносит существенную поправку в значения критического размера островка. Эта поправка тем больше, чем меньше доля Ge в пленке.

Результаты выполненных расчетов показали: 1) перераспределение атомов Ge и Si в полупроводниковой пленке связано с обогащением атомами Ge вершин шероховатости на свободной поверхности и вершин островков и обеднением впадин между ними; 2) учет влияния перераспределения компонентов пленки приводит к ослаблению условий появления островков на поверхности (переход происходит при меньших размерах островков), этот эффект особенно заметен при малых концентрациях Ge; 3) условия возникновения квантовых точек в виде пирамидальных островков в значительной степени определяются появлением неоднородного распределения компонентов сплава SiGe.

Список литературы

1. Berbezier I., Ronda A. // Surface Science Report. 2009. V. 54. P. 47–98.
2. Digiuni D., Gatti R., Montalenti F. // Physical review. 2009. V. 80. P. 155436.
3. Paul D.J. // Semicond. Sci. Technol. 2004. V. 19. R75–R108.
4. Бычков А.А., Карпинский Д.Н. // Актуальные проблемы прочности: Сб. трудов XLVIII Междунар. конф., посвященной памяти М.А. Криштала. Тольятти: ТГУ, 2009. С. 220–221.

THE ANALYSIS OF ELASTIC STRAINS IN AN INHOMOGENEOUS NANO-DIMENSIONAL SEMI-CONDUCTOR FILM ON A SUBSTRATE

A.A. Bychkov

Distribution of the concentration of Ge in pyramidal islands on the surface of a semi-conductor film, consisting of a SiGe alloy is investigated. A three-dimensional model of Stranski–Krastanov islands is constructed. The elastic strains has been analyzed using a finite elements method. To calculate the distribution of Ge, approximating formulas and an iterative algorithm are used.

Keywords: semi-conductor film, elastic strain, Stranski–Krastanov islands, wetting layer, free energy, finite element method.

УДК 519.63

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Д.Б. Волков-Богородский

Институт прикладной механики РАН, Москва

v-b1957@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Развивается аналитико-численный метод для решения краевых задач теории упругости и теплопроводности в структурно-неоднородных областях с включениями сферической и цилиндрической формы. Рассматриваются градиентные модели теории упругости и теплопроводности, которые как предельный случай содержат классические уравнения. Развиваемый метод касается решения задачи на ячейке периодичности, возникающей в процедуре асимптотического усреднения краевых задач с периодическими коэффициентами. Метод основан на разбиении исходной области на более простые подобласти-блоки, и на представлении решения в каждом из блоков в виде обобщенных рядов Тейлора или Лорана по фундаментальным системам функций, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца или Пуассона. Преимуществом метода является возможность посчитать эффективные характеристики и локальные поля напряжений и температур с высокой степенью точности.

Ключевые слова: аналитические методы, аппроксимация, структурно-неоднородные материалы, градиентные модели, эффективные характеристики.

Фундаментальная система функций для уравнения Гельмгольца

Блочный метод наименьших квадратов [1–3] основывается на представлении решения в каждом из блоков в виде рядов по фундаментальным системам функций, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца или Пуассона. Для этих функций была получена конструктивная формула [2, 3], позволяющая в удобной форме организовать процедуру их вычисления и дифференцирования:

$$\Phi(P) = = \sum_p \frac{(-1)^p \overline{w}^p}{4^p p!} \psi_0^{(-p)}(w) \left(\frac{d^2}{dz^2} - \kappa^2 \right)^{(p)} U_0(z). \quad (1)$$

Здесь $\psi_0^{(-p)}(w)$ – первообразная порядка p для комплексной функции $\psi_0(w)$, $w = x + iy$, $U_0(z)$ – закон продолжения функции ψ_0 с комплексной плоскости во все пространство с условием подчинения уравнению Гельмгольца: $\nabla^2 \Phi(P) - \kappa^2(P) = 0$, $P = (x, y, z)$. Функции ψ_0 и U_0 определяют аналитические свойства аппроксимирующей системы функций, в частности рекуррентные соотношения при их дифференцировании (см. [2]). Для $\psi_0 = w^m$ и $U_0 = w^{n-m}$ формула (1) определяет (при $\kappa = 0$) гармонические полиномы (шаровые функции); при другом выборе закона продолжения и продолжаемой функции $U_0 = I_{n+1/2}(\kappa z)/z^{m+1/2}$, $\psi_0 = w^{-m}$ – необходимые системы функций для включений сферической и цилиндрической формы. Критерием отбора для аппроксимирующей системы функций является возможность решения обобщенной задачи Эшелби для уединенного включения с промежуточным слоем в конечном виде при условии полиномиального поведения решения на бесконечности. Для включений сферической и цилиндрической формы такие системы функций были построены и реализованы для уравнений теории упругости и теплопроводности с естественными условиями сопряжения на границах фаз.

Метод асимптотического усреднения для градиентных уравнений теории упругости и теплопроводности

Рассматриваются градиентные модели теории упругости и теплопроводности четвертого порядка, которые как предельный случай содержат классические уравнения. Для перемещений $\mathbf{R}(P)$ и температурных полей $T(P)$, соответствующих градиентным моделям, выполняются декомпозиции на классическую и «когезионную» составляющие, каждая из которых удовлетворяет своему уравнению:

$$\begin{gathered} \mathbf{R} = \mathbf{U} - \mathbf{u}, \quad L\mathbf{U} + \mathbf{F} = 0, \quad L_C\mathbf{u} + \mathbf{F} = 0, \\ T = \theta - \psi, \quad k\nabla_C^2\theta + f = 0, \quad k\nabla_C^2\psi + f = 0, \end{gathered} \quad (2)$$

где $L_C(\cdot) = L(\cdot) - C(\cdot)$, $L(\cdot) = \mu\nabla^2(\cdot) + (\mu + \lambda)\times$

$\times\nabla \mathrm{div}(\cdot)$; μ, λ – коэффициенты Ламе; k – коэффициент теплопроводности, C – параметр когезионного поля, определяющий эффективную ширину когезионной зоны (скорость экспоненциального убывания когезионного поля при удалении от границы раздела фаз материала). Классическое уравнение в (2) соответствует параметру $C = \infty$ (нулевое когезионное поле).

Отметим, что градиентные модели определяются следующим функционалом энергии системы:

$$U(\mathbf{R}) = \frac{1}{2}\int_G [2\mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + Cu_i u_i]dV,$$

$$E(T) = \frac{1}{2}\int_G \left(k\,|\nabla T|^2 + \frac{k}{C}|\nabla^2 T|^2 \right) dV, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(R_{i,j} + R_{j,i}).$$

Естественные граничные условия контакта между фазами материала определяются путем вариации (3).

Метод асимптотического усреднения является вариантом метода многих масштабов и предполагает представление решения в виде суперпозиции функций обычных и так называемых быстрых переменных $\xi = P/\varepsilon$, соответствующих локальному масштабу изменяемости процесса (в нашем случае – расстоянию между включениями ε):

$$\mathbf{R}(P) = \hat{\mathbf{R}}(P,\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l \mathbf{R}^{(l)}(P,\xi),$$

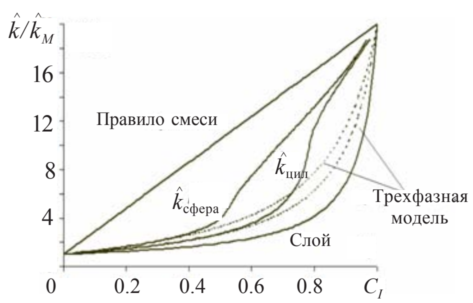
$$T(P) = \hat{T}(P,\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l T^{(l)}(P,\xi).$$

Анализ уравнений определяет структуру функций $\mathbf{R}^{(l)}(P,\xi)$ и $T^{(l)}(P,\xi)$ стандартным образом. В частности, при $l = 1$ определяются функции быстрых переменных первого порядка, которые удовлетворяют соответствующему однородному градиентному уравнению и позволяют вычислить эффективные механические и тепловые свойства усредненного материала, как средние напряжения и теплопотоки при условии единичного периодического скачка на границе представительной ячейки.

Блочный метод наименьших квадратов для материалов с включениями сферической и цилиндрической формы

Решение задачи на ячейке для функций быстрых переменных первого порядка строится с помощью блочного варианта метода наименьших квадратов [1–3]. Каждый блок содержит одно включение, локальное поле в блоке описывается при помощи функций, отвечающих геометрической форме включений и являющихся решением обобщенной задачи Эшелби; эти функции применяются также в методе многих фаз при сопоставлении эффективных характеристик с методом асимптотического усреднения. Такой подход позволяет моделировать также нерегулярное (случайное) расположение включений, и контролировать точность полученного решения через невязку сшивающего функционала.

На рис. 1 представлены графики эффективной теплопроводности $\hat{k}$, посчитанные для классической модели при разной концентрации включений C_I (в том числе, и для взаимопроникающих); ширина межфазного слоя (на правом рисунке) $L = 0.1\varepsilon$, $k_I / k_M = 20$, $k_L / k_M = 100$. Сопоставление с классической моделью многих фаз показывает сильное расхождение (до 100%) при высокой концентрации включений.



а)

б)

Рис. 1

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №09-01-00060.

Список литературы

1. Волков-Богородский Д.Б. Разработка блочного аналитико-численного метода решения задач механики и акустики // Композиционные материалы: Сб. трудов школы-семинара. М.: ИПРИМ РАН, 2000. С. 44–56.

2. Волков-Богородский Д.Б. Применение аналитических расчетов на основе метода блоков в связных

задачах механики сплошных сред // Инженерные системы–2008: Труды Всерос. научно-практич. конф. Москва, 7–11 апреля 2008 г. М.: Изд-во РУДН, 2008. С. 123–138.

3. Волков-Богородский Д.Б., Сушко Г.Б., Харченко С.А. Комбинированная MPI+threads параллельная реализация метода блоков для моделирования тепловых процессов в структурно-неоднородных средах // Вычислительные методы и программирование. 2010. Т. 11. С. 127–136.

ANALYTICAL-NUMERICAL METHOD FOR CALCULATION EFFECTIVE CHARACTERISTICS OF STRUCTURAL-HETEROGENEOUS MATERIALS

I.B. Volkov-Bogorodsky

The analytical-numerical method for solving boundary problems of the theory of elasticity and heat conductivity is developed for structural-heterogeneous media with inclusions of the spherical and cylindrical form (with an intermediate layer). Gradient models and as a special case classical models of the theory elasticity and heat conductivity are considered. The method is based on subdividing the initial area into simpler subdomain-blocks, and then representing the solution in each block as generalized Taylor or Loran expansions on fundamental systems of functions, which exactly satisfy the Helmholtz or Poisson equations. The advantage of this method is the opportunity of obtaining effective characteristics, and also local stress and temperature fields with a high guaranteed degree of accuracy.

Keywords: analytical methods, approximation, structural-heterogeneous materials, gradient models, effective characteristics.

УДК 533.6.011:51+612.215.4

ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕЧЕНИЯ ВОЗДУХА В ДЫХАТЕЛЬНОМ ТРАКТЕ ЧЕЛОВЕКА

В.Л. Ганимедов, М.И. Мучная, А.С. Садовский, В.Н. Шепеленко

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

ganim@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Построение геометрической модели дыхательного тракта и расчеты в рамках уравнений Навье–Стокса проводились с помощью программного пакета «Fluent» и его геометрического препроцессора «Gambit». Основные результаты расчетов следующие. Получено, что возвратное течение, возникающее в нижней части широкой носовой полости, не препятствуя дыхательной функции, играет позитивную роль, заключающуюся в прогреве вдыхаемого воздуха. Показано, что течение в трахее при вдохе представляет собой закрученный поток с образованием нескольких вихрей. При выдохе на структуру и параметры течения воздуха в трахее основное влияние оказывает геометрия бронхиального дерева и, в меньшей степени, строение носовой полости. Численная имитация клинического метода риноманометрии показала, что его результаты не отражают реальной зависимости «перепад давления – объемный расход» при дыхании в естественных условиях.

Ключевые слова: численное моделирование, носовая полость, коронарные сечения, трахея, закрученный поток, объемный расход воздуха.

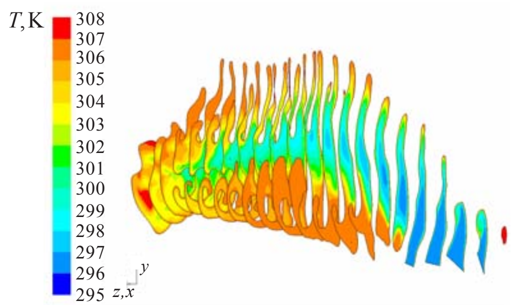
Геометрия носовой полости человека моделировалась по серии томограмм, выполненных в параллельных коронарных сечениях, полученных на рентгеновском томографе с шагом 2÷5 мм. Построение геометрии модели и расчеты в рамках уравнений Навье–Стокса проводились с помощью программного пакета «Fluent» и его геометрического препроцессора «Gambit» (Лицензия ID:KMMG-SK-LO1). На рис. 1 приведено изображение поверхности одной из рассматриваемых носовых полостей.

Рис. 1

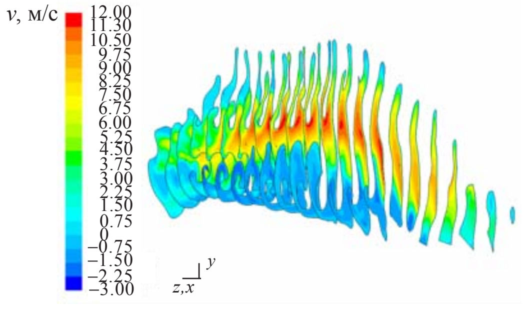
К сожалению, в представленных медиками томограммах не имелось информации о носоглотке и трахее пациентов. Поэтому после носовой полости поверхность дыхательного тракта аппроксимировалась элементами стандартных фигур.

Перечислим основные результаты проведенных исследований.

1) При широком основном носовом канале слабое возвратное течение, возникающее в нижней части носовой полости, не препятствуя дыхательной функции, играет позитивную роль, заключающуюся в прогреве вдыхаемого воздуха. Особенно это должно быть важно при низких наружных температурах. На рис. 2 приведены поля температуры (*а*) и продольной компоненты скорости (*б*) в коронарных сечениях.



а)



б)

Рис. 2

2) Создана математическая модель используемой в клинических исследованиях процедуры передней активной риноманометрии (ПАР) (с помощью аппарата фирмы HOMOTH), регистрирующего значение объемного расхода воздуха через нос в зависимости от респираторного усилия. Проведена серия параметрических расчетов. Получено, что течение в носовых полостях при выполнении процедуры ПАР имеет струйный характер и зависит от того, под каким углом установлен оператором носовой адаптер. На рис. 3 приведена картина визуализации течения по продольной компоненте скорости V_Z в правой носовой полости при угле установки носового адаптера, равном 22°, относительно продольной оси.

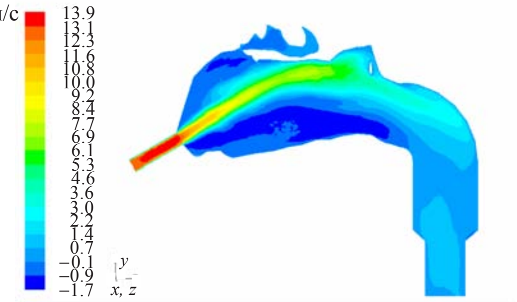
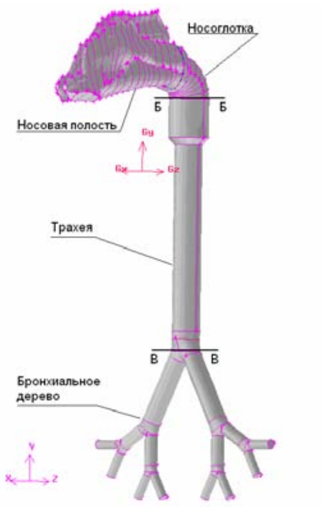
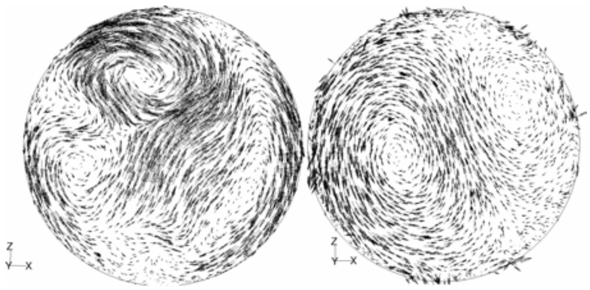


Рис. 3

Анализ результатов приводит к выводу, что показания ПАР дают только косвенную информацию о возможностях транспортной функции носа, и риноманограммы не отражают реальной зависимости «перепад давления – объемный расход» при дыхании в естественных условиях.

3) Численные исследования показали, что течение в трахее при вдохе в моделях, построенных для пяти различных геометрий носовой полости конкретных людей, представляет собой закрученный поток с образованием нескольких вихрей. На рис. 4 приведен пример построенной геометрической модели дыхательных путей, на рис. 5 – распределение векторов скорости при вдохе в двух характерных сечениях этой модели: Б–Б (рис. 5*а*) и В–В (рис. 5*б*).





а) *б*)

Рис. 5

Количество и интенсивность вихрей полностью определяется профилем скорости в сечении, где соединяются в одну правая и левая носовые полости, этот профиль зависит от реальной геометрии обоих носовых полостей. При выдохе на структуру и параметры течения воздуха в трахее основное влияние оказывает геометрия бронхиального дерева и, в меньшей степени, строение носовой полости.

Список литературы

1. Фомин В.М. и др. Исследование течения воздуха в носовой полости человека // ПМТФ. 2010. Т. 51, №2 С. 107-115.

NUMERICAL STUDY OF AIR FLOW IN THE HUMAN RESPIRATORY TRACT

V.L. Ganimedov, M.I. Muchnaya, A.S. Sadovsky, V.N. Shepelenko

Construction of a geometric model and the calculations in the framework of the Navier – Stokes equations were performed using the software package «Fluent» and its geometrical preprocessor «Gambit». The main results of the calculations are as follows. It was found that the reverse flow that occurs in the lower part of the broad nasal cavity does not prevent respiratory function and plays a positive role, consisting in heating of inhaled air. It is shown that the swirling flow is generated in the trachea during the inspiration with the formation of several vortices. During the expiration the air flow structure and parameters in the trachea are influenced mainly by the geometry of the bronchial tree and, to a lesser extent, by the nasal cavity configuration. The numerical simulation of a clinic rhinomanometry method has shown that it does not reflect the real "the pressure drop - volume flow rate" relationship for breathing in natural conditions.

Keywords: numerical simulation, nasal cavity, coronal sections, trachea, swirling flow, volume flow rate.

Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (2), с. 413–414

УДК 539.3.550.34

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМАЦИОННОГО СОСТОЯНИЯ ЗЕМНОЙ КОРЫ АРМЯНСКОГО НАГОРЬЯ

Н.Э. Геодакян, Э.Г. Геодакян

Институт геофизики и инженерной сейсмологии им. А. Назарова НАН РА, Гюмри (Армения)

jon_iges@mail.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Выявлены зоны с пониженными значениями относительных скоростей деформации, являющиеся зонами повышенного сейсмического риска.

Ключевые слова: эпицентр землетрясения, зона тектонических нарушений, механизм очага землетрясения, подвижка по разрыву, сейсмический момент, сейсмический риск.

Пространственное распределение эпицентров землетрясений Армянского нагорья указывает на существование закономерно расположенных линейных структур эпицентров землетрясений, хорошо коррелирующихся с тектоническими зонами нарушений. Сильные землетрясения приурочены, в основном, к областям пересечения продольной и поперечной складчатости и к Североанатолийской и Загроским разломным зонам. На рис. 1 представлена карта эпицентров сильных землетрясений за период с 1970 по 2003 г.: 1 – эпицентры землетрясений; 2 – глубинные разломы по [1]; 3 – швы столкновения и скольжения плит: а) макроплиты, б) мезоплиты, в) микроплиты, г) шов скольжения; 4 – номера плитотектонических элементов: I – Евразиатская плита; II – Закавказская микроплита; III – Южно-Армянская микроплита; IV – Аравийская макроплита; V – Иранская мезоплита; VI – Южно-Каспийская мезоплита.

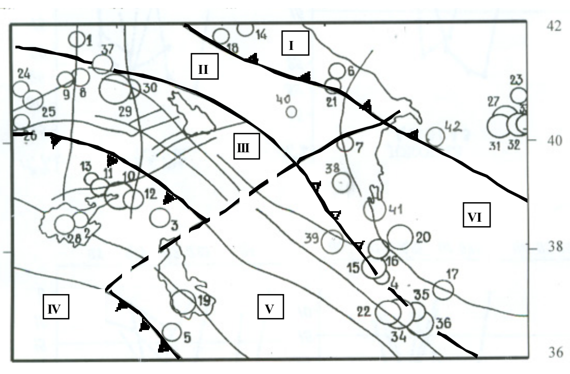


Рис. 1

Для определения напряженно-деформированного состояния основных сейсмотектонических зон использовались данные механизмов очагов более 196 землетрясений с магнитудой выше 4.5. На рис. 2 изображены диаграммы механизмов очагов сильных землетрясений за период 1970–2003 гг.

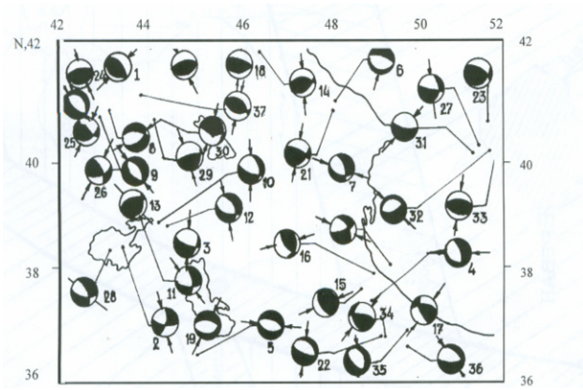


Рис. 2

Анализ параметров механизмов очагов указывает, что в исследуемом регионе преобладают землетрясения с крутыми плоскостями разрыва. Выявлено четкое соответствие направления одной из плоскостей разрыва с направлениями сейсмоактивных зон [2]. Данные по направлениям сжатия показывают, что почти по всем сейсмотектоническим зонам преобладают оси сжатия, имеющие близгоризонтальные направления, за исключением зоны простирания от Эрзинджана на северо-восток. Здесь наблюдаются землетрясения, у которых оси сжатия составляют с горизонтом более 30 градусов. По всем основным сейсмоактивным зонам преобладающие направления осей растяжения располагаются под некоторыми углами, за исключением сейсмоактивной зоны Джавахетского нагорья, где ориентация осей растяжения приближается к широтному направлению. Выявлены характерные для отдельных участков исследуемого района доминирующие типы подвижек. Северо-восточная часть Армянского нагорья характеризуется взбросо-надвиговыми подвижками, район между Тавром и Анатолией – преимущественно сбросовыми подвижками с элементами левостороннего сдвига. Землетрясения в окрестностях озера Ван характеризуются сбросовыми подвижками, а в северной части Армении преобладают подвижки взбросового типа.

Анализ напряженного состояния региона в целом указывает на доминирующее напряжение сжатия в горизонтальной плоскости в направлении 15–20 градусов от севера на северо-восток и напряжения растяжения в вертикальной плоскости в пределах 30–60 градусов от горизонта.

Оценка деформационных процессов проводилась на основе тензорного анализа сейсмических моментов. Величина средней скорости относительной деформации для совокупностей землетрясений, произошедших в определенном сейсмическом объеме ΔV, определялась в виде [1]:

$$\dot{\varepsilon}_{jk} = \frac{1}{2\mu_x v_x \Delta T} \sum_{i=1}^{N} M_{0jk}^{i},$$

где μ – модуль жесткости среды в сейсмогенном объеме, $\sum_{i=1}^{N} M_{0jk}^{i}$ – суммарный тензор сейсмического момента совокупности землетрясений ($i = 1,..., N$), N – число землетрясений, ΔT – период наблюдения. Тензор сейсмического момента определяется через угловые параметры разрыва.

По результатам расчетов составлена карта интенсивности средней скорости деформации, приведенная на рис. 3 с указанием направлений главных осей сжатия и растяжения в проекции на земную поверхность.

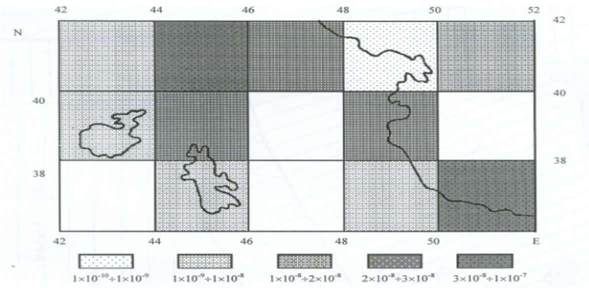


Рис. 3

Полученные данные показывают, что отдельные структуры исследуемой территории характеризуются различными по направлению и интенсивности деформационными процессами, указывающими на сложное геодинамическое состояние среды. Выявлены зоны с пониженными значениями относительных скоростей деформации, являющиеся зонами повышенного сейсмического риска.

Список литературы

1. Костров Б.В. Механика очага тектонического землетрясения. М.: Наука, 1985. 175 с.

2. Геодакян Э.Г., Геодакян Н.Э. Оценка сейсмических деформаций в районе южной Армении и Северо-Запада Ирана // Сб. науч. тр. конф. посвящ. 60-летию основания НАН РА. Гюмри: ГИТУТЮН НАН РА, 2004. С. 79–88.

ANALYSIS OF THE STRESSED-STRAINED STATE OF THE EARTH'S CRUST OF THE ARMENIAN UPLAND

N.E. Geodakyan, E.G. Geodakyan

Zones with low values of the relative strain-rates are detected, which are the zones of high seismic risk.

Keywords: focus of earthquake, tectonic fracturing zones, focus of earthquake ,type of shoves, seismic moment, seismic risk.

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТЕНОК ЖЕЛУДОЧКОВ СЕРДЦА ЧЕЛОВЕКА В НОРМЕ И ПРИ ПАТОЛОГИИ

А.А. Голядкина, И.В. Кириллова

Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского

gramakovaaa@info.sgu.ru

Поступила в редакцию16.05.2011

Проведен анализ численного моделирования желудочков сердца в норме и при патологии (аневризма). Проведен анализ деформаций, контуров поля скоростей, а также распределение давления. Материал стенки желудочков при моделировании задавался как линейный изотропный материал. Кровь предполагалась ньютоновской жидкостью.

Ключевые слова: численное моделирование, сердце, аневризма, напряженно-деформированное состояние.

Заболевания сердечно-сосудистой системы (ССС) на протяжении многих лет занимают одно из лидирующих положений в структуре заболеваемости и смертности. В современной России ежегодно признаются инвалидами более 1.1 млн. человек, при этом основной причиной первичной инвалидности лиц трудоспособного возраста являются болезни сердечно-сосудистой системы (48%). Среди причин смертности на первом месте стоит ишемическая болезнь сердца (ИБС). ИБС характеризуется нарушением кровоснабжения миокарда вследствие поражения коронарных артерий сердца. В бассейне пораженной артерии часто определяются изменения миокарда. У больных, перенесших инфаркт миокарда, могут быть обнаружены изменение геометрии левого желудочка (ЛЖ), его объемов и массы миокарда, аневризма сердца, перфорация межжелудочковой перегородки, отрыв сосочковых мышц и хорд, внутрисердечные тромбы. Аневризма – это мешковидной формы тонкостенное выпячивание стенки сердца. Образуется в результате того, что участок, пораженный инфарктом, растягивается и выпячивается под воздействием давления крови [1]. Все вышеперечисленные патологии подлежат только хирургическому лечению. Несмотря на значительное число работ, посвященных хирургическому лечению ИБС, ряд вопросов остается до сих пор недостаточно изученным. Существует необходимость активного внедрения компьютерного моделирования в кардиохирургию. С помощью индивидуальной компьютерной модели можно достаточно точно выявить и оценить индивидуальные особенности анатомического строения сердца, изменения ЛЖ и другие патологические изменения. Индивидуальная компьютерная модель позволит грамотно провести предоперационную подготовку пациента, оценить степень эффективности соответствующих хирургических вмешательств по реваскуляризации миокарда и восстановлению геометрии левого желудочка и сердца человека в целом, дать рекомендации оперирующему хирургу.

В зарубежной печати представлено несколько работ [2–4], посвященных проблеме восстановления 2D, 2D+T, 3D, и даже 3D+T реалистичной геометрии отдельно левого желудочка и обоих желудочков вместе на основе использования данных эхокардиограмм (ЭКГ), ультразвукового исследования (УЗИ) и данных томографического исследования (КТ и МРТ).

Представленные результаты являются первыми на пути комплексного исследования, выполняемого в рамках проекта РФФИ №09-01-00804-а «Разработка математических методов оптимизации хирургического лечения ишемической болезни сердца». Для реконструкции сердца человека, учитывающей внутренний рельеф, использовался метод заливки желатином in vitro, а также данные УЗИ и метод фотографирования. Методика заливки заключалась в следующем: производили забор сердца вместе с перикардом, рассекали переднюю поверхность восходящей аорты, далее наполняли полости сердца желатином, после застывания желатина при помощи острого ножа-гильотины производились срезы, которые наглядно отражают внутреннюю и внешнюю поверхности сердца.

Рисунок 1 иллюстрирует подготовку срезов для создания 3D модели сердца человека.

Полученные срезы обрабатывались посредством графических редакторов: Adobe Photoshop (производился импорт фотографии и извлекалась

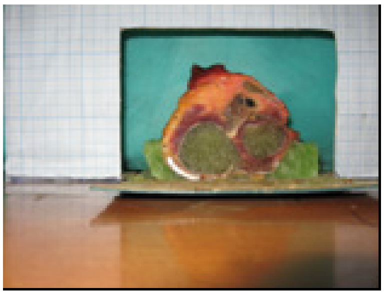


Рис. 1

внешняя и/или внутренняя поверхность сердца для дальнейшего получения зоны моделирования, а также изменение контрастности) и CorelDRAW (перевод растрового рисунка в векторные кривые) для дальнейшего моделирования с использованием специализированного программного пакета SolidWorks 2008 (SolidWorks corporation) (рис. 2).

Полученные модели ЛЖ и ЛЖ+ПЖ импортировались в ANSYS Multiphysics. Для последующих расчетов на данные объемы была наложена нерегулярная тетраэдрическая сетка с размером элементов 0.005 мм для стенки ЛЖ и 0.002 мм для жидкости (рис. 3–5).

Были рассмотрены следующие модели: левый желудочек в норме и при патологии (аневризма), камеры желудочков. Механические характеристики крови и стенки: $\rho_1 = 1050$ кг/м^3, $\eta = 0.0037$ Па·с, $\rho_2 = 1378$ кг/м^3, $\nu = 0.4$ (коэффициент Пуассона), $E = 2 \cdot 10^7$ Н/м^2 (модуль Юнга).

При численном исследовании ЛЖ в норме за счет разницы давления возникают потоки поперечной циркуляции, имеющие характер завихрения в предсердно-желудочковой зоне. На рис. 6 показано образование вихря в систолу.

При рассмотрении ЛЖ с аневризмой наблюдается другая картина:

1) за счет уменьшения воздействия стенки на поток смещается поле давления;

2) максимум давления в начале и в конце систолы достигается в ампуле аневризмы (рис. 7 – начало систолы, рис. 8 – окончание систолы);

3) за счет разницы давления на внутренней и внешней стенках ЛЖ наблюдаются потоки поперечной циркуляции, имеющие характер завихрения в основании ЛЖ. На рис. 9 показано образование вихря в систолу.

При анализе НДС камер желудочков сердца с жестким закреплением межжелудочковой перегородки было зафиксировано, что большей активностью при равной сократительной функциональности стенки обладает левый желудочек, что подтверждено клинически.

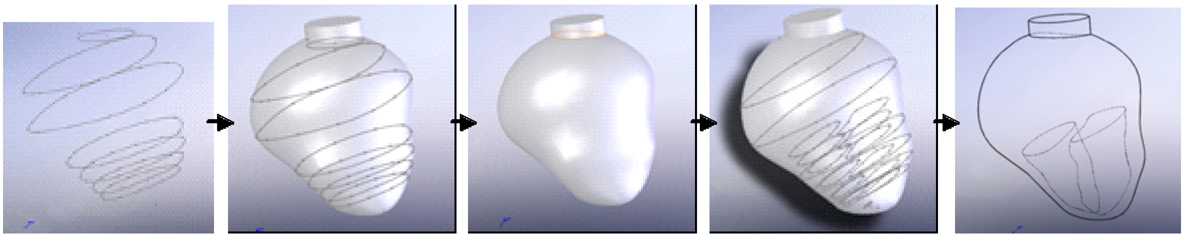


Рис. 2

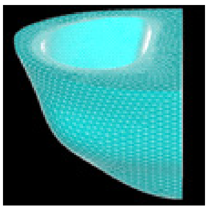


Рис. 3

Рис. 4

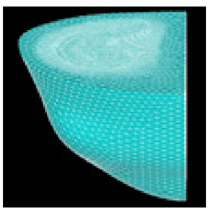


Рис. 5

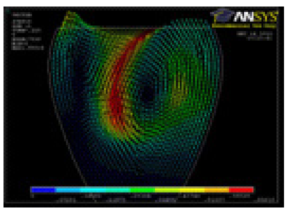


Рис. 6

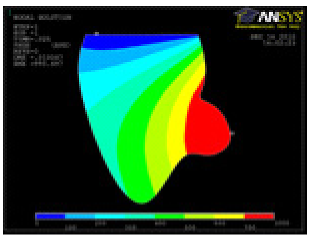


Рис. 7

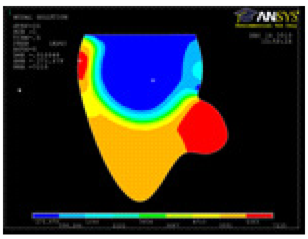


Рис. 8

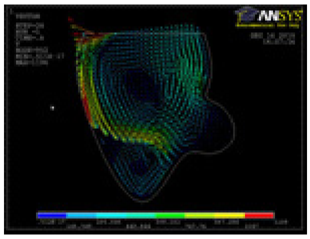


Рис. 9

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №09-01-00804-а).

Список литературы

1. Фадеев П.А. Инфаркт миокарда. М.: ООО «Издательство Оникс», 2007. 128 с.

2. Goktepe S., Abilez O. J., Kuhl E. A generic approach towards finite growth with examples of athlete's heart, cardiac dilation, and cardiac wall thickening // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2010. V. 58. P. 1661–1680.

3. Noble J.A., Boukerroui D. Ultrasound image segmentation: a survey // IEEE. Trans. Med. Imag. 2006. V. 25. P. 987–1010.

4. Tangible Modelling of Ventricular Aneurysm / Eds. Shiraishi Y. et al. // WCB. 2010. IFMBE Proceedings 31. P. 469–472.

NUMERICAL MODELING OF STRESS-STRAIN STATE OF NORMAL AND PATHOLOGICAL HUMAN VENTRICLE WALLS

A.A. Golyadkina, I.V. Kirillova

Numerical analysis of strain-stress distribution for ventricles in normal and pathological state (aneurism) is provided. Deformations, velocity field contours and pressure distribution are analysed. The material of the ventricle wall is is assumed to be linear isotropic; blood is assumed to be a Newtonian liquid.

Keywords: numerical modeling, heart, aneurism, stress-strain state.

УДК 551.24

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ СВЯЗЬ НАБЛЮДАЕМОГО ИЗМЕНЕНИЯ ДЛИНЫ ЗЕМНЫХ ПАРАЛЛЕЛЕЙ С СЕВЕРНЫМ ДРЕЙФОМ ЯДРА ЗЕМЛИ И СЕВЕРНОЙ КОМПОНЕНТОЙ ДРЕЙФА КОНТИНЕНТОВ

М.А. Гончаров

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

m.a.gonch@mail.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

По данным GPS, в настоящее время длина параллелей в Южном полушарии увеличивается, а в Северном уменьшается. Приведена формула, связывающая скорость изменения длины параллели со скоростью северного дрейфа ядра, и оценена скорость этого дрейфа (2.6 см/год). Последние 600 млн. лет для дрейфа континентов была характерна северная компонента. Она характерна и для течения подконтинентальной мантии. Простейшая кинематическая модель такого течения основана на принципе компенсационной организации тектонического течения: в тылу тектонического потока (под Южным полюсом) неизбежен компенсирующий восходящий поток, поддерживающий высокое стояние Антарктиды, а на фронте (под Северным полюсом) – компенсирующий нисходящий поток, обеспечивший длительное и весьма интенсивное прогибание дна Арктического океана – антипода Антарктиды по своим очертаниям. Следствием такой меридиональной конвекции является расширение поверхности Южного полушария и сокращение поверхности Северного полушария. Оценена характерная скорость поверхностного потока (0.25 см/год). Как и скорость дрейфа ядра, эта величина также оценена по характерной скорости удлинения параллелей. Возможная причина конвекции – смещение ядра Земли к Северному полюсу.

Ключевые слова: дрейф ядра Земли, дрейф континентов, GPS, изменение длины земных параллелей, компенсационная организация тектонического течения, меридиональная конвекция.

Современное расширение Южного и сокращение Северного полушарий Земли

По данным GPS, в настоящее время длина параллелей в Южном полушарии увеличивается, а в Северном полушарии уменьшается. На рис. 1 (по [1], с упрощением) видно, что максимальное удлинение и укорочение параллелей происходит в умеренных широтах как Южного, так и Северного полушария, в то время как в экваториальной и полярной областях эти деформации стремятся к нулю.

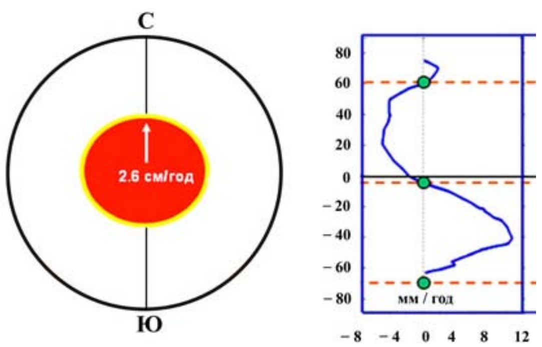


Рис. 1

Количественная связь наблюдаемого изменения длины земных параллелей с северным дрейфом ядра Земли

В [2] выведена формула (видоизменение наше – М.Г.), связывающая скорость изменения длины параллели (l'_λ) на поверхности идеально сферической Земли со скоростью северного дрейфа земного ядра (v_c):

$$l'_\lambda \approx -0.2 v_c \sin 2\varphi, \qquad (1)$$

где φ – географическая широта на поверхности Земли, принятая для расчетов отрицательной в Южном полушарии и положительной в Северном полушарии. Поскольку изменение длины параллелей фиксируется с помощью GPS, то в [1] на основе приведенной формулы была оценена скорость дрейфа земного ядра в настоящее время ≈ 2.6 см/год.

Количественная связь наблюдаемого изменения длины земных параллелей с северной компонентой дрефа континентов

В течение последних примерно 600 млн. лет для дрейфа континентов была характерна северная компонента [3]. Такая компонента должна быть характерна и для течения подконтинентальной мантии. Простейшая кинематическая модель такого течения представлена в [4]. В основу модели положен принцип компенсационной организации тектонического течения [5].

В рассматриваемом случае этот принцип заключается в следующем (рис. 2). В тылу меридионального тектонического потока (под Южным полюсом) неизбежен компенсирующий восходящий поток, а на фронте (под Северным полюсом) – компенсирующий нисходящий поток. Другими словами, в мантии и во внешнем ядре Земли происходит меридиональная конвекция. Перемещение цепочки элементарных объемов вдоль меридиана в северном направлении происходит от Южного до Северного полюса. В то же время только северная часть этого потока испытывает субмеридиональное сжатие. Южная же часть потока неизбежно подвергается тоже субмеридиональному, но растяжению. Вследствие сферичности Земли элементарные объемы в южной части расходятся вдоль меридианов и тем самым подвергаются также и субширотному растяжению. В северной же части меридианы сходятся, обеспечивая также и субширотное сжатие. Таким образом, поверхность Южного полушария расширяется, а поверхность Северного полушария сокращается.

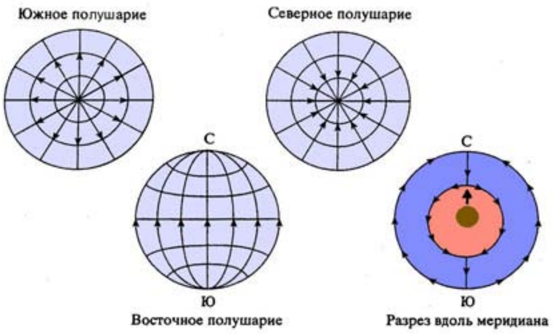


Рис. 1

Расхождение масс от Южного полюса компенсируется восходящим потоком в мантии, который поддерживает высокое стояние Антарктического материка. Схождение масс к Северному полюсу компенсируется длительным и весьма интенсивным прогибанием аномально широкого шельфа Арктического океана – антипода Антарктиды по своим очертаниям. Не исключено, что именно благодаря этому обстоятельству под арктическим шельфом сосредоточено около 25% углеводородных запасов Земли.

Эти два вертикальных потока должны замыкаться на глубине горизонтальным потоком противоположного направления. Нижний горизонтальный замыкающий поток происходит в подошве мантии под соответствующими поверхностными меридианами, т.е. вдоль «меридианов» внешнего ядра. Этот поток в мантии над поверхностью «жидкого» ядра «сцеплен» с аналогичным потоком вещества ядра под этой поверхностью. По аналогии с потоком на поверхности Земли, можно сделать вывод, что в тылу расходящегося поверхностного потока ядра под Северным полюсом существует компенсирующий восходящий поток во внешнем ядре, а на фронте этого поверхностного потока под Южным полюсом – компенсирующий нисходящий поток во внешнем ядре.

Простейшая модель поля скоростей горизонтального потока под земной поверхностью такова [4]:

$$v_\varphi = A\cos\varphi, \qquad (2)$$

где $A \approx 0.25$ см/год – величина, численно равная максимуму скорости потока на экваторе, где $\varphi = 0$. Подобно вышеупомянутой скорости дрейфа ядра эта величина также оценена с использованием характерной скорости удлинения параллелей (см. рис. 1).

Возможная причина меридиональной конвекции

Возможная причина меридиональной конвекции – смещение центра масс ядра Земли [3]. В частности, скорость деформации изменения длины параллели (ε'_λ):

$$\varepsilon'_\lambda = -\left(\frac{A}{R}\right)\sin\varphi \qquad (3)$$

можно вывести как из формулы (1), где исходным моментом является северный дрейф земного ядра, так и из формулы (2), исходный пункт которой – северная компонента дрейфа континентов [3].

Список литературы

1. Barkin Yu.V., Shuanggen J. On variations of the mean radius of the Northern and Southern Hemispheres of the Earth // EGU General Assembly. Vienna, Austria, 15-20 April 2007. Geoph. Res. Abs. 2007. Vol. 9. Abstract # EGU07-A-08183.

2. Barkin Yu.V., Shatina A.V. Deformations of the Earth's mantle due to core displacements // Astronomical & Astrophysical Transactions. 2005. Vol. 24. Is. 3. P. 195–213.

3. Гончаров М.А., Разницин Ю.Н., Баркин Ю.В. Особенности деформации континентальной и океанской литосферы как свидетельство северного дрейфа ядра Земли // Современное состояние наук о Земле. М.: Изд-во Геол. ф-та МГУ, 2011 (CD-ROM). С. 461–466.

4. Гончаров М.А. Кинематическая модель северной компоненты дрейфа континентов как причины расширения Южного и сокращения Северного полушариев Земли // Ротационные процессы в геоло-

гии и физике. М.: КомКнига, 2007. С. 279–286.
5. Гончаров М.А. Компенсационная организация тектонического течения и структурные парагенезы // Геотектоника. 1993. №4. С. 19–29.

QUANTITATIVE CONNECTION OF THE OBSERVED CHANGE IN THE LENGTH OF THE EARTH'S PARALLELS WITH THE NORTHERN DRIFT OF THE EARTH'S CORE AND THE NORTHERN COMPONENT OF THE CONTINENTAL DRIFT

M.A. Goncharov

According to the GPS data, at present, the length of parallels in the Southern hemisphere is increasing and in North hemisphere it is decreasing. The formula which relates the rate of change in the length of a parallel with the velocity of the northern drift of the core is given and the velocity of this drift is evaluated (2.6 cm/yr). During the last 600 Ma, the northern component has been characteristic for the continental drift and flow of underlying mantle. The simplest kinematic model of this flow is based on the principle of its balanced arrangement: in the rear of this horizontal tectonic flow (beneath the South Pole), the balancing ascending flow which supports the high standing of Antarctica is inevitable, and at its front (beneath the North Pole), the balancing descending flow which caused the prolonged and completely intensive subsidence of the bottom of Arctic ocean (the antipode of Antarctica according to its outlines) is inevitable as well. The expansion of the surface of the Southern hemisphere and the reduction of the surface of the Northern hemisphere is the consequence of this meridional convection. The characteristic velocity of the superficial horizontal flow is evaluated (0.25 cm/yr). Like the velocity of the core drift, this value is also evaluated according to the characteristic rate of lengthening of Earth's parallels. A possible reason for convection is the displacement of Earth's core to the North Pole.

Keywords: drift of Earth's core, drift of continents, GPS, change in length of Earth's parallels, balanced arrangement of tectonic flow, meridional convection.

УДК 616.314-089.843-07

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ СТОМАТОЛОГИИ

 М.В. Джалалова, В.А. Ерошин

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

margarita-vd@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

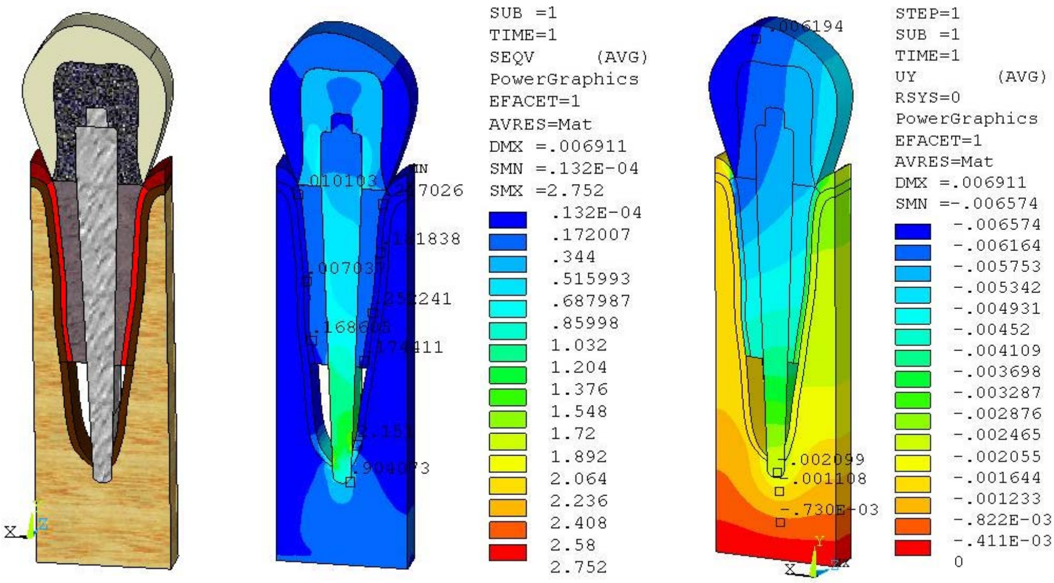
Приводятся результаты численного исследования методом конечных элементов полей напряжений в костной ткани в окрестности различных имплантатов (эндодонто-эндооссальных и дентальных), а также значения их перемещений и коэффициентов жесткости. Выполнено сравнение с опытными данными, полученными методикой лазерного тестирования.

Ключевые слова: зуб, напряжение, перемещение, дентальный имплантат, эндодонто-эндооссальный имплантат, коэффициенты жесткости, метод конечных элементов.

Эндодонто-эндооссальные имплантаты

Одной из важнейших задач хирургической стоматологии является развитие такого ее раздела, как зубосохраняющие операции. Из существующих различных методов хирургических вмешательств, позволяющих сохранять зубы с воспалительно-деструктивными изменениями в периапекальных тканях, является эндодонто-эндооссальная имплантация (ЭЭИ). Армирование зубов такими имплантатами, подвергшихся резекции корней, улучшает их биомеханические показатели, а основным достоинством этого вида имплантата является его «защищенность»: периодонтальная связка и основная часть зуба остаются невредимыми. ЭЭИ обладает достаточной прочностью, повышает биомеханические показатели оперированного зуба, обеспечивает равномерное перераспределение жевательной нагрузки на опорные ткани зуба и костной ткани, тем самым восстанавливает его жевательную функцию.

Для понимания влияния имплантата (титанового) на окружающие зуб ткани под действием нагрузки на окклюзионную поверхность зуба (премоляр верхней челюсти) было проведено математическое исследование этого вопроса методом конечных элементов. Рассматривались различные варианты: отсутствие 1/3, 1/2 корня зуба и отсутствие 2/3 корня зуба с увеличенной длиной имплантата на 3 мм. Задача решалась в программном комплексе ANSYS. Во всех вариантах задавалась одинаковая распределенная нагрузка на окклюзионную поверхность



а) *б*) Рис. 1 *в*)

зуба. На рис. 1 показана компьютерная модель премоляра верхней челюсти с ЭЭИ: *а* – отсутствие 1/3 корня, *б* – распределение напряжения по Мизесу, *в* – перемещения имплантата и ткани. Расчеты показали [1, 2], что при отсутствии 1/3 и даже 1/2 корня зуба установка имплантата позволяет в значительной мере укрепить зуб, а при правильно выбранной длине ЭЭИ его можно устанавливать даже в крайне тяжелом случае – отсутствии 2/3 корня. Изучены зоны максимальных напряжений и смещений. Даны практические рекомендации стоматологам.

Дентальные имплантаты

Дентальный имплантат – это небольшая титановая конструкция, которая используется для замены корневой части отсутствующего зуба. С течением времени он срастается с костью и служит опорой для фиксации протеза.

Для изучения зависимости величины перемещений как самих имплантатов (отличающихся длиной и диаметром), так и материала образца, а также полей распределения напряжений от вертикальных нагрузок [3, 4] и пары сил [5] на имплантат, рассматривались одинаковые образцы из материала боксил с различными граничными условиями. Численно получены значения перемещений имплантатов и напряжений по Мизесу в материале образца для всех вариантов: на рис. 2 в качестве примера показаны трехмерные модели ввинченных в образцы имплантатов – под действием пары сил они переместились вбок, потянув за собой сам образец (закреплено дно; прозрачная сетка – это положение имплантата до нагрузки). Выявлен наилучший вариант имплантата с наименьшими значениями перемещений и напряжений под действием как вертикальной нагрузки, так и пары сил. В физическом эксперименте (по методике лазерного тестирования) делались замеры угла поворота имплантата α под действием пары сил M. Коэффициент жесткости определялся как $\delta = M/\alpha$ (нм/рад). Расхождение коэффициентов жесткости, полученных в численном и физическом экспериментах, находится в интервале 2.5–4.2%. Такое согласование численных расчетов с опытными данными подтверждает как достоверность экспериментальных результатов, так и адекватность методики численных расчетов.

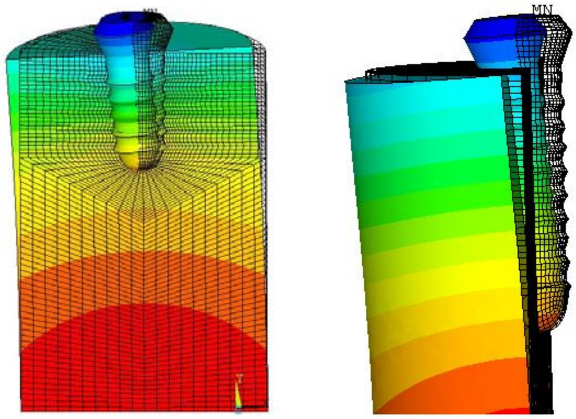


Рис. 2

Список литературы

1. Арутюнов С.Д., Джалалова М.В., Унанян В.Е., Ерошин В.А. Обоснование целесообразности армирования зубов с резецированными и ампутированными корнями эндодонто-эндооссальными имплантатами // Институт стоматологии. СПб. 2008. №1(38). С. 98–101.

2. Арутюнов С.Д., Джалалова М.В., Унанян В.Е. Обоснование выбора эндодонто-эндооссального имплантата оптимальных параметров для ортопедического лечения больных с подвижными зубами // Российский стоматологический журнал. М. 2009. №3. С. 5–6.

3. Джалалова М.В. и др. Численное исследование напряжения и перемещения дентальных имплантатов в образце // Российский стоматологический журнал. М. 2009. №5. С. 7–9.

4. Бойко А.В., Джалалова М.В., Ерошин В.А. Механика в проблемах стоматологии: методы определения коэффициентов жесткости крепления дентальных имплантатов // Сб. трудов Междунар. научно-практич. конф. М.: Изд-во МГСУ, 2009. С. 69–76.

5. Арутюнов С.Д. и др. Оценка прочности крепления дентальных имплантатов методом лазер-торк теста. // Российский стоматологический журнал. М. 2010. №6. С. 4–6.

MATHEMATICAL MODELING FOR THE PROBLEMS OF DENTISTRY

M.V. Dzhalalova, V.A. Eroshin

Presents the results of numerical investigation of stress fields in the bone tissue in the vicinity of the various implants using the finite element method (endodonto-endosseous and dental), as well the values of their displacements and stiffness coefficients, values of which are compared with experimental data obtained by the method of laser testing.

Keywords: tooth, stress, displacement, dental implant, endodonto-endosseous implant, stiffness coefficients, the finite element method.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГЕМОДИНАМИКИ КРОВОТОКА С УЧЕТОМ РАБОТЫ РАСПРЕДЕЛЕННОГО СЕРДЦА

А.В. Доль, Ю.П. Гуляев

Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского

dzero@pisem.net

Поступила в редакцию 15.06.2011

Представлены математические модели движения крови в крупных кровеносных сосудах с учетом работы распределенного сердца. Рассмотрена модель в рамках одномерной теории течения вязкой несжимаемой жидкости. Представлена модель кровотока в трехмерном случае.

Ключевые слова: биомеханика, гемодинамика, математическое моделирование, уравнения Навье – Стокса, артерия.

Основная замкнутая система уравнений течения вязкой несжимаемой жидкости

Вопросы моделирования гемодинамики крупных кровеносных сосудов приобретают в последнее время все большую актуальность. Это связано с медицинскими проблемами реконструкции сосудистого русла при атеросклеротических поражениях и необходимостью прогнозирования возможного поведения сосуда в ближайшие и отдаленные периоды после оперативного вмешательства.

Построим математическую модель динамики кровотока.

Движение крови по сосуду предполагается осесимметрическим, поэтому будем рассматривать его в цилиндрической системе координат. Ось z направляем по оси сосуда, полярную ось r направим по его радиусу. Поле скоростей с компонентами v_r, v_z зависит от переменных z, r, t.

Уравнения Навье – Стокса в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial r}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{v_r}{r^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right), \quad (1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=$$

$$=-\frac{\partial P}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial (rv_r)}{\partial r}+\frac{\partial (rv_z)}{\partial z}=0, \quad (3)$$

где ρ – плотность крови, μ – вязкость крови, P – давление.

Получим уравнения движения цилиндрической оболочки. На стенки трубы действует трансмуральное давление, состоящее из среднего давления P_0 и пульсационной составляющей P'. Оболочка находится в предварительно натянутом состоянии. Кроме трансмурального давления на стенки действуют силы вязкого трения и силы упругой податливости окружающих сосуд тканей в осевом и радиальном направлении соответственно: $S_1 = -K_2 u$, $P_1 = -K_1 w$, K_1, K_2 – коэффициенты податливости тканей.

В поперечном сечении действует продольная сила: $S = S_0 + S'$, где S_0 – средняя сила продольного натяжения, S' – пульсационная составляющая продольной силы. В окружном направлении на элемент действует поперечная сила натяжения $T = T_0 + T'$, где T_0 – средняя сила поперечного натяжения сосуда, T' – пульсационная составляющая поперечной силы.

Уравнение изменения количества движения элемента оболочки в осевом направлении имеет вид:

$$\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial S'}{\partial z}+\frac{S_0-T_0}{R}\frac{\partial w}{\partial z}-K_2 u, \quad (4)$$

где w – радиальное смещение стенки, R – радиус сосуда.

Уравнение изменения количества движения элемента в радиальном направлении:

$$\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=P'+\frac{P_0}{R}w-\frac{T'}{R}+S_0\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-K_1 w. \quad (5)$$

Используя закон Гука, получим уравнения для усилий:

$$S' = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{w}{R}\right],$$

$$T' = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{w}{R} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right], \qquad (6)$$

ν – коэффициент Пуассона.

Система (1)–(6) представляет собой замкнутую систему уравнений динамики кровотока в артериальном русле.

Одномерная теория

Для вывода уравнений одномерной теории нужно усреднить уравнения Навье–Стокса по радиусу трубы. Если ввести объемный расход по формуле

$$Q = \int_0^R 2\pi r v_z dr,$$

а также пренебречь конвективной составляющей ускорения частиц жидкости, инерционными силами, действующими на элемент оболочки, из замкнутой системы уравнений (1)–(6) получается более простой вариант системы уравнений динамики кровотока:

$$\begin{gathered}\rho\frac{\partial Q}{\partial t} = -\pi R^2\frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{8\pi\mu}{\pi R^2}Q,\\ \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial Q}{\partial z},\\ S_0\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + p' + \frac{T_0}{R^2}w - \frac{T}{R} = 0,\\ T = \frac{Eh}{1-\nu^2}\frac{w}{R}.\end{gathered} \qquad (7)$$

Пульсовая волна давления, распространяясь по сосуду, вызывает ответную реакцию мышечных слоев сосудистой стенки. Эта реакция выражается в принудительном продольном растяжении мышечных волокон, которые приводят к дополнительному перемещению сосудистой стенки. В силу наличия вязкости крови, последняя увлекается стенкой. В результате средняя скорость кровотока возрастает. Такую схему взаимодействия стенки сосуда с кровью можно назвать распределенным (вторичным) сердцем.

Из этой системы получается уравнение для объемного кровотока с учетом реактивного перемещения стенок сосуда, возникающего под действием волны давления:

$$\rho\frac{\partial Q}{\partial t} = -\pi R^2\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{8\pi\mu}{\pi R^2}(Q - \pi R^2 v_0), \qquad (8)$$

где v_0 – средняя скорость продольного перемещения стенки сосуда за счет мышечной реакции. Дальнейшая процедура построения решения задачи о пульсации кровотока представлена в работе [1].

Трехмерная теория

В трехмерном случае система уравнений (1)–(6) при определенных упрощениях методом разделения переменных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно амплитуд пульсирующего кровотока. При этом амплитуда продольных скоростей в жидкой части системы будет удовлетворять уравнению Бесселя нулевого порядка:

$$\frac{v_{z0}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{v_{z0}}{\partial r} - \frac{i\rho\omega}{\mu}v_{z0} = 0, \qquad (9)$$

где v_{z0} – проекция скорости течения крови на ось z; ω – круговая частота.

Работа «распределенного сердца» моделируется с помощью функции дополнительных продольных реактивных перемещений стенок сосуда, инициированных пульсовой волной.

Предложенные математические модели динамики кровотока достаточно точно описывают течение крови в сужающихся сосудах и могут применяться для решения задач динамики кровотока в артериальном дереве различной геометрической конфигурации.

Список литературы

1. Гуляев Ю.П., Коссович Л.Ю. Математические модели биомеханики в медицине. Саратов: Изд-во СГУ, 2001. 49 с.

MATHEMATICAL MODELS OF HAEMODYNAMICS WITH TAKING INTO ACCOUNT THE WORK OF A DISTRIBUTED HEART

A.V. Dol, Yu.P. Gulyaev

The paper describes mathematical models of blood flow in large-scale vessels with taking into account the work of a distributed heart. The mathematical model of a viscous incompressible liquid flow is considered. A 3-dimentional mathematical model is described.

Keywords: biomechanics, haemodynamics, mathematical modeling, Navier– Stokes, artery.

УДК 550.3+539.3

РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЗЕМЛЕ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ В НЬЮТОНОВОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ ЛУНЫ И СОЛНЦА

А.К. Егоров, М.А. Баймухаметов

Институт механики и машиноведения им. У.А. Джолдасбекова, Алматы (Казахстан)

b_murat55@mail.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

С использованием метода Лейбензона – Ишлинского исследования устойчивости деформируемых систем изучены формы потери устойчивости упругих колебаний шаровидной модели Земли из однородного сжимаемого линейно упругого материала, вращающейся в потенциальном ньютоновом силовом поле, обусловленном Луной и Солнцем. В качестве основного предкритического состояния рассмотрены вынужденные сфероидальные колебания рассматриваемой модели Земли. Исследованы свободные колебания этой модели. Выведены граничные условия устойчивости. Выявлен спектр бифуркационных частот колебаний, сравнимых с частотой свободных колебаний. Определена мера динамической восприимчивости к вынуждающим бифуркационным силам. По этой мере можно судить о резонансных явлениях в Земле, служащих спусковым механизмом для землетрясений. Дана численная реализация теории. Созданы анимационные фильмы, демонстрирующие резонансные всплески.

Ключевые слова: резонанс, устойчивость, частота, свободное колебание, бифуркационное колебание, Земля, Луна, Солнце.

Основное предкритическое состояние

Используется система дифференциальных уравнений в частных производных вынужденных колебаний теории упругости с учетом инерционных слагаемых и компонентов массовых сил в сферических (географических) координатах [1]. Компоненты массовых сил, записанные через их потенциал U_k, имеют вид [1]:

$$K_r = -\frac{\partial U_k}{\partial r}, \quad K_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U_k}{\partial \theta},$$
$$K_\lambda = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_k}{\partial \lambda}, \tag{1}$$

где потенциал U_k для соответствующего значения k ($k = 1, 2$), т.е. соответствующего периода колебаний T_k, получен в следующем виде [2]:

$$U_k = -\gamma r^2 P_2^{(k)}(\cos\theta)[A_{2k}\cos(k\lambda - \sigma_k t + \psi_j) + $$
$$+ B_{2k}\sin(k\lambda - \sigma_k t + \psi_j)], \tag{2}$$

где r, θ, λ – сферические координаты точек Земли, $P_2^{(k)}(\cos\theta)$ – присоединенная функция полиномов Лежандра, γ – всемирная гравитационная постоянная; значению $k = 2$ отвечает полусуточный период $T_2 = 2\pi/\sigma_2$, значению $k = 1$ – суточный $T_1 = 2\pi/\sigma_1$ [3]; σ_1, σ_2 – частоты колебаний; ψ_j ($j = 1, 2$) – фаза, связанная с j-м притягивающим центром (Луной, Солнцем), t – время.

Величины

$$A_{2k} = \frac{2}{\delta_k}\frac{(2-k)!}{(2+k)!}\sum_{j=1}^{2}\frac{m_j D_{kj}}{r_j'^3}P_2^{(k)}(\cos\theta_j')\cos k\lambda_j',$$
$$B_{2k} = \frac{2}{\delta_k}\frac{(2-k)!}{(2+k)!}\sum_{j=1}^{2}\frac{m_j D_{kj}}{r_j'^3}P_2^{(k)}(\cos\theta_j')\sin k\lambda_j', \tag{3}$$

где $\delta_k = 1$ при $k > 0$; m_j – масса j-го притягивающего центра; D_{kj} – произвольные постоянные интегрирования по времени; $r_j', \theta_j', \lambda_j'$ ($j = 1, 2$) – сферические (географические) координаты j-го притягивающего центра, выступающие в качестве параметров.

Потенциал (2) представляет собой гармоническую функцию, удовлетворяющую уравнению Лапласа. Его можно записать в виде:

$$U_k = -r^2 U_k^*(\theta,\lambda), \tag{4}$$

где $U_k^*(\theta,\lambda)$ – сферическая функция. Колебания с частотой σ_k обусловлены потенциалом (2). Поэтому перемещения точек и дилатацию можно представить в виде:

$$u_{1k}^0 = u_{1k0}^0(r)U_k^*(\theta,\lambda),$$
$$u_{2k}^0 = u_{2k0}^0(r)\frac{U_k^*(\theta,\lambda)}{\partial\theta}, \tag{5}$$
$$u_{3k}^0 = u_{3k0}^0(r)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U_k^*(\theta,\lambda)}{\partial\lambda},$$

$$\Theta_k^0 = \Theta_{k0}^0(r)U_k^*(\theta,\lambda). \tag{6}$$

Тогда исходную систему дифференциальных уравнений в частных производных можно свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно величин $u_{1k0}(r)$, $u_{2k0}(r)$, $u_{3k0}(r)$, $\Theta_{k0}^{0}(r)$.

Эти уравнения суть обыкновенные дифференциальные уравнения с регулярной особой точкой, решаемые в обобщенных степенных рядах и методом неопределенных коэффициентов.

Для определения произвольных постоянных интегрирования по координатам воспользуемся граничными условиями:

$$\sigma_{11k}^{0}(r) = -\rho g u_{1k}^{0}(r),\ \sigma_{12k}^{0}(r) = \sigma_{13k}^{0}(r) = 0 \qquad (7)$$

при $r = r_0$, где r_0 – радиус Земли, g – ускорение силы тяжести. К граничным условиям следует присоединить дифференциальную зависимость дилатации от перемещений. Таким образом, определяются произвольные постоянные интегрирования по координатам.

Для определения произвольных постоянных интегрирования D_{ij} (i, j = 1, 2) по времени воспользуемся выражением для радиальной компоненты перемещения, задавая наибольшие ее значения – размеры «горбов» в сторону Луны или Солнца в момент новолуния. Таким образом, определяется основное предкритическое состояние колебаний точек модели Земли. Свободные колебания определяются без учета массовых сил.

Потеря устойчивости колебаний точек Земли. Резонанс

Граничные условия устойчивости колебаний, выведенные нами, имеют вид:

$$\sigma_{11} + \left(\frac{\partial \sigma_{11}^{0}}{\partial r} + \rho g \right) u_1 = 0,$$

$$\sigma_{12} + \frac{\sigma_{22}^{0}}{r_0} \left(u_2 - \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) = 0, \qquad (8)$$

$$\sigma_{13} + \frac{\sigma_{33}^{0}}{r_0} \left(u_3 - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} \right) = 0,$$

при $r = r_0$. Здесь ноликом отмечены напряжения основного состояния. Бифуркационные возмущения не отмечены никаким индексом.

Выведена мера динамической восприимчивости к вынуждающим бифуркационным силам:

$$\lambda_0 = \frac{a^2 + m^2}{\sqrt{(a^2 - \omega_0^2 + m^2)^2 + 4a^2\omega_0^2}}, \qquad (9)$$

где m – действительная частота свободных колебаний; ω_0 – действительная и a – мнимая части комплексной частоты ($\omega_0 - ai$) бифуркационных вынужденных колебаний, ($a > 0$, i – мнимая единица).

При $\omega_0 \to m$ эта мера резко возрастает. При этом имеет место явление резонанса как спускового механизма для землетрясений.

Составлены компьютерные программы численной реализации теории. Созданы анимационные фильмы, демонстрирующие резонансные всплески.

Список литературы

1. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
2. Егоров А.К., Ершибаев У.Д. Бифуркационные колебания Земли и явление георезонанса как «спускового механизма» будущих землетрясений // Новости науки Казахстана: Научно-технич. сб. Алматы. 2004. Вып. 2(81). С. 152–157.
3. Молоденский М.С., Крамер М.В. Земные приливы и нутация Земли. М.: Изв. АН СССР. 1961. 40 с.

THE RESONANT PHENOMENA IN THE EARTH ROTATING IN A NEWTONIAN FORCE FIELD OF THE MOON AND THE SUN

A.K. Egorov, M.A. Baimukhametov

Using Lejbenzon – Ishlinsky method of investigating the stability of deformable systems, forms of loss of stability of elastic fluctuations of a spherical model of the Earth of a homogeneous compressed linearly elastic material, rotating in the potential Newtonian force field caused by the Moon and the Sun, are studied. As the basic subcritical condition the compelled spheroidal fluctuations of considered model of the Earth are considered. Free fluctuations of this model are investigated. Boundary conditions stability of are assigned. The spectrum of bifurcational frequencies of fluctuations, comparable with frequency of free fluctuations is revealed. The measure of a dynamic susceptibility to compelling bifurcational forces is defined. According to this measure, it is possible to judge the resonant phenomena in the Earth, serving by the trigger mechanism for earthquakes. A numerical realization of the theory is given. Animation showing resonant splashes is created.

*Keywords:*resonance, stability, frequency, free fluctuation, bifurcational fluctuation, the Earth, the Moon, the Sun.

УДК 551.324.5:551.321:620.179.17

АКУСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ ДВИЖЕНИЯ ЛЕДНИКОВ

***В.П. Епифанов*[1], *А.Ф. Глазовский*[2]**

[1]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва
[2]Институт географии РАН, Москва

evp@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Изучаются волновые явления, которые происходят в процессе деформирования природного льда и отражаются в его акустических характеристиках. Выполнен комплекс исследований, необходимых для расшифровки сигналов акустической эмиссии в активных участках ледникового покрова. В основу положены данные измерений реологических и акустических характеристик (количество, амплитуда и спектральный состав сигналов акустической эмиссии, а также скорость и поглощение ультразвука) в ультразвуковом диапазоне частот при сжатии, осесимметричном сдвиге и растяжении (в условиях стеснения) и ударе. Рассмотрены возможные источники излучения упругих волн в леднике (трение, нарушение сплошности и т. д.) и их отличительные спектральные характеристики.

Ключевые слова: лед, акустическая эмиссия, пластическая деформация, ледник, физическое моделирование.

Акустический мониторинг деформационных процессов во льду

Применение акустических методов в механике дефрмирования и разрушения льда основано на установлении корреляционной связи между акустическими характеристиками и деформационными изменениями его структуры, которые происходят на определенных стадиях пластических деформаций и изменяют его акустические свойства.

Параметры сигналов акустической эмиссии в интервале от 20 Гц до 20 кГц и параметры ультразвуковых импульсов (0.5–80 МГц), которыми прозвучивали образцы природного льда с помощью импульсно-фазового ультразвукового метода, синхронно определяли непосредственно в процессе механических испытаний [1, 2].

Контрольные измерения показали, что при напряжениях менее 50 кПа, создаваемых упругой волной, во льду реализуется амплитудно-независимый механизм и выполняется квадратичная зависимость поглощения от частоты. Потери акустической энергии определяются ее рассеиванием на межкристаллитных поверхностях (79%) и дислокационными потерями (21%). Рассчитаные значения плотности дислокаций (10^5–10^6 м$^{-2}$) и их длины (10^{-5} м) соответствуют динамической теории распространения ультразвука в поликристаллических средах. Это подтверждает пригодность измерительных средств и методики измерений для исследования конечных деформаций во льду.

Результаты испытаний на сжатие, растяжение, сдвиг и удар

На рис. 1 представлены зависимости коэффициента поглощения *1*, продольной *2* и поперечной *4* деформации, скорости ультразвука *3* и амплитуды сигналов акустической эмиссии от напряжения при сжатии, а на рис. 2 – зависимости напряжений *1*, избыточного коэффициента поглощения *2*, скорости продольной волны *3* и параметра дефектности *4* от деформации при растяжении.

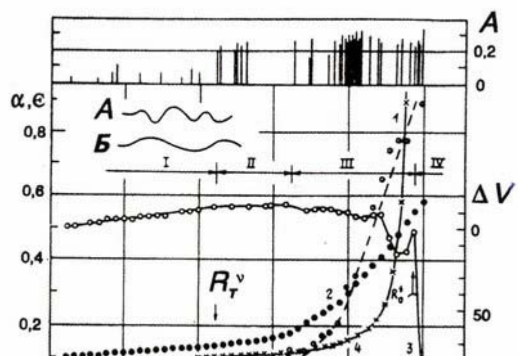


Рис. 1

По характерным изменениям поглощения звука на деформационной кривой, полученной при испытаниях на сжатие (10^{-2}–10^{-5} с$^{-1}$), выделены отрезки, соответствующие упругим и необратимым деформациям (см. рис. 1), определены параметры дислокаций вблизи пределов истиной упругости и текучести.

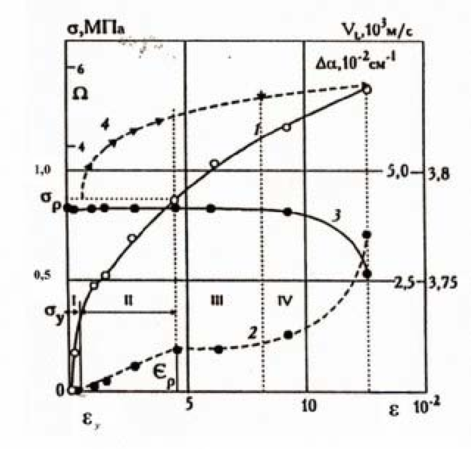


Рис. 2

Механизм амплитудно-зависимых потерь упругого деформирования льда обусловлен трением, а не отрывом, и адекватно отражается моделью дислокационного гистерезиса – петлей Давиденкова. Эффективное сечение деформационных трещин изменяется почти на порядок, при этом поглощение ультразвука увеличивается на 300%. Найдена корреляция между параметрами сканирующего импульса и сечением рассеяния трещины. Если дилатансия не превышает 2%, то лед рассматривается «акустически макрооднородным».

Смена механизмов пластических деформаций сопровождается существенным изменением количества и размеров деформационных дефектов (кривая *4* на рис. 2). Стадийный характер увеличения дефектности учтен в определяющем реологическом соотношении (растяжение с боковым стеснением). Хрупкому отрыву при растяжении предшествует формирование зоны разрушения, размер которой больше, чем следует из теории. Особенности формирования этой зоны отражены на фрактограммах разрушения и характеристиках сигналов акустической эмиссии (АЭ).

Процесс удара количественно исследован с помощью пьезоэлектрического акселерометра. Найден параметр физического подобия деформационных процессов и построены обобщенные зависимости среднего мгновенного напряжения от приведенной скорости удара (около 2 м/с). Синхронная запись деформационной кривой и эффективной энергии акустических импульсов при индентировании показала хорошую корреляцию акустических параметров выделяющейся упругой энергии с реологическими процессами [3].

На рис. 3 изображены зависимости эффективной энергии акустических импульсов (кривая *1*) и силы сдвига (кривая *2*) от времени нагружения. При сдвиге в условиях стеснения переход от одной к другой стадии пластических деформаций сопровождается не только дефицитом упругого модуля от одного до трех порядков его значения в недеформированном состоянии, но и существенными изменениями характеристик акустической эмиссии. Согласно теории подобия, полученные данные испытаний на сдвиг могут быть применены, по крайней мере, до линейного размера в несколько метров.

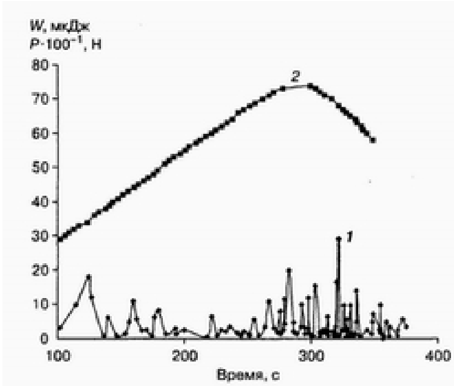


Рис. 3

Физическое моделирование источников сигналов АЭ в ледниках

На ледяном покрове естественного водоема искусственно вызывали процессы, которые в первом приближении соответствовали процессам в ледниках (трещинообразованию, трению на ложе и при камнепаде) и записывали сигналы АЭ. На рис. 4 приведена осциллограмма сигнала АЭ при ударе с отражениями от бортов (амплитуда–время, в мс).

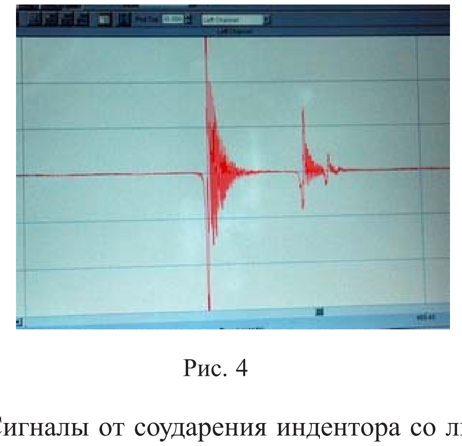


Рис. 4

Сигналы от соударения индентора со льдом показывают кратковременные всплески в узком диапазоне частотного спектра, а сигналы, которые генерируются при скольжении льда по грунту, характеризуются монотонным увеличением интенсивности их спектральных характеристик во времени. Установленные закономерности взяты за основу для расшифровки акустических характеристик при движении льда в ледниках.

Выполненные исследования показали, что акустические характеристики льда являются функциями его термодинамического состояния и могут быть использованы для дистанционного мониторинга процессов, наблюдаемых в зонах сжатия и растяжения ледника, например, для определения перехода от накопления дефектов к локальной подвижке [4]. Разработан экспресс-метод определения динамической твердости льда и предложен способ прогнозирования лавинной опасности [5].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 10-05-01146).

Список литературы

1. Воронина И.Ю., Епифанов В.П. // Акустический журнал. 1980. Т. 26. Вып. 3. С. 371–376.
2. Епифанов В.П. // Докл. РАН. 2007. Т. 412, №1. С. 39–43.
3. Гольдштейн Р.В., Епифанов В.П., Осипенко Н.М. // Актуальные проблемы механики. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 2009. С. 35–55.
4. Епифанов В.П., Глазовский А.Ф. // Научный журнал Криосфера Земли. 2010. Т. XIV, №4. С. 42–55.
5. Епифанов В.П. Механика деформируемого льда. Гляциология. М.: ВИНИТИ АН СССР. 1991. Т. 8. 204 с.

ACOUSTIC METHODS IN MECHANICS OF THE MOTION OF GLACIERS

V.P. Epifanov, A.F. Glazovsky

Possible sources of elastic wave radiation in a glacier (friction, discontinuity formation, etc.) and their distinctive spectral characteristics are discussed. A combined research required to interpret the signals of acoustic emission in the active glacier areas has been implemented. It is based on the studies of wave phenomena that occur during deformation of natural ice and are reflected in its acoustic characteristics, as well as on physical modeling of acoustic emission sources. The experimental data is used to evaluate the possibility of determining the transition from the stage of accumulation of deformation defects in the glacier body up to its local advance.

Keywords: ice, acoustic emission, plastic deformation, glacier, physical modeling.

УДК 532.59

ДИНАМИКА ИНТЕНСИВНЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ЯПОНСКОМ И ОХОТСКОМ МОРЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПУТНИКОВЫХ ДАННЫХ

А.В. Ермошкин

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

al-ermoshkin@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Проведено исследование эволюции интенсивных внутренних волн (ВВ) в Японском и Охотском морях по их проявлениям в оптических и радиолокационных изображениях морской поверхности. Приводится сопоставление экспериментально вычисленных кинематических характеристик ВВ с их теоретическими значениями в приближении двухслойной жидкости, для чего привлекаются данные батиметрии GEBCO и стратификации с буев ARGO. Для описания поля течений, создаваемых интенсивными ВВ на поверхности, используется приближенная модель, в основе которой лежит представление интенсивных ВВ в виде составных солитонов, представляющих собой суперпозицию кинков – перепадов поля противоположной полярности. Результаты численного анализа эволюции профиля ВВ сопоставляются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: внутренние волны, дистанционное зондирование, уравнение Гарднера, солитон.

Введение

Комплексное исследование внутренних волн (ВВ) ведется достаточно интенсивно, особенно изучение ВВ в шельфовой зоне [1–5]. В шельфовой зоне наблюдаются наиболее интенсивные ВВ, которые существенным образом влияют на перемешивание прибрежных вод. В последнее время интерес вызывают работы по восстановлению гидрологических характеристик водной толщи по наблюдениям интенсивных ВВ. Изучению ВВ в тихоокеанском бассейне посвящено много исследований, в которых на основе измерений течений в верхнем слое океана и анализа их кинематических характеристик (в том числе и на поверхности океана) делается вывод о солитонном типе эволюции ВВ. Ранее в [6] был предложен приближенный аналитический подход, позволивший в рамках уравнения Гарднера (КдВ с кубичной и квадратичной нелинейностями) описать эволюцию произвольного цуга интенсивных составных солитонов (П-солитонов) ВВ, наблюдавшихся в ходе COPE эксперимента, проведенного в 1995 году на северо-западном побережье США. Анализ показал хорошее качественное и количественное совпадение расчетов по предложенной модели с результатами эксперимента. Основные отличия между теорической моделью и экспериментальными данными были связаны с различием временной длительности импульсов-солитонов в группе, что может быть обусловлено ограничением применимости уравнения Гарднера: в более реалистичной сильно нелинейной модели [7, 8] П-солитоны шире и время их взаимодействия больше. Аналогичные расчеты мы предполагаем провести для тихоокеанского побережья с учетом изменения глубины шельфовой области. При этом следует выбрать модель нелинейного эволюционного уравнения: уравнение Гарднера, уравнения Чой – Камасса (в общем случае с переменными коэффициентами, учитывающими неоднородность шельфовой области) и др.

С этой целью в настоящем исследовании приводятся результаты анализа эволюции ВВ в шельфовой области Японского и Охотского морей по их проявлениям в оптических и радиолокационных изображениях морской поверхности. На первом этапе анализ проводится в линейном приближении с использованием линейной лучевой теории, которая позволит по заданным на поверхности фронтам ВВ определить уравнение лучей и сделать оценки для относительного изменения амплитуды ВВ вдоль лучевых трубок в линейном приближении. На втором этапе проведено исследование эволюции интенсивных солитонов ВВ в рамках уравнения Гарднера в приближении двухслойного горизонтально однородного океана и приведены модельные расчеты эволюции интенсивного солитона ВВ в горизонтально-неоднородном океане.

Представление ВВ в виде суперпозиции кинков

В линейном приближении проанализирована эволюция интенсивных ВВ в Японском и Охотском морях по их проявлениям в оптических и радиолокационных спутниковых изображениях. Показано, что на временах до 12 часов эволюция волновых фронтов внутренних волн удовлетворительно описывается законами геометрической оптики. При этом в глубоководной части Японского моря нелинейные эффекты не успевают проявиться на исследуемых масштабах времени (100 минут). В шельфовой же зоне Охотского моря наблюдаются нелинейные внутренние волны, что необходимо учитывать при их расчете. С целью расчета динамики интенсивных ВВ в шельфовой области был использован модифицированный приближенный подход, развитый И.А. Соустовой и К.А. Горшковым ранее. В основе подхода лежит представление группы интенсивных ВВ вблизи шельфа совокупностью «столообразных» солитонов, амплитуда которых близка к амплитуде предельных солитонов уравнения Гарднера (уравнение КдВ с кубичной нелинейностью) с переменными параметрами. Вопросы распространения уединенных волн в средах с переменными параметрами давно изучаются в теории солитонов. Наиболее исследованными и завершенными к настоящему времени можно считать задачи об эволюции солитонов в средах с медленно меняющимися (по сравнению с масштабами уединенных волн) параметрами. Квазистационарность волнового процесса позволяет в этом случае считать решение близким к стационароной уединенной волне – солитону с плавно меняющимися параметрами – и, таким образом, свести описание трансформации поля уединенной волны к существенно более простой задаче – описанию динамики конечного числа независимых параметров солитона. В случае когда амплитуда солитона становится близкой к предельной, такой квазистационарный подход становится не справедливым. Ключевым моментом в построении приближенного решения в этом случае является составная структура солитонов, близких к предельным: солитоны имеют вид плато произвольной протяженности, ограниченного относительно узкими перепадами поля – кинками разной полярности, являющимися наряду с солитонами стационарными решениями уравнения Гарднера с постоянными параметрами. Отметим, что отличие скорости солитонов, наблюдаемых на тихоокеанском шельфе, от скорости кинка экспоненциально мало. Проведено исследование динамики наблюдаемых ВВ как составных солитонов предельной амплитуды и проведено сопоставление с численным счетом нелинейного одномерного (вдоль луча) уравнения КдВ (и его модификаций) в приближении однородного океана, а также модельные расчеты эволюции солитона предельной амплитуды при различных законах изменения глубины шельфа.

Автор выражает благодарность И.А. Соустовой, К.А. Горшкову и Ю.И. Троицкой за участие в подготовке работы и обсуждении результатов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №09-05-00487-а.

Список литературы

1. Apel J.R. et al. Internal solitons in the ocean // Technical Report WHOI-05, 2005.

2. Сабинин К.Д., Серебряный А.Н. «Горячие точки» в поле внутренних волн в океане // Акустический журнал. 2007. Т. 53, №3. С. 410-436.

3. Серебряный А.Н. Наблюдение внутренних волн, отраженных от материкового склона Камчатки // Докл. РАН. 2000. Т. 374, №3. С. 1179-1182.

4. Сабинин К.Д. Внутренний прилив в Камчатском течении // Океанология. 1996. Т. 36, №6. С. 814-818.

5. Serebryany A.N. Internal waves on Pacific shelf of Kamchatka (Preliminary results of internal wave field observations) // Proceedings of the U.S.-Russia Workshop on experimental acoustics / Ed. V.I. Talanov. Institute of Applied Physics, Nizhniy Novgorod. 2000. P. 116-122.

6. Gorshkov K.A. et al. Perturbation theory for kinks and its application for multisoliton interactions in hydrodynamics // Physical review E 69, 0166XX. 2004.

7. Горшков К.А. и др. Исследование взаимодействия интенсивных внутренних волн в рамках уравнений Чой - Камасса // Физика атмосферы и океана. 2011. (принято к печати).

8. Nakoulima O. et al. Analytical and numerical studies of the variable-coefficient Gardner equation // Appl. Math. Comput. 2004. V. 152. P. 449-471.

ANALYSIS OF INTENSE INTERNAL WAVE EVOLUTION IN THE SEAS OF JAPAN AND OKHOTSK USING SATELLITE DATA

A.V. Ermoshkin

The paper is concerned with the investigation of the internal wave (IW) dynamics in the areas of the Sea of Okhotsk and the Sea of Japan by their surface manifestations recorded by MODIS radiometer (MODerate resolution Imaging Spectroradiometer) of the Terra and Aqua satellites and ASAR synthetic aperture radar of the Envisat satellite. Principal attention is focused on a complex study of the dynamics of intense internal waves propagating in a shelf zone of the ocean.

Keywords: internal waves, remote sensing, Gardner equation, soliton.

УДК 539.3; 539.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ НАНОЧАСТИЦ И НАНОСИСТЕМ МЕТОДАМИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

В.Г. Заводинский, А.А. Гниденко, М.А. Кулик

Институт материаловедения ДВО РАН, Хабаровск

vzavod@mail.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Методами функционала электронной плотности и псевдопотенциала проведено моделирование равновесных конфигураций и механических свойств наночастиц карбида вольфрама и наноразмерных слоев кобальта в приложении к твердым сплавам, получаемым по технологии порошковой металлургии. Обнаружено, что малые частицы (содержащие менее 15 атомных пар WC) обладают кубоподобной структурой типа NaCl, более крупные частицы характеризуются тригональной симметрией, при которой внутренняя атомная структура частиц сохраняет свойственный для NaCl характер чередования атомов W и C. Показано, что модуль Юнга наночастиц в несколько раз превышает модуль Юнга массивного карбида вольфрама. Прочность наночастиц на разрыв также существенно превышает прочность массивного материала. Вакансии снижают прочность наночастиц, однако атомы кобальта, внедряясь в вакансионные позиции, могут восстанавливать прочность наночасти почти до величин, характерных для бездефектного случая. Показано, что с уменьшением толщины прослойки кобальта между кристаллитами карбида вольфрама до наномасштабных размеров прочность ее на поперечный разрыв увеличивается вдвое, но модуль сдвига уменьшается в шесть раз. При этом твердость прослоек может в 3-4 раза превосходить твердость массивного кобальта.

Ключевые слова: карбид вольфрама, наночастицы, моделирование из первых принципов, прочность, модуль упругости, твердость.

Метод и детали вычислений

В настоящем исследовании использован программный пакет FHI96spin [1], основанный на спин-поляризованной версии теории функционала электронной плотности и методе псевдопотенциала. Псевдопотенциалы для вольфрама, углерода и кобальта строились с помощью пакета FHI98PP [2].

Атомная структура наночастиц карбида вольфрама

Обнаружено, что связи типа NaCl предпочтительны для всех изученных частиц. Гексагональные частицы с расположением атомов W и C, как в массивном hex-WC (послойно), нестабильны и имеют тенденцию перестраиваться в частицы с тригональной симметрией и упорядочением типа NaCl. Тригональные частицы конкурируют с кубическими: при $N < 15$ выгодны кубические частицы, а при $N > 15$ становятся выгодными тригональные. Атомные схемы типичных частиц WC15 с кубической и тригональной симметрией показаны на рис. 1.

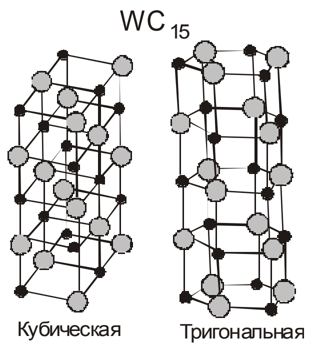


Рис. 1

Модуль Юнга наночастиц WC

Для кубических частиц модуль Юнга, определенный для разных направлений, имеет несущественные отличия по величине, с увеличением размера частиц модуль упругости монотонно уменьшается. Максимальное значение модуля Юнга (4600 ГПа) получено для самой меньшей из исследованных кубических частиц – WC_8 – и в 7.5 раз превышает значение модуля упругости для массивного WC (600 ГПа). Для тригональных частиц модуль упругости существенно зависит от направления деформации. В направлении, перпендикулярном к тригональным слоям, модуль Юнга сопоставим с таковым для кубических частиц. При деформации в плоскости тригонального слоя модуль упругости немонотонно зависит от размера частицы, и его значение сопоставимо с величиной модуля Юнга массивного карбида вольфрама.

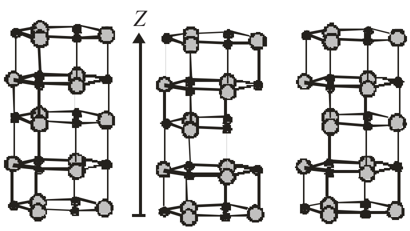
Прочность наночастиц WC

Для нахождения предела прочности на разрыв шаг за шагом удлиняли тригональную частицу WC_{15}, фиксируя каждый раз координаты крайних атомов и давая возможность релаксировать всем остальным (рис. 2). Величина напряжения T вычислялась при этом через производную полной энергии E как функции Z:

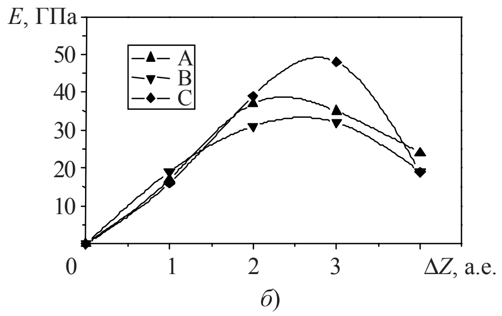
$$T = \frac{dE}{dZ} \cdot \frac{1}{S},$$

S – поперечное сечение частицы.

На рис. 2*а* показаны этапы исследования напряжения разрыва тригональной частицы WC_{15}: A – идеальная частица; B – частица с W-вакансией; C – частица с C-вакансией. Вертикальная стрелка Z показывает направление удлинения.



а)



б)

Рис. 2

Зависимость напряжения как функции удлинения представлена на рис. 2*б*. Предел прочности для бездефектного случая равен 48 ГПа, что значительно больше известных величин для массивного карбида вольфрама (0.3-0.4 ГПа). На этом же рисунке представлены результаты расчетов для частиц с вакансиями. Видно, что вакансии уменьшают предел прочности, однако это влияние не слишком значительное.

Прослойки кобальта

Результаты исследования прочности кобальтовых нанопрослоек на растяжение и на сдвиг приведены на рис. 3 и рис. 4.

На рис. 3 представлены зависимости напряжения от растяжения прослойки кобальта: *1* – монокристаллический кобальт со структурой ГЦК; *2* – бездефектный кобальт, эпитаксиальный по отношению к карбиду вольфрама; *3* – кобальт, эпитаксиальный по отношению к карбиду вольфрама, но содержащий дислокации несоответствия.

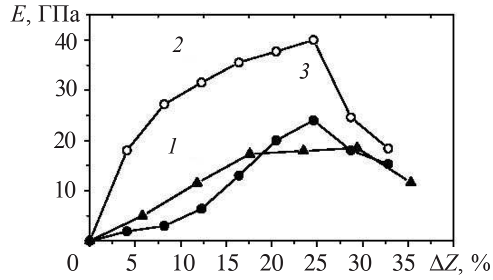


Рис. 3

Зависимости сдвигового напряжения в прослойках кобальта от тангенса угла сдвига показаны на рис. 4, где *1* – монокристаллическая прослойка, *2* – бездефектная прослойка со структурой, эпитаксиальной по отношению к карбиду вольфрама, *3* – прослойка со структурой, эпитаксиальной по отношению к карбиду вольфрама, но содержащая дислокацию несоответствия.

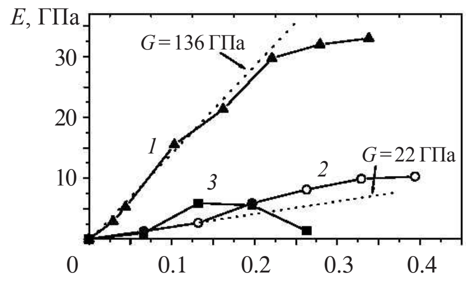


Рис. 4

Список литературы

1. Beckstedte M., Kley A., Neugebauer J., Scheffler M. // Comp. Phys. Commun. 1997. Vol. 107. P. 187–205.

2. Fuchs M., Scheffler M. // Comp. Phys. Commun. 1999. Vol. 119. P. 67–165.

SIMULATION OF MECHANICAL PROPERTIES OF NANOPARTICLES AND NANOSYSTEMS USING QUANTUM-MECHANICS METHODS

V.G. Zavodinsky, A.A. Gnidenko, M.A. Kulik

Simulation of equilibrium configurations and mechanical properties of tungsten carbide nanoparticles and nanoscale cobalt layers was fulfilled using the density functional and pseudopotential methods as an application to hard alloys constructed by the powder metallurgy technology. It has been found that small particles (less than 15 WC atomic pairs) have cubic structures like NaCl; bigger particles are characterized by trigonal symmetry but their internal atomic structure keeps a NaCl-like type of ordering for W and C atoms. It has been shown that Young modulus for nanoparticles is several times as high as Young module for bulk. The tensile strength for nanoparticles is also predicted to be significantly larger than for bulk materials. Vacancies decrease the tensile strength; however, Co atoms can incorporate into vacancy positions and restore the tensile strength approximately to a faultless case. It is shown that when the cobalt interlayer between WC crystallites is reduced to a nanoscale thickness, its cross-section tensile strength increases twice but the shift module decreases six times. The hardness of such layers can be 3-4 times as high as that of bulk cobalt.

Keywords: tungsten carbide, nanoparticles, ab initio simulation, tensile strength, elastic module, hardness.

УДК 539.3

ПОЛУОБРАТНЫЙ МЕТОД В НЕЛИНЕЙНОЙ СТАТИКЕ МИКРОПОЛЯРНЫХ МАТЕРИАЛОВ И ТЕЛ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ДИСЛОКАЦИЯМИ

А.А. Зеленина

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

a.zelenina@gmail.com

Поступила в редакцию 16.06.2011

В рамках модели микрополярной среды (континуума Коссера), т.е. среды с моментными напряжениями и вращательным взаимодействием частиц, найдены семейства конечных деформаций, на которых система уравнений равновесия сводится к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Построены первые интегралы этих уравнений. Рассмотрены задачи изгиба и кручения призматических упругих тел с непрерывно распределенными дислокациями в условиях больших деформаций. Представлен ряд точных решений задач о больших деформациях микрополярных тел и тел с распределенными дислокациями.

Ключевые слова: микрополярная среда, моментные напряжения, большие деформации, распределенные дислокации.

В рамках континуума Коссера найдены семейства конечных деформаций, на которых система уравнений равновесия сводится к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Такими деформациями, называемыми одномерными, можно описать раздувание, растяжение и кручение полого кругового цилиндра, цилиндрический изгиб прямоугольной плиты, образование винтовой дислокации и клиновой дисклинации в полом цилиндре, выворачивание сферического купола и другие виды деформаций. Построение семейств одномерных конечных деформаций осуществляется при помощи специальной новой формы уравнений равновесия для силовых и моментных напряжений, в которой используется аппарат двухточечных тензорных полей. Построены первые интегралы системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих изгиб, растяжение и кручение микрополярного анизотропного слоя. С использованием первых интегралов найдено явное точное решение задачи о больших деформациях чистого изгиба упругой плиты в классе изотропных несжимаемых микрополярных материалов. Модель микрополярной среды применяется для описания композитов, полимеров, наноструктурных и магнитных материалов, а также для учета таких элементов микроструктуры твердых тел, как микронеоднородность и пористость.

Другим распространенным элементом микроструктуры твердых тел являются дислокации, которые в значительной степени определяют пластические и прочностные свойства материалов и конструкций. Представлены и исследованы нелинейные задачи Сен-Венана о кручении и изгибе призматических тел с непрерывно распределенными дислокациями. Тензор плотности дислокаций предполагается не зависящим от координаты, отсчитываемой по оси стержня. Рассмотрены поля распределенных винтовых дислокаций, оси которых могут иметь произвольное направление, а также некоторые типы распределенных краевых дислокаций. При помощи специальной подстановки в нелинейных трехмерных уравнениях равновесия и уравнениях несовместности удалось свести задачу к двухмерной нелинейной краевой задаче для плоской области в форме поперечного сечения стержня. Особенность задач о равновесии тел с распределенными дислокациями состоит в том, что поле перемещений не существует. Несмотря на это, развитая теория кручения содержит такие понятия, как угол закручивания и осевое удлинение стержня, и позволяет определить напряженное состояние призматического тела при заданных плотностях дислокаций и внешних нагрузках – крутящего момента и продольной силы. Установлено, что при определенной зависимости тензора плотности дислокаций от координат призматический стержень закручивается без всякого сопротивления, т.е. при нулевых напряжениях. В случае кругового цилиндра из несжимаемого изотропного материала найдено точное решение нелинейной задачи кручения при наличии распределенных дислокаций.

Решена также нелинейная задача Сен-Венана о пространственном и чистом изгибе призматического тела с распределенными дислокациями. При определенных допущениях о тензоре плотности дислокаций с помощью полуобратного метода осуществлено сведение исходной трехмерной задачи к двухмерной задаче на сечении бруса. Определены силы и моменты, которые необходимо прикладывать к торцам стержня для реализации рассматриваемой деформации. Указаны вариационные формулировки нелинейных задач на сечении с использованием функций напряжений. В случае плоской задачи для прямоугольного бруса найдено точное решение задачи о сильном изгибе при наличии распределенных краевых дислокаций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 09-01-00459, и в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры России» на 2009–2013 годы.

SEMI-INVERSE METHOD IN NONLINEAR STATIC OF MICROPOLAR MATERIALS AND DISTRIBUTED DISLOCATIONS BODIES

A.A. Zelenina

In the framework of a model of a micropolar medium (Cosserat continuum), which is a medium with couple stress and rotational interaction of particles, finite deformations families are found. For these families, the sysTem of equilibrium equations is reduced to the system of nonlinear ordinary differential equations. First integrals of the equations are constructed. The problems of bending and torsion of prismatic elastic bodies with continuously distributed dislocations under large deformations are considered. A number of exact solutions of micropolar bodies with large deformations and bodies with distributed dislocations is represented.

Keywords: micropolar medium, couple stress, large deformations, distributed dislocations.

УДК 532.546

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСКРЫТИЯ ПОР ГИДРОФОБНОЙ НАНОПОРИСТОЙ МЕМБРАНЫ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ВОДНО-ОРГАНИЧЕСКИХ СМЕСЕЙ

В.И. Иванов

Российский госуниверситет нефти и газа им. И.М. Губкина, Москва

v.i.ivanov@mtu-net.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Исследован процесс постепенного раскрытия пор гидрофобной нанопористой мембраны при фильтрации водно-органических смесей под перепадом давления. Поры мембраны моделируются непрерывно распределенными по размеру цилиндрическими капиллярами.

Ключевые слова: гидрофобная мембрана, наноразмерные поры, краевой угол, течение Пуазейля.

При фильтрации водно-органических смесей через нанопористую гидрофобную мембрану наблюдается отсутствие потока жидкости через мембрану при малых перепадах давления [1]. Это объясняется необходимостью преодоления капиллярного давления в порах мембраны. Поры в мембране моделируются сквозными цилиндрическими капиллярами с гидрофобной поверхностью, радиусы сечения которых имеют заданное распределение.

Распределения безразмерных радиусов пор $r = a/a_0$ (a_0 – характерный радиус пор) заданы с помощью плотности распределения $\eta(r)$ – относительного числа пор данного радиуса на единицу площади мембраны при их общем количестве N. Рассмотрены два закона распределения $\eta(r)$:

1) нормально-логарифмический закон

$$\eta(r) = k_l\, e^{-(\ln r - \ln m)^2/(2D)};$$

2) показательно-степенной закон

$$\eta(r) = k_s\, e^{-(r+1/\beta r)^{\lambda}}.$$

Здесь k_l, k_s – нормировочные множители.

Фильтрация водного раствора органических веществ концентрации происходит под действием перепада давления $\Delta P = P - 0 = P$ на сторонах мембраны. Первоначально в каждом капилляре (поре) образуется мениск, радиус которого зависит от радиуса капилляра, и определяется краевым углом θ (рис. 1). Прорыв жидкости происходит при преодолении критического давления

$$P_{cr} = \frac{2\sigma}{R_{cr}} = \frac{2\sigma\cos\theta_A}{a_{cr}}, \quad \theta_A = 180^\circ - \theta.$$

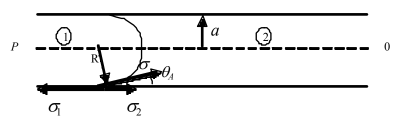


Рис. 1. Модель поры – цилиндрический капилляр

Считаем, что концентрация органических веществ в поре отличается от C_∞ и подчиняется известному распределению концентрации в щелевой поре [2, 3] $C(a) = C_\infty \exp(16A/(kTa^3))$.

В этом случае получаем зависимость критического давления от радиуса капилляра

$$P_{cr}(a_{cr}) = \frac{2\sigma^0}{a_{cr}}\left(\cos\theta_A^0 - \right.$$
$$\left. - \frac{RT}{\sigma^0 A_0 N_a}\ln\left(1 + KC_\infty \exp\left(\frac{16A}{kTa_{cr}^3}\right)\right)\right).$$

Здесь величины с верхним нулевым индексом относятся к случаю $C = 0$.

При приложении давления $P = P_{cr}$ происходит раскрытие пор радиусом a_{cr} и фильтрационное движение жидкости во всех порах, радиус которых не меньше a_{cr}. Будем считать, что это движение жидкости с вязкостью μ при перепаде давления $P = P_{cr}$ во всех порах, радиус которых не меньше a_{cr}, происходит по закону Пуазейля,

$$q(a) = \pi a^4 P/(8\mu h)$$

– поток жидкости в капилляре радиусом a. Поток жидкости через единицу площади равен

$$Q_s = \int_r^{+\infty} q(a_0 r) N \eta(r)\, dr =$$

$$= N\frac{\pi a^4 P}{8\mu}\int_r^{+\infty} r^4 \eta(r)\,dr = Q_s^* g(p).$$

Здесь Q_s^* – характерная величина потока, $g(p)$ – безразмерный поток жидкости, зависящий от безразмерного перепада давления p.

На рис. 2–5 приведены графики зависимостей $\eta(r)$ и $g(p)$ в случаях нормально-логарифмического и степенного законов распределения радиусов пор.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 10-08-92652-ИНД_а.

Список литературы

1. Волков А.В., Царьков С.Е., Юшкин А.А., Хотимский В.С. // Тез. науч. конф. Ин-та нефтехимич. синтеза им. А.В. Топчиева РАН. 2009.

2. Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М. Поверхностные силы. М.: Наука, 1987. 400 с.

3. Мартынов Г.А., Старов В.М., Чураев Н.В. // Коллоидный журнал. 1980. Т. 42, №4. С. 703–710.

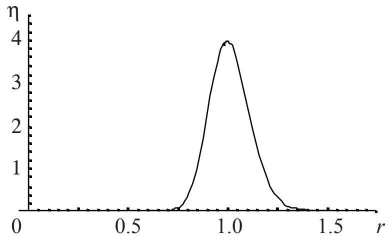


Рис. 2. Нормально-логарифмический закон распределения радиусов пор

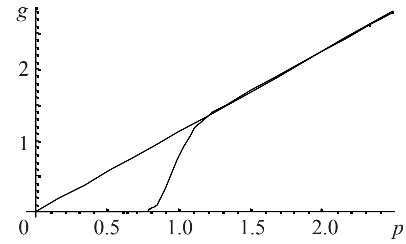


Рис. 3. Зависимость безразмерной функции g от безразмерного давления p

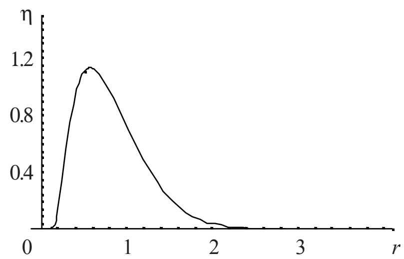


Рис. 4. Показательно-степенной закон распределения радиусов пор

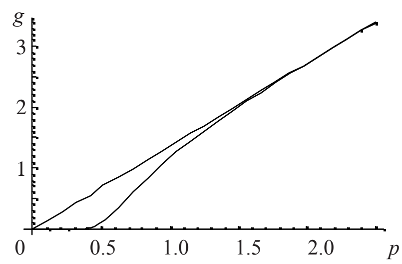


Рис. 5. Зависимость безразмерной функции g от безразмерного давления p

INVESTIGATION OF THE PROCESS OF DISCLOSING OF THE PORES OF HYDROPHOBIC NANOPOROUS MEMBRANES AT THE FILTRATION OF WATER-ORGANIC MIXES

V.I. Ivanov

The process of disclosing of the pores of hydrophobic nanoporous membranes at the filtration of water-organic mixes at pressure differences is investigated. The pores in the membrane are modeled with cylindrical capillaries continuously distributed by size.

Keywords: hydrophobic membranes, nanoscale porous, contact angle, Poiseuille flow.

УДК 539.3

КОМПЛЕКСНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АРТЕРИЙ ВИЛЛИЗИЕВОГО КРУГА ЧЕЛОВЕКА

Д.В. Иванов

Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского

ivanovdv@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Выполнены механические испытания образцов артерий виллизиевого круга человека для определения их деформационно-прочностных характеристик и нахождения констант функции энергии деформации Муни–Ривлина для артерий данного типа. Анализ результатов численного исследования поведения артерий виллизиевого круга человека в норме и при наличии аневризм выявил три механических фактора, приводящих к образованию аневризм: касательные напряжения на стенке, эффективные напряжения в стенке артерий и давление крови.

Ключевые слова: аневризма, виллизиев круг, метод конечных элементов, компьютерное моделирование, механические свойства, гиперупругий материал.

Материалом экспериментального исследования служили сегменты сосудов 109 виллизиевых кругов. Растяжению в продольном направлении было подвергнуто 97, а в поперечном – 12 образцов. Сосуды были изъяты у трупов людей обоего пола в возрасте от 21 до 90 лет, поступивших в Саратовское городское бюро судебно-медицинской экспертизы. Препарирование образцов проводилось на кафедре анатомии человека Саратовского государственного медицинского университета имени В.И. Разумовского не позднее 12 часов с момента смерти. Эксперименты показали, что диаграммы напряжение-степень удлинения имели нелинейный характер при растяжении как в продольном, так и в поперечном направлении. Следует отметить, что на диаграммах растяжения в продольном направлении присутствует точка перегиба. С возрастом наблюдается уменьшение предела прочности и деформативности артерий. В порядке убывания прочности артерии распределились следующим образом: базилярная, позвоночная, задняя мозговая, передняя мозговая и средняя мозговая артерии. Наибольшая разница (порядка 50%) между пределами прочности для 1 и 4 возрастных групп выявлена у базилярной артерии. Для остальных артерий эта разница не более 30–40%. Возрастные изменения в значениях прочностных свойств артерий человека свидетельствуют о высокой значимости процессов старения артерий, питающих головной мозг. Это указывает на необходимость более раннего проведения мероприятий по профилактике цереброваскулярных заболеваний. Выявлено, что влияние полового признака также существенно сказывается на прочностных характеристиках артерий. Для некоторых артерий у женщин и мужчин 4 возрастной группы деформативность возрастает по сравнению с 3-й группой. В продольном направлении стенки позвоночных и средних мозговых артерий обладают наибольшей деформативностью по сравнению с другими артериями виллизиевого круга. Наименьшей деформативностью обладают стенки мозжечковых артерий.

Результаты исследования механических свойств сосудов виллизиевого круга были использованы для получения констант моделей гиперупругого резиноподобного материала Муни – Ривлина. Для этого выведена зависимость между напряжением и степенью удлинения при одноосном растяжении с использованием функций энергии деформации. Для расчета неизвестных констант использовались диаграммы одноосного растяжения образца базилярной артерии.

Численно моделировались упрощенные двумерные и трехмерные модели бифуркации базилярной – задних мозговых артерий с малыми и большими аневризмами в постановке с жесткими стенками. Исследовались механические факторы, приводящие к росту и разрыву аневризм.

Моделирование показало, что давление крови максимально в аневризме, что может привести к ее разрыву [1–4] в районе купола. На основании численных расчетов можно сделать вывод, что вероятность разрыва цилиндрической аневризмы больше, чем шарообразной. Аналогичные выводы представлены в работах [5, 6]. В куполе аневризмы наблюдались не только зоны низких касательных напряжений, но и области рециркуляции, что также связано с возможностью появления атеросклеротических отложений.

Рассмотрены бифуркации базилярной – задних мозговых, передней мозговой – передней соединительной и передней мозговой – средней мозговой артерий в норме в постановке с гиперупругими стенками. Исследовалось влияние эффективных напряжений в стенке, касательных напряжений на стенке и давления крови на образование аневризм.

Расчеты показали, что в области бифуркаций в стенке сосуда существуют зоны концентрации высоких максимальных касательных и эквивалентных напряжений по Мизесу, которые приводят к разрушению слоя меди и волокон эластина и, как следствие, к образованию аневризм. Верность данного предположения подтверждается работами многих авторов [7–9]. Обнаружено, что давление крови в области апекса бифуркации принимает максимальные значения в течение всего сердечного цикла, что ослабляет и разрушает стенку [1–3].

Для модели замкнутого виллизиевого круга (рис. 1) концентрация высоких эквивалентных напряжений по Мизесу совпадает с зонами наиболее вероятного образования аневризм [10] – бифуркация базилярной артерии, бифуркация средней мозговой и передней мозговой, передней мозговой и передней соединительной артерий.

Рис. 1

Зоны низких касательных напряжений на стенке передней соединительной артерии совпадают с областями отложения атеросклероза [10].

Решались стационарные задачи о нагружении артерий внутренним давлением, величина которого изменялась в физиологических пределах. Рассмотрены две модели локально ослабленной стенки артерии: двумерная, трехмерная. В обоих случаях материал стенки гиперупругий, заданный зависимостью напряжений от деформации. Патологический участок моделировался более пологой относительно здорового участка зависимостью напряжения от деформации. Результаты показывают, что деформации ослабленного участка стенки существенно больше деформаций стенки здоровой артерии, и позволяют продемонстрировать начальный этап развития аневризмы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-01-00804-а).

Список литературы

1. Carmihael R. Gross defects in the mascular and elastic coats of the lager cerebral arteries // J. of Pathology and Bacteriology. 1945. Vol. 57. P. 345–351.

2. Crowford T. Some observations on the pathogenesis and natural history of intracranial aneurysms // J. of Neurology, Neurosurgery & Psychiatry. 1959. Vol. 22. P. 259–266.

3. Coupe N.R. et al. Subarachnoid hemorrhage emanating from a ruptured infundibulum case report and literature review // Surg. Neurol. 2007. V. 67. P. 204–206.

4. Cowan J.A. et al. Progression of a posterior communicating artery infundibulum into an aneurysm in a patient with alagille syndrome // J. Neurosurg. 2004. V. 101. P. 694–696.

5. Oshima M. A new approach to cerebral hemodynamics // Bulletin for The International Association for Computational Mechanics. 2004. Vol. 16, Is. 4. P. 4–9.

6. Ujiie H. et al. Effects of size and shape (aspect ratio) on the hemodynamics of saccular aneurysms: a possible index for surgical treatment of intracranial aneurysms // J. of Neurosurgery. 1989. Vol. 45. P. 119–129.

7. Kondo S. et al. Cerebral aneurysms arising at nonbranching sites. An experimental study // Stroke. 1997. Vol. 28. P. 398–403.

8. Tateshima S. et al. Three-dimensi onal blood flow analysis in a wide-necked internal carotid artery-ophthalmic artery aneurysm // J. of Neurosurgery. 2003. Vol. 99. P. 526–533.

9. Torii R. et al. Fluid-structure interaction modeling of aneurismal conditions with high and normal blood pressures // Computational Mechanics. 2006. Vol. 38. P. 482–490.

10. Thubrikar M.J. Vascular mechanics and pathology. New York: Springer Science+Business media, 2007. 494 p.

COMPLEX INVESTIGATION OF THE ARTERIES OF A HUMAN WILLIS CIRCLE

D.V. Ivanov

Mechanical tensile experiments of the cerebral arteries samples were used for the characterization of deformational and strength characteristics of Willis circle arteries and for obtaining constants of Mooney Rivling strain energy function of hyperelastic material. Finite element computer modeling of the blood flow in healthy and pathological Willis circle arteries developed three mechanical factors: wall shear stress, effective stress in the wall and blood pressure, that influence on aneurism occurrence.

Keywords: aneurism, Willis circle, finite element method, computer modeling, mechanical properties, hyper elastic material.

УДК 551.557.5

ОДНОМЕРНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В СЛОЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ГАЗА

М.И. Иванов

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

m-i-ivanov@mail.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Рассматривается тонкий слой идеального газа, покрывающий вращающийся твердый гравитирующий шар. Постановка задачи подразумевает учет инерционных сил. Поверхность шара неравномерно нагрета по широте. Предполагается, что все искомые функции (плотность, температура, давление, скорости) постоянны во времени и не зависят от долготы. Тогда при выполнении некоторого ограничения на вид краевого условия на поверхности шара задача допускает решение в виде одномерного течения, направленного вдоль кругов широты, то есть под прямым углом к направлению термического градиента на поверхности шара. Найденное течение обладает всеми чертами зональных ветров, существующих на многих планетах Солнечной системы, включая и возможность существования суперротации – режима, при котором атмосфера движется быстрее твердого тела планеты.

Ключевые слова: одномерные течения, вращающийся шар, зональный ветер, суперротация атмосферы.

Рассмотрим твердый шар радиуса a, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω. Твердый шар покрывает тонкий слой идеального газа плотности ρ, имеющий давление p и температуру T. Введем сферическую систему координат, вращающуюся вместе с шаром. Соответственно в уравнения движения будут входить инерционные силы – центробежная и кориолисова. Основная система уравнений должна состоять из уравнений движения, неразрывности, состояния идеального газа и переноса тепла. В дальнейшем будем предполагать, что сила тяжести не зависит от широты и долготы, а диссипация пренебрежимо мала. Будем искать решения, не зависящие от долготы; краевые условия пока не конкретизируем. Тогда при выполнения условия:

$$\operatorname{tg}\theta\left(\frac{\partial T}{\partial\theta}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}T\right)\ge 0 \qquad (1)$$

задача будет иметь стационарное решение в виде одномерного течения с единственной ненулевой меридиональной компонентой скорости v. Соответственно условие (1) накладывает ограничения на краевые условия на поверхности шара, совместимые с существованием одномерного течения. Потребуем, чтобы на поверхности шара имело место следующее распределение температур:

$$T(a,\theta)=T_0+\Delta T\sin^2\theta+f(\cos^2\theta), \qquad (2)$$
$$\Delta T\ge 0,\quad f(0)=f(1)=0.$$

Из первых трех уравнений системы найдем дифференциальное уравнение, связывающее плотность и температуру слоя газа в случае одномерного течения

$$\frac{R_0}{\mu}\left(\frac{\partial T}{\partial\theta}\sin\theta-r\frac{\partial T}{\partial r}\cos\theta+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\sin\theta-r\frac{\partial\rho}{\partial r}\cos\theta\right)T\right)=rg(r)\cos\theta, \qquad (3)$$

где R_0 – универсальная газовая постоянная, μ – молекулярная масса газа, $g(r)$ – сила тяжести. Уравнение (3) должно быть дополнено уравнением притока тепла, однако при использованных предположениях последнее будет удовлетворяться тождественно. Поэтому для замыкания используем феноменологический закон для распределения плотности газа:

$$\rho=\rho(r,\theta). \qquad (4)$$

Рассмотрим частный случай формулы (4) – $\rho=\rho(r)$. Тогда для скорости одномерного течения получим

$$v=\left(\pm\sqrt{\frac{2R_0}{\mu a^2}}\sqrt{\Delta T-f'\left(1-\frac{r^2\sin^2\theta}{a^2}\right)}\sqrt{\frac{\rho(a)}{\rho(r)}}-\omega\right)\times$$
$$\times r\sin\theta. \qquad (5)$$

Условие (1) превратится в данном случае в условие

$$\Delta T\ge f'\left(1-\frac{r^2\sin^2\theta}{a^2}\right). \qquad (6)$$

Решения (5) сходны с зональными ветрами, существующими на многих планетах Солнечной системы. Рассмотрим их более подробно. Формула (5) определяет два решения задачи, отличающиеся друг от друга величиной момента импульса газового слоя. То решение, для которого слой газа имеет больший момент импульса (знак «минус» в формуле (5)), характеризуется системой ветров, направленных против направления вращения планеты. Второе решение (знак «плюс» в формуле (5)) устроено сложнее. Для него ветры могут быть направлены как против вращения планеты, так и по нему и, кроме того, могут менять направление на определенных высотах и широтах.

Какой из режимов возбуждается в действительности? Естественно предположить, что тот, которому соответствует меньший момент импульса атмосферы. А это означает, что зональный ветер может быть направлен и по направлению вращения планеты, и против него (во вращающейся вместе с планетой системой координат). Это действительно наблюдается; явление, когда зональный ветер направлен по направлению вращения планеты, называют суперротацией атмосферы, потому что в этом случае атмосфера вращается быстрее твердого тела планеты (особенно значительна суперротация у Венеры, атмосфера которой вращается в 60 раз быстрее самой планеты).

В настоящее время существует множество теорий, объясняющих явление суперротации – ее связывают с атмосферными приливами, ячейками Гадлея, гравитационными и планетарными волнами в атмосфере и даже силами Ампера, действующими в ионосфере. Кроме того, некоторые авторы высказывают мнение, что причина суперротации лежит в неравномерном нагреве атмосферы или подстилающей поверхности. Как видим, рассмотренная простейшая модель зонального ветра подтверждает это предположение. Можно даже грубо оценить условия перехода атмосферы в состояние суперротации. Положим $f \equiv 0$ и устремим толщину атмосферы к нулю. Тогда во всей атмосфере будем иметь $\rho(r) \approx \rho(a)$. Тогда из (5) находим условие перехода атмосферы в состояние суперротации:

$$\sqrt{\frac{2R_0\Delta T}{\mu}} \geq \omega a. \qquad (7)$$

Здесь ΔT представляет собой просто разность между температурами экватора и полюса. Требуя выполнения равенства в (7), находим выражение для критической разности температур $\Delta T_{\text{кр}}$:

$$\Delta T_{\text{кр}} = \frac{2\pi^2}{R_0}\frac{\mu a^2}{\mathrm{T}^2}, \qquad (8)$$

где Т – период вращения планеты.

Простейшие расчеты дают для Земли и Марса значения $\Delta T_{\text{кр}}$ более 100 К, что говорит о невозможности суперротации (по крайней мере, в нижней атмосфере) при существующих в настоящее время тепловых режимах этих планет.

С другой стороны, для Венеры и Титана $\Delta T_{\text{кр}}$ имеют значения менее 1 К, что свидетельствует в пользу наличия суперротации (заметим, что даже на сильно удаленном от Солнца Титане разность температур между экватором и полюсом составляет 3 К). Эти выводы согласуются с астрономическими данными.

1D STATIONARY CURRENTS IN A ROTATING GAS LAYER

M.I. Ivanov

A thin layer of ideal gas covering a rotating solid gravitating sphere is considered. The formulation of the problem implies to take into account inertial forces. The temperature of the sphere surface varies in latitudinal direction. It is assumed that all the unknown functions (density, temperature, pressure, velocities) are time-constant and do not depend on longitude. Then, if some limitation for a surface boundary condition is fulfilled a solution of the problem is 1D current that flows in latitudinal direction, i.e., perpendicular to the surface temperature gradient. The obtained solution possesses all the features of zonal winds that exist on many planets of the Solar System, including the possibility of super-rotation when the atmosphere moves faster than the planet's solid.

Keywords: 1D currents, rotating sphere, zonal wind, superrotation.

УДК 617.7

ИЗУЧЕНИЕ СВЯЗИ БИОМЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СКЛЕРЫ И ГИДРОДИНАМИКИ ГЛАЗА В ЭКСПЕРИМЕНТЕ

Е.Н. Иомдина, Л.А. Назаренко, О.А. Киселева

Московский НИИ глазных болезней им. Гельмгольца Минздравсоцразвития

iomdina@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Предполагают, что нарушение биомеханических свойств склеры в области диска зрительного нерва и всей корнеосклеральной оболочки глаза в целом может играть существенную роль в патогенезе первичной открытоугольной глаукомы (ПОУГ). Цель работы: изучить в эксперименте на кроликах влияние упругих характеристик склеры на состояние оттока внутриглазной жидкости. Для этого определяли механические характеристики и уровень поперечных сшивок склеры, а также гидродинамические показатели 1) интактных глаз молодых (2-х месячных) и старых (2-х летних) кроликов, 2) глаз, подвергнутых in vivo воздействию треозы, повышающей поперечную связанность коллагена склеры; 3) глаз молодых и старых кроликов, а также кроликов, подвергнутых in vivo воздействию треозы, после воздействия in vivo протеолитическим ферментом (коллализином). Гидродинамические показатели оценивали с помощью Глаутест 60 (Россия). Для определения уровня поперечной связанности коллагена склеры использовали метод дифференциальной сканирующей калориметрии, определяли температуру денатурации, возрастание которой указывает на увеличение степени сшивания коллагена. Биомеханические показатели склеры оценивали с помощью Autograph AGS-H (SHIMADZU, Япония). Показано, что нормальное возрастное увеличение жесткости (модуля упругости) склеры с 23.1±4.2 МПа до 41.4±6.3 МПа сопровождается умеренным ростом поперечных сшивок и незначительным снижением оттока внутриглазной жидкости. В то же время повышение жесткости склеры (до 65.4±6.0 МПа), вызванное воздействием треозы, т.е. патологическим ростом уровня поперечной связанности, сопровождается небольшим повышением внутриглазного давления и значимым ухудшением оттока внутриглазной жидкости. Под воздействием коллализина у старых животных снизилась жесткость склеры (до 27.9±4.9 МПа) и улучшилась гидродинамика внутриглазной жидкости, соответствующие показатели у молодых животных изменились незначительно. Жесткость склеры, обработанной треозой и содержащей избыточные поперечные сшивки, также снизилась под воздействием коллализина (до 43.4±4.5 МПа), при этом улучшилась гидродинамика внутриглазной жидкости. Таким образом, биомеханические свойства склеры оказывают влияние на гидродинамику глаза: при повышении жесткости склеры за счет избыточного формирования поперечных связей в ее коллагеновых структурах отток внутриглазной жидкости снижается, что может быть риск-фактором развития ПОУГ. Протеолитическая терапия с помощью коллализина дает возможность снизить число таких сшивок, уменьшить жесткость склеры и улучшить гидродинамические показатели глаза.

Ключевые слова: глаз, склера, модуль упругости, поперечные сшивки, гидродинамика внутриглазной жидкости, кролики.

Согласно современным представлениям, нарушение биомеханических свойств склеры в области диска зрительного нерва и всей корнеосклеральной оболочки глаза в целом может играть существенную роль в патогенезе первичной открытоугольной глаукомы (ПОУГ). Изменение биомеханических свойств склеральной ткани при ПОУГ в сторону увеличения жесткости может оказывать негативное влияние на ее демпфирующую способность при скачках ВГД, свойственных течению глаукомы. Кроме того, патогенетически важным фактором, взаимосвязанным с повышенной жесткостью склеры глаз с ПОУГ, является повышенная плотность склеры, обусловленная прежде всего избыточным содержанием коллагена и поперечных сшивок в коллагеновых структурах, что может препятствовать оттоку водянистой влаги через естественные дренажные пути. Для правильной интерпретации нарушения биомеханики склеры при глаукоме необходимо определить, является ли повышенная жесткость и плотность склеры глаукомных глаз следствием глаукомного процесса или может быть одним из независимых риск-факторов его возникновения и развития? Одним из возможных путей поиска ответа на этот принципиальный вопрос является экспериментальное изучение связи биомеханических свойств склеры с состоянием гидродинамики глаза. С этой целью проведено исследование на 18 кроликах, которое включало три основных этапа: 1) сравнительное изучение биомеханических показателей склеры и показателей гидродинамики глаз «молодых» (2-х месячных) и «старых» (2-х летних) интактных кроликов (1 группа); 2) оценка изменения биомеханических показателей склеры и показателей гидродинамики глаз в результате субтеноновых инъекций гликирующего агента (раствора треозы), повышающего уровень поперечной связанности коллагена склеры (2 группа); 3) оценка изменения биомеханических показателей склеры и показателей гидродинамики глаз интактных кроликов и кроликов, получавших инъекции треозы, в результате субтеноновых инъекций протеолитического фермента коллализина (3 группа). Гидродинамические показатели оценивали с помощью прибора Глаутест 60 (Россия). Уровень поперечной связанности коллагена склеры оценивали методом дифференциальной сканирующей калориметрии, определяли температуру денатурации ($T_д$), возрастание которой указывает на увеличение степени сшивания ткани. Биомеханические показатели склеры оценивали с помощью Autograph AGS-H (SHIMADZU, Япония).

Результаты

Установлено, что модуль упругости склеры молодых животных (E = 23.1±4.2 МПа) в 1.8 раза ниже, чем старых (E = 41.4±6.3 МПа) (p < < 0.01). Ранее были изучены упруго-прочностные показатели склеры глаз интактных 8-12-месячных кроликов. По нашим данным, модуль упругости склеры кролика в этом возрастном периоде составляет 37.3±8.4 МПа. Сопоставление этих значений позволяет заключить, что модуль упругости склеры кролика закономерно повышается с возрастом. Возрастное повышение жесткости склеры сопровождается увеличением уровня поперечных сшивок: $T_д$ коллагена склеры старых животных составляет 69.5± ±1.3 °С, а для склеры молодых кроликов $T_д$ = = 67.7±1.1 °С (p < 0.05), что соответствует известному по литературе возрастному увеличению модуля упругости и поперечной связанности других соединительнотканных образований организма, в частности, связок и сухожилий. Измерение ВГД тонометром Маклакова (груз 10 г) не выявило значимых различий между старыми и молодыми кроликами. В то же время коэффициент легкости оттока у молодых животных (C = 0.19±0.02 мм³/мин/мм рт. ст.) оказался несколько выше, чем у старых (C = 0.15± 0.01 мм³/мин/мм рт.ст.).

Во 2 группе кроликов под тенонову капсулу правых (опытных) глаз инъецировали раствор гликирующего агента – треозы в концентрации 0.139 ммоль, левый глаз (контрольный) оставался интактным. Всего в течение 20 дней произвели 9 инъекций. В опытных глазах через 1 мес. E = 57.5± ±3.1 МПа, через 3 мес. E оставался на том же повышенном уровне (E = 65.4±6.0 МПа), в то же время в контроле E был в среднем в 2 раза ниже (E = 27.2±3.5 МПа) (p < 0.01). В соответствии с ростом модуля упругости значимо увеличился и уровень поперечных сшивок: в опытных глазах $T_д$ = 76.6±1.6 °С, а в контроле $T_д$ = 64.3±1.4 °С (p < 0.01). Повышение жесткости склеры и уровня ее поперечной связанности отразилось на состоянии гидродинамики опытных глаз. Через 1 мес. после окончания курса инъекций треозы на опытных глазах P_0 = 18.8± ±0.7 мм рт.ст. (на парном глазу 17.0±0.4 мм рт.ст.), C = 0.12±0.01 мм³/мин/мм рт. ст. (на парном глазу 0.20±0.02 мм³/мин/мм рт. ст.). Значимое ухудшение гидродинамических показателей глаза, развившееся после инъекций треозы, сохранялось и через 3 мес. после окончания курса этих инъекций: P_0 = 18.8±2.0 мм рт.ст., C = 0.13±0.07 мм³/мин/мм рт. ст. На 3-м этапе эксперимента, посвященном оценке воздействия протеолитического фермента (коллализина), исследовано изменение показателей как интактных животных (группа 3а), так и животных, предварительно получавших курс субтеноновых инъекций треозы (группа 3б).

В группе 3а у молодых животных курс из 10 инъекций коллализина (150 ед.) в правый (опытный) глаз привел через 1 мес. после его окончания к небольшому снижению модуля упругости (E = 19.3±4.2 МПа) по сравнению с парным глазом (E = 23.1±4.2 МПа). В то же время эффект снижения жесткости склеры у старых животных был более значительным: на опытных глазах E = = 27.9±4.9 МПа, а на парных глазах этот показатель был в среднем на 32.6% выше: E = 41.4±6.3 МПа (p < 0.02). Снижение жесткости склеры старых животных под воздействием инъекций коллализина сопровождалось небольшим снижением P_0 = 15.3±0.3 мм рт.ст. и повышением C = = 0.21±0.04 мм³/мин/мм рт. ст. по сравнению с парным глазом (P_0 = 17.5±0.3 мм рт.ст., C = = 0.15±0.01 мм±/мин/мм рт. ст.). При этом ВГД и C глаз молодых кроликов под воздействием коллализина практически не изменились. В группе 3б, где через 1 мес. после курса инъекций треозы в оба глаза провели 10 субтеноновых инъекций коллализина в правые глаза (опытная группа), биомеханические испытания, выполненные через 1 мес. после окончания курса протеолитической терапии, выявили достоверное снижение жесткости склеры по сравнению с левыми глазами (контрольная группа, где был проведен только курс инъекций треозы). Модуль упругости склеры опытных глаз снизился до 43.4±4.5 МПа и приблизился к среднему уровню нормы (37.3±8.4 МПа), в то время как E парных глаз после воздействия треозы оставался высоким (65.4±4.9 МПа) ($p < 0.02$). В среднем снижение жесткости склеры, предварительно подвергнутой воздействию треозы, в результате протеолитической терапии составило 33.6%. Снижение жесткости склеры сопровождалось достоверным ($p < 0.05$) снижением ВГД и улучшением гидродинамических показателей: в опытной группе глаз P_0 составило 15.0±±0.7 мм рт.ст. (на парных глазах P_0 = 19.5±±2.0 мм рт.ст.), C = 0.21±0.06 мм^3/мин/мм рт. ст. (на парных глазах C = 0.14±0.04 мм^3/мин/мм рт. ст.), КБ = 86±22.0 (на парных глазах КБ = = 145.5±7.3).

Заключение

Полученные экспериментальные результаты показывают, что биомеханические свойства склеры оказывают влияние на гидродинамику глаза: при повышении жесткости склеры за счет избыточного формирования поперечных связей (сшивок) в ее коллагеновых структурах отток внутриглазной жидкости снижается, что может быть риск-фактором развития ПОУГ. Протеолитическая терапия с помощью коллализина дает возможность снизить число таких сшивок, уменьшить жесткость склеры и улучшить гидродинамические показатели глаза.

ARE BIOMECHANICAL PROPERTIES OF THE SCLERA AND EYE HYDRODYNAMICS RELATED AN EXPERIMENTAL STUDY

E.N. Iomdina, L.A. Nazarenko, O.A. Kiseleva

It is hypothesized that the impaired biomechanical properties of the sclera around the optic disc and, largely, in the corneoscleral shell may play an essential role in the pathogenesis of primary open-angle glaucoma (POAG). The objective of the paper is to investigate the impact of elastic scleral properties on intraocular fluid (IF) outflow in the experiment on rabbits. We determined the mechanical characteristics and the crosslinking level of the sclera as well as hydrodynamic parameters in three groups of experimental animals: 1) intact eyes of young (2 months of age) and old (2 years) rabbits; 2) eyes treated in vivo by threose, which increases crosslinking of scleral collagen; 3a) eyes of young and old rabbits after they were treated by collalysin, a proteolytic enzyme, 3b) eyes of rabbits pre-treated by treose and subsequently treated by collalysin. The hydrodynamic parameters were measured using Glautest 60 (Russia). To determine the crosslinking level of scleral collagen, we used differential scanning calorimetry and measured denaturation temperature, whose rise points to an increased degree of collagen crosslinking. The biomechanical parameters of the sclera were determined by Autograph AGS-H, (SHIMADZU, Japan). The normal age-related increase of scleral stiffness (Young's modulus) from 23.1±4.2 MPa to 41.4±6.3 MPa was shown to go together with a moderate growth of cross links and a somewhat reduced IF outflow. At the same time, an increase of scleral stiffness (to 65.4±6,0 MPa) caused by threose, i.e. a pathological growth of crosslinking, is accompanied by a certain IOP increase and a significant impairment of IF outflow. Collalysin-treated old rabbits revealed a fall in scleral stiffness (to 27.9±4.9 MPa) and an improved IF hydrodynamics, whereas young animals showed only a slight change in these parameters. The sclera treated by threose and containing excessive cross links also became less stiff (43.4±4.5 MPa) and improved IF hydrodynamics after collalysin treatment. It may be assumed that the biomechanical properties of the sclera have an effect on eye hydrodynamics. Indeed, IF outflow is deteriorating with the increase of scleral stiffness that is due to excessively generated cross links in its collagen structures, which may be a risk factor for POAG. Proteolytic therapy with collalysin helps reduce the amount of these links, make the sclera less stiff and improve hydrodynamic parameters of the eye.

Keywords: eye, sclera, elasticity modulus, cross-linking, eye humor hydrodynamics, rabbits.

УДК 532.546

ГЕОМЕХАНИКА НЕФТЯНЫХ И ГАЗОВЫХ СКВАЖИН

В.И. Карев, Ю.Ф. Коваленко

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

wikarev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Приводятся результаты теоретических и экспериментальных исследований, выполненных в Институте проблем механики РАН в области геомеханики нефтяных и газовых скважин. Показана определяющая роль напряжений, возникающих в окрестности скважины, в формировании фильтрационных свойств пласта, а также устойчивости стволов скважин. Предложен новый подход к решению геомеханических проблем, основанный на испытании образцов горных пород из продуктивных и вмещающих пластов на уникальной экспериментальной испытательной системе ИСТНН.

Ключевые слова: нефтяные и газовые скважины, напряженно-деформированное состояние, система трещин, проницаемость, фильтрация, наклонно-направленные скважины, устойчивость, трехосные испытания.

Величина дебита и устойчивость стволов скважин – это ключевые вопросы, возникающие при разработке нефтяных и газовых месторождений. В последние годы приходит все большее понимание того, что геомеханический подход лежит в основе их решения. Роль напряжений, возникающих в окрестности скважины в процессе ее бурения, освоения и эксплуатации, в формировании фильтрационных свойств призабойной зоны пласта в настоящее время исследована мало, хотя в нефтяной и газовой промышленности при разведке и эксплуатации месторождений, особенно на больших глубинах, выявлено, что концентрации напряжений в прискважинной зоне существенно влияют на проницаемость пластов, процессы фильтрации и, соответственно, на интенсивность нефтегазопритоков в скважину.

Между тем еще в конце 80-х годов прошлого столетия академик С.А. Христианович высказал мысль, что одним из решающих факторов, влияющих на фильтрационные характеристики пласта и соответственно дебит скважин, является процесс деформирования и разрушения грунтового скелета горных пород под воздействием возникающих в них напряжений.

В Институте проблем механики Российской академии наук создана и активно эксплуатируется уникальная экспериментальная установка – Испытательная система трехосного независимого нагружения ИСТНН, позволяющая на образцах породы в форме куба с ребром 40 или 50 мм полностью воссоздавать условия, возникающие в пласте на всех стадиях бурения, освоения, эксплуатации и ремонта скважин. В процессе испытания образцов в непрерывном режиме ведутся измерения проницаемости породы. Таким образом, моделируя на установке проведение той или иной технологической операции, можно выбрать оптимальный для данного месторождения способ воздействия на пласт с точки зрения увеличения дебита скважин. В частности, для большинства пород, слагающих коллектора нефтяных и газовых месторождений, характерна существенная зависимость фильтрационных свойств от величины депрессии, причем, начиная с некоторого уровня давления в скважине и соответственно величины касательных напряжений в породе, изменения проницаемости становятся необратимыми. Эти исследования позволили предложить новый подход к увеличению проницаемости продуктивных пластов и, тем самым, к увеличению продуктивности скважин. В его основе лежит обнаруженный эффект необратимого увеличения проницаемости горных пород при создании в них напряжений определенного вида и уровня за счет образования системы микро- и макротрещин. Этот эффект получил название георыхления и лег в основу нового способа увеличения дебита нефтяных и газовых скважин – метода георыхления. Метод георыхления прошел опытно-промышленные испытания на ряде месторождений Западной Сибири и Приуралья и показал высокую эффективность.

Проведенные в последние годы в Институте проблем механики Российской академии наук в лаборатории геомеханики теоретические и экспериментальные исследования показали, что геомеханический подход лежит в основе решения другой важнейшей проблемы, возникающей при разработке месторождений нефти и газа – потери устойчивости стволов скважин при их бурении и эксплуатации. Особенно остро этот вопрос встал в последнее время, когда основным инструментом разработки нефтяных и газовых месторождений стала технология бурения наклонных и горизонтальных скважин, в том числе и на депрессии. При ее реализации возник целый ряд совершенно новых проблем, не имевших место при бурении и эксплуатации вертикальных скважин. На первый план вышли вопросы устойчивости стволов скважин при бурении и ее зависимости от геометрии скважины, вопросы определения допустимых депрессий при эксплуатации горизонтальных скважин и др. Стало очевидно, что данные проблемы могут быть решены только на основе углубленного изучения геомеханических процессов, происходящих в коллекторах и вмещающих породах нефтяных и газовых месторождений при ведении горных работ.

Горные породы, слагающие коллектора нефтяных и газовых месторождений, в большинстве своем обладают выраженной горизонтальной слоистостью и связанной с этим анизотропией деформационных и прочностных свойств, которая в этом случае близка к трансверсальной изотропии с плоскостью изотропии, совпадающей с плоскостью напластования. Это приводит к тому, что характер и величина возникающих в окрестности скважин напряжений будут зависеть от геометрии скважины, т.е. от угла ее наклона к плоскостям напластования. На рис. 1 схематично показана горизонтальная скважина, пробуренная в породе с напластованием, близким к горизонтальному.

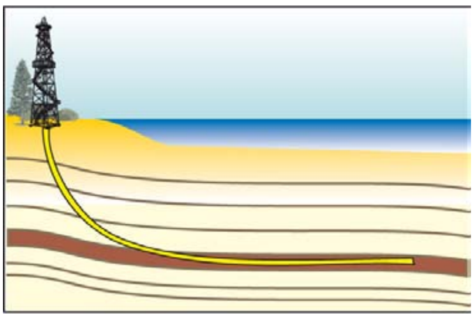


Рис. 1

На рис. 2 схематично показано вертикальное сечение горизонтальной скважины и распределение действующих на ее контуре касательных напряжений. Если в случае вертикальной скважины (а также при изотропии породы) напряжения во всех точках на контуре скважины одинаковы (окружность на рис. 2), то при отклонении скважины от вертикали ситуация меняется – напряжения по контуру скважины становятся переменными от точки к точке. В этом случае от точки к точке на контуре скважины меняется не только величина действующих напряжений, но и ориентация этих напряжений относительно плоскостей напластования, что сказывается на прочности породы в разных точках на контуре скважины.

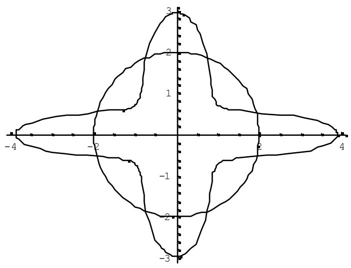


Рис. 2

Все эти обстоятельства необходимо учитывать при выборе параметров бурения и эксплуатации скважин, исключающих возникновение аварийных ситуаций. Традиционным подходом к решению подобных проблем является создание математических моделей и попытка с их помощью ответить на указанные вопросы. Однако для пород с ярко выраженной анизотропией упругих и прочностных свойств (в частности, для слоистых пород) попытки создать адекватные математические модели, с одной стороны, приводят к их резкому усложнению, а с другой, – к неизбежному увеличению числа деформационных и прочностных параметров, входящих в модель, экспериментальное определение которых само по себе является сложной задачей, требующей сложного лабораторного оборудования.

Развиваемый в Институте проблем механики РАН подход кардинально отличается от общепринятого. В его основе лежит прямое физическое моделирование процессов деформирования и разрушения породы в окрестностях скважин на установке ИСТНН. Последовательность работ при физическом моделировании на установке ИСТНН следующая. На первом этапе рассчитываются напряжения, возникающие в пласте в ходе ведения горных работ при различных значениях технологических параметров их проведения. С этой целью на специально изготовленных образцах по специальным программам нагружения определяются анизотропные упругие характеристики исследуемых горных пород. Затем из кернового материала вырезаются кубические образцы под различными углами к плоскостям напластования, которые помещаются в установку и нагружаются напряжениями, рассчитанными на первом этапе. В ходе эксперимента измеряются деформации образца по трем осям, в том числе и деформации ползучести, а также изменение проницаемости образца в одном из направлений. В результате проведения серии испытаний образцов породы из интересующего интервала на основе анализа полученных данных делается заключение об оптимальных технологических параметрах проведения того или иного вида горных работ, обеспечивающих их максимальную эффективность и безопасность. На основе развитого подхода в последние годы были выполнены многочисленные исследования по определению безаварийных режимов бурения и эксплуатации наклонных и горизонтальных скважин для крупнейших российских компаний ОАО «Газпром», ОАО «ЛУКОЙЛ», ОАО «Сургутнефтегаз» и др. В частности, по заказу ОАО «Газпром» и французской нефтяной компании «Total» были проведены работы по определению прочностных характеристик пород Штокмановского газоконденсатного месторождения и определению устойчивости стенок скважин при разработке месторождения. В ходе этих исследований, помимо изучения деформационных и прочностных свойств кернового материала из ряда скважин Штокмановского ГКМ, проводилось прямое моделирование разрушения стенок горизонтальных скважин при создании на их забое глубоких депрессий. Эти эксперименты проводились на образцах с центральным отверстием, которые нагружались возрастающей внешней сжимающей нагрузкой, моделирующей уменьшение давления в скважине. В ходе опытов помимо деформации образца в трех направлениях регистрировался вынос песка из отверстия. На рис. 3 приведена фотография одного из образцов с отверстием после испытания.

Рис. 3

Полученные результаты позволили оценить риски, связанные с опасностью выноса песка при эксплуатации скважин с высокими депрессиями, выработать рекомендации о необходимой конструкции скважин – то есть обосновать технические и технологические решения по оптимизации стратегии и тактики освоения Штокмановского газоконденсатного месторождения.

GEOMECHANICS OF OIL AND GAS WELLS

V.I. Karev, Yu.F. Kovalenko

The paper presents the results of theoretical and experimental researches performed at the Institute for Problems of Mechanics in the field of geomechanics of oil and gas wells. The key role of the stress that arises in the vicinity of wells in the formation of the filtration properties of the reservoir and also wellbore stability is shown. A new approach to the solution of geomechanical problems, based on tests of rock samples from the productive and the enclosing strata on the unique experimental test system TSTUL is suggested.

Keywords: oil and gas wells, stress-strain behavior, cracks system, permeability, filtration process, directional wells, borehole stability, triaxial tests.

УДК 539.5

МЕЗОКОМПОЗИЦИОННЫЙ МАТЕРАЛ $Cu–TiB_2$: МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА, МИКРОСТРУКТУРА, ОПТИМИЗАЦИЯ СОСТАВА

Е.В. Карпов, М.П. Бондарь

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

evkarpov@mail.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Исследован новый мезокомпозиционный материал (МК) на основе меди с упрочняющей фазой в виде включений-агломератов нанокомпозита $Cu–TiB_2$. МК получен методом квазидинамического прессования и является термостабильным материалом, сочетающим высокую электропроводность с прочностными свойствами и износостойкостью, существенно превосходящими аналогичные характеристики чистой меди. Исследовано деформирование МК при однократном и малоцикловом одноосном сжатии, изменение микротвердости при различных видах нагружения. Определено изменение износостойкости МК в зависимости от процентного содержания TiB_2. Проведено сравнение макромеханических свойств материала с особенностями эволюции микроструктуры. Сопоставление полученных результатов с анализом существующих теорий упрочнения гетерогенных материалов позволило определить механизм упрочнения нового МК, что дает возможность оптимизировать выбор его состава в зависимости от функционального назначения материала.

Ключевые слова: нанокомпозит, мезоструктурный композит, микроструктура, накопление повреждений, малоцикловое нагружение.

Объект и методы исследования

Объектом настоящего исследования является мезокомпозитный материал (МК), полученный методом квазидинамического прессования, представляющий собой металлическую матрицу с распределенными в ней включениями – агломератами [1–3]. На рис. 1 представлена схема технологического процесса формирования мезокомпозита.

Рис. 1

В качестве основы МК использована чистая медь, включения – агломераты размером от 5 до 100 мкм, которые имеют состав: 28 об% меди (Cu) и 72 об% диборида титана (TiB_2). Диборид титана находится в меди в виде наночастиц (≈100 нм). МК является термостабильным материалом, сочетающим высокую электропроводность с высокими прочностными свойствами и износостойкостью, что делает целесообразным его применение для изготовления токопроводящих частей оборудования, подвергающихся значительным нагрузкам.

Механические свойства МК

Исследовано деформирование МК при однократном и малоцикловом одноосном сжатии, изменение микротвердости при различных видах нагружения. Согласно теории Эшби, описывающей дисперсно-упрочненные сплавы, характеристика прочности материала может быть представлена как некоторая функция квадратного корня величины, характеризующей содержание упрочняющей фазы. Проведенные эксперименты показали, что функциями квадратного корня от величины процентного содержания диборида титана можно достаточно хорошо описать изменение таких характеристик МК, как предел текучести, микротвердость и предельная деформация до появления макроскопических трещин. Это свидетельствует о вкладе в упрочнение МК механизма деформации, характерного для дисперсно-упрочненных сплавов.

Также получены диаграммы зависимости прироста остаточной деформации от числа циклов нагружения, позволяющие оценить относительную сопротивляемость усталостному разрушению МК с разным процентным содержанием упрочняющей фазы. Определено изменение износостойкости МК в зависимости от процентного содержания TiB_2. Прочностные характеристики МК и износостойкость существенно превосходят таковые для исходной меди и внутреннеокисленной меди (дисперсно-упрочненный сплав Cu – 3.5 об% Al_2O_3), при этом сохраняется достаточно высокая пластичность материала при условии, что содержание упрочняющей фазы не превышает некоторого предельного значения.

Эволюция микроструктуры

МК во всех рассмотренных вариантах имеет характерную ячеистую микроструктуру: ячейки состоят из матричного материала, а границы между ними – из скоплений частиц упрочняющей фазы. Эти границы образуют в совокупности каркас, сообщающий МК высокие прочностные свойства. Размеры ячеек и массивность каркаса зависят от процентного содержания диборида титана. Одновременно каркас создает концентрацию напряжений, являющуюся источником накапливаемых в материале повреждений, уменьшающих конструкционную пластичность и снижающих сопротивляемость усталостному разрушению.

Проведено сравнение макромеханических свойств материала с особенностями эволюции микроструктуры при различных видах нагружения. Сопоставление полученных результатов с анализом существующих теорий упрочнения гетерогенных материалов позволило определить механизм упрочнения нового МК, что дает возможность оптимизировать выбор его состава в зависимости от функционального назначения материала.

Показано, что сопротивляемость усталостному разрушению зависит от природы релаксационных процессов, определенных микроструктурой мезокомпозита. Обнаружено, что в процессе циклического деформирования происходит перераспределение повреждений, накапливаемых в объеме материала. Это приводит к стабилизации микроструктуры и увеличению средней микротвердости МК с процентным содержанием упрочняющей фазы меньше 13.6 об%. Установлено, что на процесс формирования микроструктуры МК оказывают влияние процентное содержание упрочняющей фазы, способ получения монолитного материала и последующая обработка. Эти факторы определяют размер зерна основы МК, который в большой мере влияет на механизм деформирования и, соответственно, на релаксационные процессы.

Заключение

На основе анализа результатов механических испытаний и характера эволюции микроструктуры установлены:

– механизм деформирования МК;

– роль концентрации диборида титана, определяющая степень релаксационных процессов;

– структурно стабилизирующая роль циклического нагружения, зависящая от содержания диборида титана.

Полученные результаты позволяют оптимизировать концентрацию упрочняющего элемента и условия его формирования.

Работа выполнена при поддержке Проекта No 2.13.6 Программы РАН , Интеграционного проекта №1 СО РАН, программы фундаментальных исследований СО РАН № III.20.3. и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» государственный контракт 14.740. 11.0355.

Список литературы

1. Бондарь М.П. и др. // Физическая мезомеханика. 2008. Т. 11, №6. С. 39–44.

2. Бондарь М.П., Корчагин М.А., Ободовский Е.С. // Физика горения и взрыва. 2010. Т. 46, №1. С. 126–131.

3. Bondar M.P. et al. // Journal of Materials Science and Engineering. 2010. V. 4, No 3. P. 52–56.

AN EXPERIMENTAL-COMPUTATIONAL TECHNIQUE TO DETERMINE NATURAL FREQUENCIES OF A STRUCTURE

E.V. Karpov, M.P. Bondar

The new mesostructural composite (MC) is investigated. The base of the MC is copper and the reinforcing components are inclusions-aglomerates of nanocomposite Cu-TiB$_2$. MC was obtained by quasidynamic pressing and it is thermally stable material, which combines high conductivity with the strength properties and wear resistance, significantly superior to the similar characteristics of pure copper. Deformation of the MC in single and low-cycle uniaxial compression, the microhardness for different types of loading are investigated. Changing of the wear resistance of MK as a function of TiB$_2$ is percentage is analyzed. Comparison of macro-mechanical properties of the material features of the microstructure evolution take place. Comparison of the results with the analysis of existing theories of hardening of heterogeneous materials made it possible to determine the mechanism of hardening of the new MC. This makes it possible to optimize the choice of the MC depending on the functional purpose of the material.

Keywords: nanocomposite, mesostructural composite, microstructure, damage accumulation, low-cycle loading.

УДК 547.963.32:541.64

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСТЯЖЕНИЯ МОЛЕКУЛЫ ДНК В РАМКАХ КРУПНОЗЕРНИСТОЙ МОДЕЛИ

И.П. Кикоть, А.В. Савин

Институт химической физики им. Н.Н. Семенова РАН, Москва

irakikotx@gmail.com

Поступила в редакцию 16.06.2011

Механические свойства молекулы ДНК, такие как продольная и изгибная жесткости, влияют на то, как молекула взаимодействует с различными белками, а также на ее поведение внутри наноустройств. За последние десять лет проводилось много экспериментов, посвященных растяжению одиночной молекулы ДНК с помощью атомно-силовой микроскопии и других методов. Результаты экспериментов свидетельствуют о том, что поведение молекулы ДНК при растяжении полностью не описывается известными механическими моделями полимеров (такими, как растяжимая персистентная модель), а природа растянутого состояния до сих пор является предметом дискуссии. В настоящем исследовании растяжение одиночной молекулы ДНК моделируется в рамках разработанной крупнозернистой модели. Результаты расчетов дают основания полагать, что при продольной нагрузке растяжение молекулы происходит неравномерно и длина молекулы увеличивается за счет увеличения доли сильно растянутых звеньев. Таким образом, растянутое состояние ДНК представляет собой не две отдельные нити, как предполагается в некоторых работах, а двуспиральную молекулу, в которой присутствуют сильно и слабо растянутые звенья.

Ключевые слова: ДНК, растяжение, отдельная молекула, крупнозернистые модели, механические свойства, компьютерное моделирование.

Введение

Изучение механических свойств ДНК очень важно для понимания механизмов микробиологических процессов, в которых участвует эта молекула. Большой интерес, в частности, вызывает упаковка ДНК и ее взаимодействие с белками, так как при этом на малых масштабах молекула оказывается гораздо более гибкой, чем это можно было бы предположить из экспериментов, посвященных большим масштабам. Кроме того, знание механических свойств необходимо при создании ДНК-содержащих наноустройств. В последнее десятилетие значительно возросли возможности проведения экспериментов с одиночными молекулами, в частности, появилась возможность измерять механические свойства молекулы ДНК, хотя результаты таких экспериментов допускают различные интерпретации. Одной из характерных особенностей молекулы ДНК является наличие участка постоянной силы на диаграмме «сила–растяжение» [1, 2] при силе растяжения порядка 70 пН. Таким образом, при этих напряжениях поведение молекулы не описывается общей персистентной моделью, а происходит структурный переход, природа которого до сих пор вызывает споры [3, 4]. Обычные экспериментальные методы определения структуры, такие как рентгеноструктурный анализ, неприменимы к одиночной молекуле; в связи с этим особое значение приобретает изучение механических свойств молекулы ДНК с помощью компьютерного моделирования.

Методика расчетов

Для решения данной задачи используется новая крупнозернистая модель ДНК, где каждая пара оснований представляется 12 зернами [5]. Взаимодействие зерен описывается системой потенциалов, разработанной на основе результатов полноатомного моделирования. Такой подход, с одной стороны, позволяет с большой точностью воспроизвести основные особенности подвижности молекулы, а с другой стороны, является достаточно эффективным с вычислительной точки зрения и позволяет рассматривать достаточно протяженные молекулы.

Сначала моделировалось растяжение однородной последовательности как идеальной спирали. Идеальная двойная спираль характеризуется конфигурацией одного звена (состоящего из 12 зерен) и двумя параметрами – продольным шагом и угловым шагом, т.е. всего 38 координатами. Изменение энергии такой идеальной двойной спирали можно посчитать следующим образом: при каждом фиксированном продольном шаге энергия системы минимизируется по остальным 37 координатам. Можно сказать, что таким образом вычисляется энергия взаимодействия соседних звеньев двойной спирали в зависимости от растояния между ними. Оказалось, что для обеих однородных последовательностей (poly(dA)-poly(dT) и poly(dG)-poly(dC)) эта зависимость является невыпуклой. На рис. 1 представлены зависимости: *а* – энергии основного состояния E; *б* – напряжения цепи $F = dE/d\Delta z$ от продольного шага основного состояния двойной спирали поли-G ДНК. Кривые *1*, *2*, *3*, *5*, *6*, *7* дают зависимости при $T = 0$ К, а кривые *4* и *8* – зависимости при $T =$ $= 300$ К. Следовательно, энергетически более выгодно неоднородное растяжение, когда часть звеньев растянута сильно, а часть – слабо. В этом случае энергия достаточно длинной растянутой цепочки зависит от ее длины линейно (см. рис. 1, кривая *3*), т.е. сила растяжения является постоянной на этом участке.

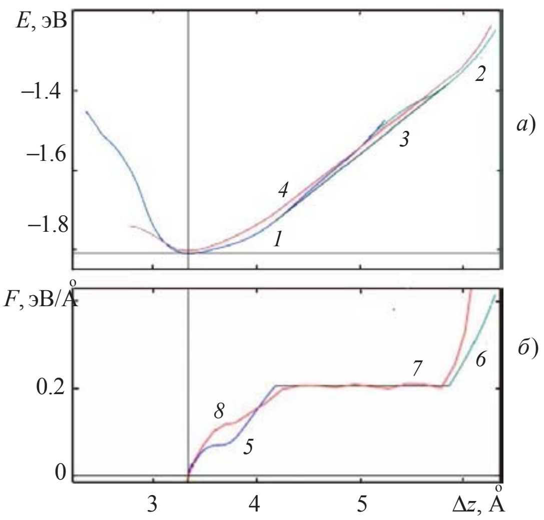


Рис. 1

Предположение о неоднородном растяжении, выдвинутое на основе моделирования идеальной спирали при нулевой температуре, было подтверждено молекулярно-динамическим моделированием растяжения однородной последовательности из 500 пар оснований при температуре 300 К. Продольная координата атомов на концевых звеньях фиксировалась, и эволюция системы моделировалась с использованием термостата Ланжевена в течение 700 пс. При этом энергия деформации зависела от растяжения примерно так же, как и при нулевой температуре (см. рис.1, красные линии), а в двойной спирали часть звеньев оставалась сильно растянутой, а часть – слабо.

Заключение

В рамках новой крупнозернистой модели молекулы ДНК моделировалось растяжение одной молекулы. Такое моделирование позволило получить диаграмму «сила–растяжение», которая качественно хорошо согласована с экспериментальными данными. Присутствие участка постоянной силы на этой диаграмме объясняется тем, что в промежутке между двумя предельными значениями продольного шага спирали молекула растянута неравномерно: часть звеньев растянута сильно, а часть – слабо. При этом удлинение двойной спирали при растяжении происходит за счет увеличения доли сильно растянутых звеньев. Такое поведение молекулы является энергетически более выгодным, чем равномерное растяжение всех звеньев из-за невыпуклости потенциала взаимодействия соседних звеньев цепи. Следует отметить, что в предложенной модели, в отличие от других работ, сильно растянутое состояние спирали достигается не за счет разрыва водородных связей между сопряженными основаниями, а только за счет раскручивания спирали и увеличения угла наклона пар оснований к оси спирали.

Авторы выражают благодарность М.А. Мазо и Л.И. Маневичу за консультации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект АФГИР-а 08-04-91118) и CRDF (проект RUB2-2920-MO-07).

Список литературы

1. Cluzel P. et al. // Science. 1996. V. 271. P. 792–794.

2. Smith S.B. et al. // Science. 1996. V. 271. P. 795–799.

3. Rouzina I., Bloomfield V. // Biophys. J. 2001. V. 80. P. 882–893.

4. Fu H. et al. // Nucleic Acids Research. 2010. V. 80. P. 1–7.

5. Зубова Е.А. и др. // Структура и динамика молекулярных систем: Сб. статей XVI Всерос. конф. Яльчик. 2009. Ч. 3. С. 19–24.

SIMULATION OF THE DNA MOLECULE STRETCHING WITHIN THE FRAMEWORK OF A COARSE-GRAINED MODEL

I.P. Kikot, A.V. Savin

Mechanical properties of DNA molecule, such as bending and longitudinal stiffnesses, the effect of its interactions with different polypeptides, as well as its behaviour in nanodevices are considered. In the past ten years, many experiments on DNA stretching have been conducted using atomic-force microscopy and other methods. The results of these experiments show that DNA molecule stretching response cannot be described by common polymer models such as worm-like chain or freely-joined chain and the stretched state of DNA is an object for many discussions. In the recent paper, single DNA molecule stretching is simulated within the framework of the elaborated coarse-grained model. The results enable us to suggest that stretching of the DNA double helix is non-uniform, its length increases due to increasing of the part of strongly stretched sites. Therefore, stretched form of DNA is double-helical with strongly stretched and weekly stretched sites, it does not experience force-induced melting.

Keywords: DNA, stretching, single molecule, coarse-grained, mechanical properties, simulations.

УДК 539.3+550.348

АСЕЙСМИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ В ЗОНЕ ТЕКТОНИЧЕСКОГО РАЗЛОМА И ВАРИАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

А.С. Ким

Национальный центр космических исследований и технологий, Алматы (Казахстан)

kim.as@mail.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Показано, что асейсмические движения в земной коре перед землетрясениями и возникающие при этом перемещения диффузного проводящего слоя могут приводить к электрокинетическим явлениям и быть одной из причин локального изменения магнитного поля.

Ключевые слова: асейсмические движения, тектонический разлом, землетрясение, проводящий слой, магнитное поле.

Исследования современных тектонических движений свидетельствуют о том, что геологический разлом представляет собой зону разупрочнения с аномально низкой эффективной вязкостью [1, 2]. Разлом представляет собой зону со сложным внутренним строением, имеет характерные размеры – протяженность, преобладание длины над шириной.

Зоны разломов характеризуются тем, что в них возможны развитые сдвиговые деформации, которые могут приводить к значительным смещениям берегов. Внутри разлома горные породы раздроблены и характеризуются повышенной трещиноватостью и пониженной прочностью, о чем свидетельствует характер распространения сейсмических волн на разломах и вне него.

Ползучесть горной породы в зоне тектонического разлома приводит к такой ее деформации, которую можно рассматривать как асейсмическое течение ньютоновской вязкой жидкости [3]. Асейсмическое скольжение вдоль разломов вызывает перераспределение напряжений в приразломной зоне и может предшествовать разрушению [4–6].

Деформирование и разрушение горных пород вызывают механоэлектрические процессы, которые приводят к разделению электрических зарядов в результате возникновения заряженных дислокаций на дефектах кристаллической решетки, образования электрически заряженных трещин, протекания электрохимических реакций на границах минеральных зерен [7], возникновения нескомпенсированных ионов.

Уравнения движения механики сплошной среды с учетом электромагнитных сил имеют вид [8]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{div} P + \rho_e \mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{j} \times \mathbf{H}), \tag{2}$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) = -\operatorname{div}\mathbf{q} + \operatorname{div}(\hat{P} \times \mathbf{v}) + \mathbf{E}\cdot\mathbf{j}, \tag{3}$$

где ρ – плотность среды, $\mathbf{v}$ – скорость, $\hat{P}$ – тензор напряжений, ρ_e – плотность заряда, $\mathbf{E}$ – напряженность электрического поля, $\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля, $\mathbf{j}$ – плотность тока, ε – плотность внутренней энергии, $\mathbf{q}$ – вектор потока тепла. Электромагнитные величины связаны уравнениями Максвелла и законом Ома.

В приближении магнитной гидродинамики рассмотрим движение вязкого проводящего слоя между двумя плоскостями при $H_y = 0$, $\partial\rho/\partial x = 0$. Уравнения движения проводящего слоя в этом случае принимают вид

$$\begin{gathered} \frac{1}{4\pi} H_z \frac{dH_x}{dz} + \eta \frac{d^2 v_x}{dz^2} = 0, \\ \frac{dv_x}{dz} + v_m \frac{d^2 H_x}{dz^2} = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

$$\frac{d^2 H_z}{dz^2} = 0, \quad \frac{dH_z}{dz} = 0. \tag{5}$$

Граничные условия зададим в виде

$$v_x(-b) = -V_0, \ H_x(-b) = H_{x0}, \ H_z(-b) = H_{z0}, \tag{6}$$

$$\begin{gathered} v_x(b) = -V_0, \quad H_x(b) = H_{x0}, \\ H_z(b) = H_{z0}, \quad p(V_0 = 0) = p_0. \end{gathered} \tag{7}$$

Решение краевой задачи для вязкого проводящего слоя получим в виде

$$H_x(z) = H_{x0} - \sqrt{\frac{4\pi\eta}{v_m}} \frac{\mathrm{ch}(\kappa_0 b) - \mathrm{ch}(\kappa_0 z)}{\mathrm{ch}(\kappa_0 b)} V_0,$$

$$\kappa_0 = \frac{H_{z0}}{\sqrt{4\pi\eta v_m}}, \quad -b \le z \le b, \tag{8}$$

$$v_x(z) = \frac{\mathrm{sh}(\kappa_0 z)}{\mathrm{sh}(\kappa_0 b)} V_0,$$

$$H_z(z) = H_{z0}, \quad -b \le z \le b. \tag{9}$$

Вариация магнитного поля имеет вид

$$\delta H = \delta H(z) = | H_x(z) - H_{x0} | =$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi\eta}{v_m}} \frac{\mathrm{ch}(\kappa_0 b) - \mathrm{ch}(\kappa_0 z)}{\mathrm{ch}(\kappa_0 b)} V_0, \tag{10}$$

$$\delta H_{\max} = \delta H(0) = \sqrt{\frac{4\pi\eta}{v_m}} \frac{\mathrm{ch}(\kappa_0 b) - 1}{\mathrm{ch}(\kappa_0 b)} V_0. \tag{11}$$

Для оценки вариации магнитного поля примем следующие параметры: $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с, $b = 2 \cdot 10^4$ см, $H_{z0} = 5 \cdot 10^4$ нТл, $\mu = 3 \cdot 10^{11}$ дин/см^2, $q = 6 \cdot 10^8$ дин/см^2, $\eta = 1.2 \cdot 10^{15}$ дин·с/см^2, $\varepsilon_{xz} = q/(2\mu) = 6 \cdot 10^8/(2 \cdot 3 \cdot 10^{11}) = 10^{-3}$, $V_0 = 36$ см/ч $= 10^{-2}$ см/с, $\dot{a} = V_+ - V_- = 2V_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ см/с, $\eta_{eff} = \eta/(2b) = 1.2 \cdot 10^{15}/(2 \cdot 2 \cdot 10^4) = 3 \cdot 10^{10}$ ед. СГС.

При $\dfrac{H_{z0} b}{\sqrt{4\pi\eta v_m}} << 1$ $\delta H \cong \dfrac{H_{z0}}{v_m} \dfrac{b^2 - z^2}{b} V_0,$

$$\delta H_{\max} = \frac{H_{z0}}{v_m} b V_0.$$

При $v_m = 10^5 - 10^7$ ед. СГС, $\delta H_{\max} = 1 - 100$ нТл.

Из полученных результатов следует, что асейсмические движения в земной коре, предваряющие землетрясения, могут вызывать заметные вариации основного магнитного поля и синхронны с ними.

Список литературы

1. Черепанов Г.П. Об одном механизме развития разломов в твердой оболочке Земли // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. №9. С. 3–12.

2. Адушкин В.В. Актуальные проблемы геомеханики земной коры // Вестник ОГГГГН. 2001. №1(16). С. 1–32.

3. Теркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. М.: Мир, 1985. 731 с.

4. Моги К. Предсказание землетрясений. М.: Мир, 1988. 282 с.

5. Ким А.С. Evolution of the stress-strain state in the tectonic fracture zone of the damping section // Вклад корейцев в науку и технику Казахстана: Матер. Междунар. конф. Алматы. 1997. С. 262–265.

6. Ким А.С. Асейсмическое скольжение вдоль разлома в породном массиве перед разрушением // Геодинамика и напряженное состояние недр Земли: Тр. Междунар. конф. Новосибирск: ИГД СО РАН, 2004. С. 141–144.

7. Соловьев С.П., Спивак А.А. Электромагнитные сигналы в результате электрической поляризации при стесненном деформировании горных пород // Физика Земли. 2009. №4. С. 76–84.

8. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.

ASEISMIC MOTION IN THE TECTONIC FRACTURE ZONE AND VARIATION OF MAGNETIC FIELD

A.S. Kim

It is shown that aseismic motions in the tectonic fracture zone occurring prior to the earthquakes and the accompanying shift of diffusive conducting layer can lead to electric-kinetic processes and can be one of the reasons for local changes in the magnetic field.

Keywords: aseismic motion, tectonic fracture, earthquake, conducting layer, magnetic field.

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НЕОБРАТИМОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ПОВРЕЖДАЕМЫХ СРЕД. ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРОБЛЕМАМ ГЕОДИНАМИКИ

***А.Б. Киселев*[2], *П.П. Захаров*[1], *О.В. Нехаева*[2]**

[1]ВНИИ автоматики им. Н.Л. Духова, Москва
[2]Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

akis2006@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Термомеханические процессы, которые происходят в деформируемых твердых телах под действием интенсивных динамических нагрузок, состоят из взаимосвязанных механических, тепловых и структурных процессов. Эти процессы проявляются необратимыми деформациями, полосами адиабатического сдвига, микроразрушениями. Динамическое разрушение является сложным многостадийным процессом, включающим появление, развитие и слияние микродефектов, формирование зародышевых микротрещин, которые растут, объединяются, образуя макротрещины. В конечном счете тело распадается на отдельные фрагменты.

Обсуждаются некоторые новые результаты, полученные в следующих направлениях:

– построение термодинамически корректных математических моделей повреждаемых термоупруговязкопластических сред (микроразрушение);

– разработка методов определения «нестандартных» констант моделей сред, связанных с микроазрушением материалов;

– численное моделирование разрушения (фрагментации) конструкций (макроразрушение);

– численное исследование прикладных задач необратимого динамического деформирования и разрушения повреждаемых сред и конструкций (разрушение толстостенных цилиндрической и сферической оболочек под действием внутренней взрывной нагрузки; деформирование и разрушение двухслойной сферической оболочки, заполненной жидкостью, при внешней ударной нагрузке; гидроразрыв нефтеносных пластов; динамика необратимого деформирования и разрушения нефтеносного пласта при внезапном снятии нагрузки на поверхности скважины и др.).

Ключевые слова: динамика необратимого деформирования и разрушения, параметры поврежденности, термоупруговязкопластичность, нефтеносный пласт.

Некоторые ранее полученные результаты в указанных выше направлениях опубликованы в работах [1–10] и доложены на многих конференциях. Во всех этих работах рассматриваются модели повреждаемых термовязкоупругопластических сред с двумя скалярными параметрами поврежденности типа [1, 2]. А именно, вводится симметричный тензор поврежденности ω_{ij}. Первый его инвариант $\omega = \omega_{kk}/3$ описывает объемную поврежденность, второй инвариант $\alpha = \sqrt{\omega'_{ij}\omega'_{ij}}$ – интенсивность девиатора тензора поврежденности $\omega'_{ij} = \omega_{ij} - \omega_{kk}/3\delta_{ij}$ – сдвиговое разрушение. При этом считается, что в областях интенсивного растяжения параметр ω описывает накопление повреждений типа микропор, заполненных газом и/или жидкостью, которые могут залечиваться при сжатии. Параметр ω можно интерпретировать как относительное сокращение эффективной несущей нагрузки площадки вследствие появления распределенных внутри образца микропор. Таким образом, ω можно считать объемным содержанием микропор в материале. В неповрежденном материале $\omega = \alpha = 0$, с накоплением повреждений ω и α растут, оставаясь меньше 1. При построении таких моделей повреждаемых сред используются термодинамические принципы механики сплошной среды, поэтому они являются термодинамически корректными. Механические, тепловые и структурные процессы являются взаимно связанными.

Основное внимание в данной работе уделяется задачам геодинамики, связанным с проблемами добычи нефти из недр земли. Подробно исследуется следующая задача.

В инженерной практике широко используются создаваемые бурением искусственные горные выработки (полости) кругового сечения различного диаметра: от нескольких сантиметров (шпуры) до нескольких метров (скважины, шахтные стволы и т.п.). При бурении большое значение имеет создание условий, при которых обеспечивается устойчивость к разрушению породы со стороны внутренней поверхности выработки. Характер разрушения горной породы во многом связан с наличием в ней структурных неоднородностей различных масштабов (пор и трещин). В настоящем исследовании рассматривается численное моделирование динамики деформирования и разрушения горного пласта в прискважинной зоне при резком снятии внутрискважинного давления.

Приняты следующие допущения: массовыми силами можно пренебречь; параметры задачи не зависят от пространственной координаты, нормальной к плоскости пласта; предполагается плоская деформация пласта, задача решается в двумерной постановке; пласт моделируется повреждаемой термоупругопластической средой; процесс деформирования является адиабатическим.

В качестве критерия начала макроразрушения используется энтропийный критерий разрушения: среда теряет сплошность тогда, когда удельная диссипация достигла предельной величины D_* [11]. В точке среды, в которой выполнен критерий разрушения, осуществляется явное построение берегов макроразрыва. Для этого производится разделение узлов расчетной сетки по границам ячеек: внутренние узлы и соответствующие им ребра ячеек становятся граничными, на них задаются условия свободной поверхности, определенное давление или контактные условие в зависимости от ситуации [11].

Отметим, что ранее нами для явного выделения поверхностей разрушения использовалась процедура перестройки лагранжевой расчетной сетки ([3, 5, 9, 10] и др.).

Процедура расщепления узлов сетки состоит из построения «элементарных» трещин для каждого узла и их объединения с уже существующими трещинами. Взаимодействие «элементарных» трещин формирует трещины большего масштаба. Тип элементарной трещины определяется из анализа напряженного состояния на смежных ребрах для данного узла [12–14].

В исследованиях по данной тематике принимали участие в разные периоды времени М.В. Юмашев, О.В. Володько, А.А. Лукьянов и А.В. Привальский.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №09-01-00144а).

Список литературы

1. Kiselev A.B. Mathematical modeling of dynamical deforming and combined microfracture of damageable thermoelastoviscoplastic medium // Studies in Applied Mechanics 45: Advanced Methods in Material Processing Defects / Ed. by M. Predeleanu and P. Gilormini. Amsterdam: Elsevier, 1997. P. 43–50.

2. Киселев А.Б. Математическое моделирование динамического деформирования и комбинированного микроразрушения термоупруговязкопластической среды // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1998. №6. С. 32–40.

3. Kiselev A.B., Yumashev M.V., Volod'ko O.V. Deforming and fracture of metals. The model of damageable thermoelastoviscoplastic medium // J. of Materials Processing Technology. 1998. Vol. 80, 81. P. 585–590.

4. Kiselev A.B., Lukyanov A.A. Mathematical modeling of dynamic processes of irreversible deforming, micro- and macrofracture of solids and structures // Int . J. of Forming Processes. 2002. Vol. 5, No 2–4. P. 351–362.

5. Киселев А.Б., Лукьянов А.А., Тьерсилен М. Численное моделирование распространения криволинейных трещин гидроразрыва // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. №1. С. 36–43.

6. Киселев А.Б., Нехаева О.В. Численное моделирование динамического деформирования и разрушения толстостенной сферической оболочки // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. №5. С. 53–58.

7. Киселев А.Б., Нехаева О.В. Численное моделирование динамического деформирования и разрушения толстостенной цилиндрической оболочки // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 2005. №2. С. 33–37.

8. Киселев А.Б., Нехаева О.В. Численное моделирование процессов необратимого деформирования и разрушения двухслойной сферической оболочки, заполненной жидкостью, при столкновении с препятствием // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: Сб. статей к 75-летию Е.И. Шемякина / Под ред. Д.Д. Ивлева и Н.Ф. Морозова. М.: Физматлит, 2006. С. 320–338.

9. Киселев А.Б., Максимов В.Ф., Нехаева О.В. Численное моделирование процессов необратимого деформирования и разрушения конструкций, сопровождающих удар, взрыв и проникание // Современные проблемы математики и механики. Т. I. Прикладные исследования / Под ред. В.В. Александрова и В.Б. Кудрявцева. М.: МГУ, 2009. С. 276–292.

10. Kiselev A.B., Lukyanov A.A. Numerical investigation of hydraulic fracture propagation // J. of Mechanical Behavior of Materials. 2009. Vol. 19, No 5. P. 297–305.

11. Киселев А.Б., Юмашев М.В. Деформирование и разрушение при ударном нагружении. Модель поврежденной термоупругопластической среды // ПМТФ. 1990. №5. С. 116–123.

12. Стефанов Ю.П. Некоторые особенности численного моделирования поведения упругопластических материалов // Физическая мезомеханика. 2005. Т. 8, №3. С. 129–142.

13. Захаров П.П., Киселев А.Б. Численное моделирование динамики деформирования и разрушения горного пласта в призабойной зоне // Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы: Сб. тру-

дов Междунар. научно-практич. конф. / Московс. гос. строит. ун-т. М. 2009. С. 147–155.
14. Захаров П.П. Численное моделирование динамики деформирования и разрушения горного пласта в призабойной зоне // Двойные технологии. 2010. №4. С. 38-44.

MATHEMATICALLY MODELING THE DYNAMIC PROCESSES OF IRREVERSIBLE DEFORMATION AND FAILURE OF DAMAGEABLE MEDIA. APPLICATION TO PROBLEMS OF GEODYNAMICS

A.B. Kiselev, P.P. Zacharov, O.V. Nekhaeva

Thermo-mechanical processes, which develop in deformable solids under intensive dynamic loading, consist of mechanical, thermal and structural ones, which correlate themselves.

These processes develop as irreversible deformations, strips of adiabatic shear and microfacture. Dynamic fracture is a complicated multistage process including the stages of initiation, growth and merging of microdefects, the formation of embryonic microcracks, pores, that grow leading to the break-up of the bodies resulting in their fragmentation.

The present paper include new results on the following aspects:

– development of the thermodynamically adequate mathematical models of damageable thermoelastoviscoplastic media (microfracture);

– development of the methods for determination of «nonstandart» constants of medium models, connected with microfracture of materials;

– numerical simulation of failure (fragmentation) of structures (macrofracture);

– numerical investigation of applied problems for damageable solids and structures (dynamical deforming and fracture of thick-walled cylindrical and spherical shells under explosion; dynamical deforming and fracture of thick-walled two-layer shell, filled with liquid, under external impact loading; the problems of dynamic deformation and failure of an oil-holding layer in hydraulic fracturing; dynamics of irreversible deforming and fracture of oil-bearing layer when abruptly releasing the load on borehole surface etc.).

Keywords: dynamics of irreversible deforming and fracture, damageable parameters, thermoelastoplasticity, oil-bearing layer.

462 Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (2), с. 462–464

УДК 534.7;534:612.014.45;539.3

ВОЛНОВАЯ БИОМЕХАНИКА ТКАНЕЙ

Б.Н. Клочков

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

klochkov@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассмотрены низкочастотные поверхностные упругие волны в биоткани с учетом ее структуры, представлены дисперсионные зависимости распространения волны от частоты. Предложена континуальная модель пространственно-неоднородного распределения крови в ткани, включая механизмы гладкомышечной регуляции микрососудов.

Ключевые слова: поверхностные волны, мягкая биоткань, дисперсия, континуальная модель, кровоснабжение, активность, автоструктуры.

Исследование акустического ближнего поля, возбуждаемого колеблющимся источником на поверхности биоткани, важно с точки зрения возможности определения ее слоистой структуры и вязкоупругих параметров, зависящих от ее состояния. Продольные волны в тканях обычно дают информацию только о слоистости ткани и ее объемной сжимаемости, поэтому развитие получают исследования при помощи волн сдвиговой природы, в том числе поверхностных. В настоящем исследовании применительно к слоистым тканям используется метод численных расчетов ближних акустических полей от силового поверхностного виброисточника вдоль поверхности ткани и в ее глубине с усреднением по площадке штампа и без усреднения. Этот метод применялся для описания поля нормальных и касательных компонент смещения, а также параметров распространения поверхностных волн [1, 2]. Кратко метод состоит в следующем. Ткань представляется в виде двухслойной среды с сильно различающимися модулями сдвига, причем внутренний слой (жесткое основание – упругий материал с высокой скоростью звука и слабой диссипацией) сцеплен с наружным (мягкий слой – вязкоупругая водоподобная ткань). Это – часто встречающийся случай эндоскелета (кость внутри). Возбуждение упругих волн производилось поверхностным силовым источником, имеющим круглую площадку радиуса a, нормально к поверхности мягкого слоя (ткань занимает область $z \geq 0$, ось r – вдоль поверхности). При этом напряжение $\sigma_{zz} = \sigma_0 e^{j\omega t}$ (σ_0 – амплитуда, ω – частота) равномерно распределено по поверхности круглой площадки, вне которой $\sigma_{zz} = 0$, причем сдвиговая компонента напряжений $\sigma_{zr} = 0$ на всей поверхности $z = 0$. По обе стороны от поверхности контакта слоев $z = h$ равны нормальные и касательные компоненты смещений W^n и W^t, а также σ_{zz} и σ_{zr}. Справедливы линейные уравнения теории упругости Ламе в цилиндрических координатах r, z с учетом диссипации в мягкой среде в рамках модели Кельвина – Фойгта. Параметрами являются: λ_n, μ_n и ρ_n – упругие коэффициенты Ламе и плотности; $n = 1$ соответствует мягкой среде, причем $\mu_1 \Rightarrow \mu_1 + \mu_1'\,\partial/\partial t$, где μ_1' – коэффициент вязкости; $n = 2$ – жесткой среде.

Вводя скалярный и векторный потенциалы, преобразования Ханкеля в уравнениях и граничных условиях, имеем систему алгебраических уравнений, после решения которой для нормальных и касательных к поверхности смещений получим выражения в виде лэмбовского интеграла по тангенциальным волновым числам k (обратные преобразования Ханкеля нулевого и первого порядка):

$$W^i(r,z) = \sigma_0 \int_0^\infty \frac{U_i(z,a,k,\omega,h,P)}{\Delta(k,\omega,h,P)} J_1(ka) J_{2-i}(kr)\,dk,$$

где $i = 1, 2$ – соответственно тангенциальная (t) и нормальная (n) компоненты смещения; P – набор упругих и диссипативных параметров слоев; Δ – определитель системы граничных условий 6-го порядка, а U_i – 5-го; J_m – функция Бесселя порядка m. Вычислялась скорость распространения поверхностной волны C (м/с) и декремент ее затухания Q (1/м) в зависимости от частоты f (Гц) (рис. 1, сплошные кривые соответствуют $h = 2$ см, штриховые – полупространству).

Построена континуальная модель пространственно неоднородного распределения крово-

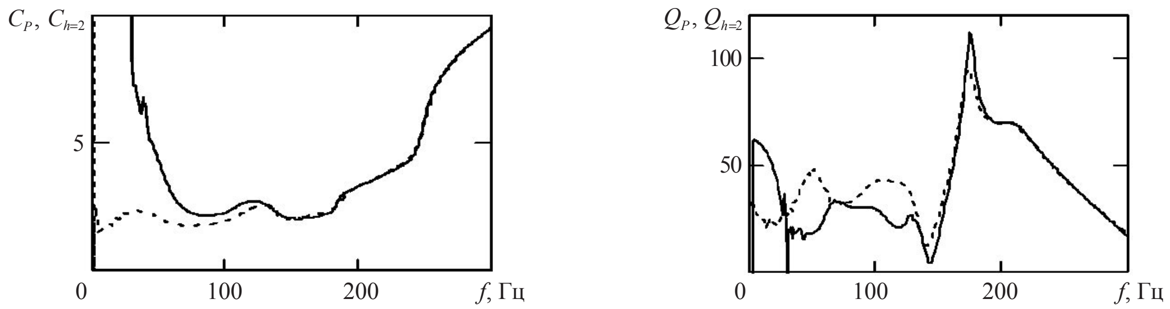


Рис. 1

заполнения тканей. Справедливы уравнения неразрывности обеих фаз (кровь и активный упругий тканевой каркас) и их движения. Учитывается фильтрационный закон Дарси.

Предполагается, что фазы и среда в целом несжимаемы, плотности фаз равны. Межфазный переток отсутствует. Пренебрежем инерционными слагаемыми, процессы достаточно медленные. Имеется сильно разветвленная сеть кровеносных микрососудов с мышечными волокнами разного калибра, переплетенных так, что в среднем по малому объему среды скорость фазы крови близка скорости твердой фазы, хотя вдоль любого сосуда скорость тока крови существенно отлична от скорости окружающей ткани. Изотропное активное напряжение ткани γ связано с гладкомышечными клетками стенки сосудов и со скелетной нервно-мышечной управляемой системой. Возможны разные случаи нелинейной активной функции γ в зависимости от: деформации каркаса ε, давления жидкости p, сдвигового напряжения и др. Рассмотрим случай $\gamma = \gamma(\varepsilon)$ [3]. В результате получим нелинейное уравнение относительно пористости φ (объемного содержания крови $\varphi \sim \varepsilon$).

Рассмотрим одномерный случай:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right), \quad D = D(\varphi, \eta, k, E, \gamma),$$

где фоновое состояние предполагается ненапряженным, η – вязкость жидкости, k – эффективная проницаемость ткани по отношению к крови; E – коэффициент упругости твердой фазы, γ – параметр активности. При этом можно принять аппроксимацию финитной колоколообразной зависимости $\gamma(\varphi)$ кусочно-параболической или кусочно-линейной функциями. Численные решения уравнения дают процесс изменения распределения φ при различных условиях (см. рис. 2*а*, *б*, *в*). Использована зависимость $D(\varphi)$ в виде непрерывной функции. Кривые на рисунках – безразмерные, идут снизу вверх.

Получены динамические структуры пространственного кровотока в ткани. При определенных условиях реализовалась характерная динамика. Получена зависимость ширины от начальной амплитуды: чем больше амплитуда начального распределения, тем больше длительность итогового импульса. Имеют место эффекты обострения импульса, а при определенных условиях уплощения с прогибом в середине, а также мелкомасштабность. Может происходить

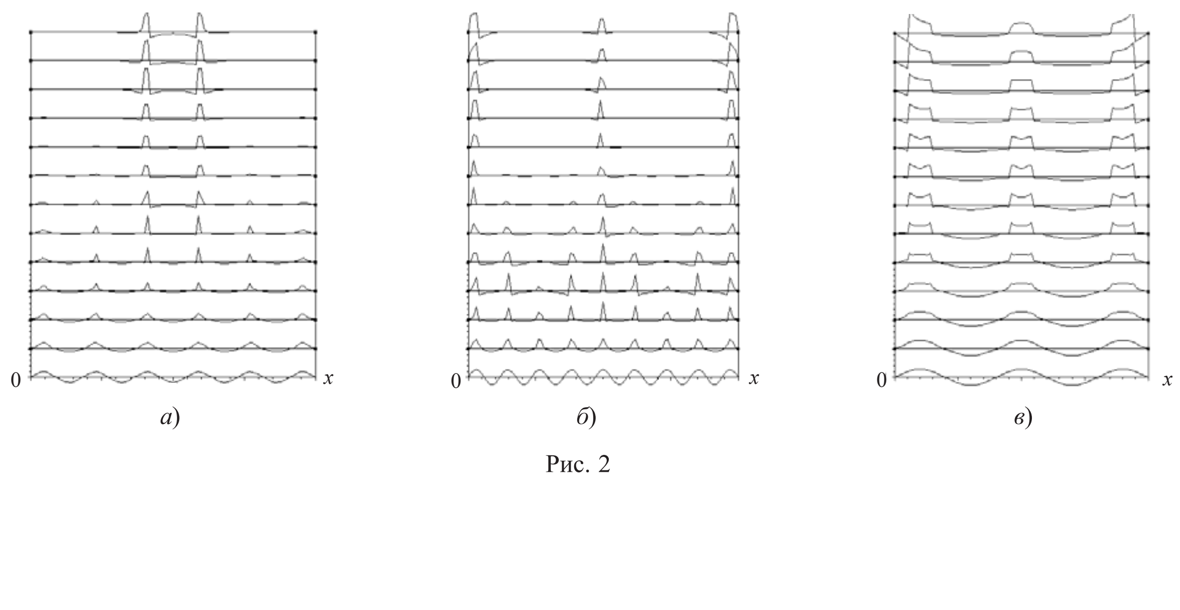


Рис. 2

удвоение импульса. Реализуется эффект локализации в середине (пропадание концевых импульсов, рис. 2*а*) или выпадение пика (пропадание промежуточных импульсов, рис. 2*б*).

Возможны реализации острых импульсов (постепенное обострение без выпадения и без локализации) или тупых импульсов (постепенное уплощение, рис. 2*в*). Предложенное модельное описание соответствует наблюдениям на ткани и может быть использовано для исследования функционирования сосудистой периферии кровоснабжающейся ткани.

Список литературы

1. Клочков Б.Н., Елисеева Ю.Ю., Шилягин П.А. // Акустический журнал. 2009. Т. 55, №4-5. С. 506–515.

2. Клочков Б.Н. // Акустический журнал. 2008. Т. 54, №1. С. 143–146.

3. Клочков Б.Н., Рейман А.М. // Изв. вузов. Приклад. нелин. динамика. 2010. Т. 18, №2. С. 131–141.

WAVE BIOMECHANICS OF TISSUES

B.N. Klochkov

Low-frequency surface elastic waves in biotissue are considered, taking into account their structure, and dispersion dependences of wave propagation on the frequency are presented. Continual model of spatially inhomogeneous blood distribution in a tissue is presented, accounting for the mechanisms of smooth muscle regulation of microvessels.

Keywords: surface waves, soft biotissue, dispersion, continual model, circulation, activity, autostructures.

УДК 533.77

МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГАЗА С ПОВЕРХНОСТЬЮ

В.Л. Ковалев[1], *А.А. Крупнов*[2], *М.Ю. Погосбекян*[2], *А.Н. Якунчиков*[1]

[1]Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова
[2]НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

valerykovalev@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

На основе методов молекулярной динамики и квантовой механики разработаны новые физико-математические модели и вычислительные алгоритмы, получены новые результаты при исследовании каталитических свойств теплозащитных покрытий космических аппаратов, адсорбционных свойств углеродных нанотрубок, течений в микро- и наноканалах.

Ключевые слова: молекулярная динамика, коэффициенты рекомбинации и аккомодации, хранение водорода, углеродные нанотрубки.

Введение

Перспективы развития наукоемких отраслей промышленности требуют проведения новых исследований физико-химических процессов в экстремальных условиях и при конструировании новых материалов. Актуальным становится развитие предсказательного моделирования на атомарно-молекулярном уровне. Такие подходы стали возможны в последнее время при наличии вычислительных супермощностей. Они позволяют лучше понять механизм физико-химических процессов, проанализировать их элементарные стадии и оценить различные пространственные эффекты. Теоретическое описание позволяет существенно уменьшить объем экспериментальной работы, необходимой для их достоверного описания. Часто эксперименты не могут воспроизвести все натурные условия, иногда это невозможно. На основе молекулярной динамики и квантовой механики разработаны эффективные методы исследования процессов взаимодействия газовых смесей с поверхностями, с помощью которых получен ряд новых результатов.

Основные результаты

При входе космических аппаратов в атмосферу Земли и других планет за счет использования низкокаталитических покрытий тепловые потоки к их поверхности могут быть снижены в несколько раз. В большинстве работ для описания гетерогенного катализа на поверхности космических аппаратов используются феноменологические модели. Они отличаются детализацией механизма гетерогенных каталитических процессов и величинами коэффициентов скоростей элементарных стадий. Такие модели легко использовать в расчетах химически неравновесных течений у обтекаемых тел. Однако многие параметры феноменологических моделей недостаточно хорошо известны и их выбор по экспериментальным данным неоднозначен.

Дан анализ процессов гетерогенной рекомбинации атомов и аккомодации энергии рекомбинации на теплозащитных покрытиях многоразовых космических аппаратов (SiO_2, SiC и Al_2O_3) на основе методов молекулярной динамики и квантовой механики. В частности, с помощью квазиклассического подхода проведено исследование гетерогенной каталитической рекомбинации атомов кислорода на поверхности оксида алюминия. При этом на основе квантово-механических расчетов вычислена поверхность потенциальной энергии кристалла и изучены ее особенности, в том числе и зависимость от релаксации атомов в кристаллической решетке. Полученные данные были использованы при молекулярно-динамическом моделировании ударного механизма гетерогенной рекомбинации атомов кислорода на поверхности оксида алюминия. В диапазоне изменения температуры поверхности от 1000 до 2000 К определены величины вероятностей рекомбинации, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными. Теоретическое описание позволяет существенно уменьшить объем экспериментальной работы, необходимой для достоверного описания гетерогенного катализа с целью анализа тепловых потоков к теплозащитным покрытиям космических аппаратов при их входе в атмосферу. Приводятся конкретные примеры расчетов каталитических свойств теплозащитных покрытий и тепловых потоков к космическим аппаратам при их входе в атмосферы Земли и Марса.

Водород является высокоэффективным и экологически чистым энергоносителем. Основным препятствием для стационарного и мобильного использования водорода является отсутствие эффективных способов его хранения. Одним из способов решения этой проблемы является хранение водорода в адсорбированном состоянии углеродными нанотрубками, которые химически стабильны, имеют большую площадь поверхности, незначительную массу и сравнительно недороги. Проведено исследование процессов физической адсорбции водорода в углеродных наноструктурах. Обнаружено, что при низких температурах и высоких давлениях образуется второй слой адсорбции, что значительно увеличивает количество адсорбированного водорода. Рассчитаны относительное массовое содержание и средняя плотность водорода в массиве углеродных нанотрубок в зависимости от температуры, давления и геометрии массива. Найдены оптимальные для адсорбции расстояния между трубками. Показано, что даже при оптимальном расстоянии между трубками в массиве применение углеродных нанотрубок для хранения водорода при комнатной температуре нецелесообразно, а при низких температурах ($T = 80$ К) их использование позволяет существенно повысить эффективность хранения водорода.

Исследованию законов отражения и процессов аккомодации энергии на различных материалах посвящено большое количество экспериментальных и теоретических работ. Первоначально данная задача была востребована в аэродинамике разреженного газа, научный и практический интерес к которой непрерывно повышался с развитием авиационной и космической техники. В последнее время интерес к этой области усилился вследствие развития микро- и нанотехнологий. Задача о взаимодействии газа с поверхностью при больших числах Кнудсена возникает при описании течений в узких каналах, микро- и наноструктурах. Уменьшение ширины канала приводит к увеличению числа Кнудсена и возрастанию роли поверхностных взаимодействий. При этом макроскопическое описание, рассматривающее газ как непрерывную среду, становится несправедливым. Поэтому для описания таких течений необходимо использовать микроскопический подход, основанный на методах кинетической теории, прямом статистическом и молекулярно-динамическом моделировании.

Методом прямого статистического моделирования исследовано течение газа и теплообмен в микро- и наноканалах в широком диапазоне изменения числа Кнудсена. Показано существенное влияние скольжения у стенки на характеристики потока и даны количественные оценки этого явления. Рассчитаны коэффициенты диффузного отражения и аккомодации энергии водорода на поверхности графита в зависимости от энергии падения, температур газа и стенки. При этом рассчитывались траектории отражения молекул водорода от поверхности графита с учетом ее структуры и теплового движения атомов углерода. Для задач, в которых отличием функции распределения для падающего потока от максвелловской функции можно пренебречь, и средние скорости течения малы по сравнению с тепловыми скоростями молекул, получены зависимости коэффициентов аккомодации энергии и касательного импульса от температур газа и поверхности.

Обнаружено, что температура поверхности оказывает существенное влияния на процессы аккомодации при температурах газа 20–400 К. При высоких температурах газа ($T > 900$ К) зависимость от температуры стенки ослабевает. При этом коэффициенты аккомодации принимают значения 0.1–0.2 в широком диапазоне температур поверхности 90–1100 К, что подтверждается экспериментальными и теоретическими результатами других авторов. Установлено, что высокие значения коэффициентов аккомодации при низких температурах объясняются увеличением времени пребывания молекул водорода в физически адсорбированном состоянии.

Расчеты проведены на суперкомпьютерном комплексе СКИФ-МГУ «Чебышев».

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00280 а).

Список литературы

1. Ковалев В.Л. Гетерогенные каталитические процессы в аэротермодинамике. М.: Физматлит, 2002. 223 с.

2. Ковалев В.Л., Колесников А.Ф. // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 5. С. 3–31.

3. Ковалев В. Л., Погосбекян М.Ю // Изв. РАН. МЖГ. 2007. №4. С. 176–183.

4. Ковалев В.Л., Погосбекян М. Ю. // Вестник Москов. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2009. № 2. С. 44–49.

5. Ковалев В.Л., Сазонова В.Ю., Якунчиков А.Н. // Вестник Москов. ун-та. Сер. Математика. Механика. 2007. №2. С. 67–72.

6. Ковалев В.Л., Сазонова В.Ю., Якунчиков А.Н.

// Вестник Москов. ун-та. Сер. Математика. Механика. 2008. №2. С.56–58.

7. Ковалев В.Л., Якунчиков А.Н. // Вестник Москов. ун-та. Сер. Математика. Механика. 2008. №5. С. 67–70.

8. Ковалев В.Л., Якунчиков А.Н. // Изв. РАН. МЖГ. 2009. №3. С. 160–164.

9. Ковалев В.Л., Якунчиков А.Н. // Изв. РАН. МЖГ. 2009. №6. С. 157–160.

10. Ковалев В.Л., Крупнов А.А., Погосбекян М.Ю., Суханов Л.П. // Изв. РАН. МЖГ. 2010. №2. С. 153–160.

11. Ковалев В.Л., Якунчиков А.Н. // Изв. РАН. МЖГ. 2010. №6. С. 166–173.

MULTISCALE MODELING OF INTERACTION OF GAS WITH A SURFACE

V.L. Kovalev, A.A. Kroupnov, M.Ju. Pogosbekian, A.N. Yakunchikov

New physical and mathematical models and computing algorithms are developed on the basis of molecular dynamics and the quantum mechanics methods. New results are obtained by studying the catalytic properties of heat shield coatings of space vehicles, of adsorption properties of carbon nanotubes, as well as of flows in micro-and nanochannels.

Keywords: molecular dynamics, recombination and accommodation coefficients, hydrogen storage, carbon nanotubes.

УДК 620.172.21

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ НА МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАГНИТОРЕОЛОГИЧЕСКИХ ЭЛАСТОМЕРОВ

В.Н. Ковров, А.И. Останин, К.В. Качалин

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

kovrov@icmm.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Описан экспериментальный комплекс, позволяющий исследовать магнитореологические материалы при различных видах нагружения в магнитном поле индукцией до 1.2 Тл. Комплекс дает возможность автоматизировать процесс получения экспериментальных данных. Приведены результаты опытов в режимах растяжения с постоянной скоростью, релаксации напряжений с опытной оценкой управляющих воздействий магнитного поля.

Ключевые слова: магнитореологические, магнитоуправляемые материалы, магнитное поле, магнитострикция.

В последнее десятилетие значительное внимание исследователей привлекают материалы, представляющие собой эластомерную матрицу, наполненную магнитомягкими частицами размером от десятых долей микрона до нескольких микрон [1– 3]. Эти полимеры называют магнитореологическими эластомерами (MRE), магнитоуправляемыми или смарт-материалами. Главной особенностью этих композитов является способность существенно изменять механические свойства в магнитном поле. Цель данной работы – создание экспериментального комплекса, позволяющего автоматизировать процессы нагружения и записи экспериментальной информации при требуемых режимах нагружения MRE в однородных магнитных полях различной индукции.

Экспериментальный комплекс (рис. 1) создан на базе испытательной машины FS-100CT (Великобритания) и включает в себя собственно испытательную машину, блок питания с выпрямителем, электромагнит *2* с зазором для размещения испытуемого образца *1* с верхним и нижним захватами *5*, *6*, силоизмеритель *3* и систему регистрации *4*.

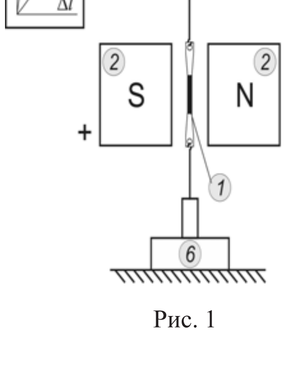


Рис. 1

На рис. 2 приведены результаты циклического нагружения образца из бутилкаучука марки БК-ФМ (40% Fe, 60% ТМ, наполнитель – карбонильное железо марки Р-10, пластификатор – трансформаторное масло, отвердитель – глицидол) при различной индуктивности магнитного поля. Испытания проводили в следующей последовательности. С помощью программного обеспечения машины задавались параметры цикла нагрузки и разгрузки. После замера площади поперечного сечения и величины базы образец нагружался при скорости деформирования 20 мм/мин до значения напряжения, соответствующего половине предела прочности при статическом растяжении. После этого осуществлялась разгрузка до нуля по напряжению.

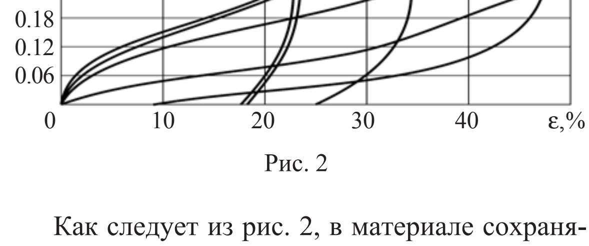


Рис. 2

Как следует из рис. 2, в материале сохраняется остаточная деформация, связанная с эффектами вязкости. Для исключения влияния изменившейся величины базы на расчет деформации при последующих нагружениях образец выдерживали вне захватов до полного восстановления первоначальных размеров. Опыты показали, что для полной обратимости остаточной деформации требуется около 10 мин. Затем образец помещали в захваты, создавали внешнее магнитное поле и вновь повторяли цикл нагрузки-разгрузки. Величина магнитного поля в опытах составляла: 0.3 Тл (кривая *2*), 0.75 Тл (кривая *3*), 1.2 Тл (кривая *4*), кривая *1* – без магнитного поля. Все кривые деформирования имеют значительный гистерезис, присущий дисперсно наполненным материалам. Видно, что влияние магнитного поля на величину максимальной деформации в цикле характеризуется насыщением – можно ожидать, что дальнейшее его увеличение не приведет к существенному изменению кривых деформирования.

Комплекс позволяет осуществлять более сложные режимы нагружения, в частности, проводить испытания на растяжение с постоянной скоростью с наложением и снятием магнитного поля в процессе деформирования. Пример такого испытания показан на рис. 3 в координатах напряжение–время для образца из того же материала. Здесь магнитное поле величиной 1.2 Тл накладывалось через определенные промежутки времени на процесс растяжения MRE. Включение магнитного поля вызывает существенный рост напряжений, развивающийся по мере растяжения и соответствующий характеру силового отклика, который возникает при постоянном действии электромагнита.

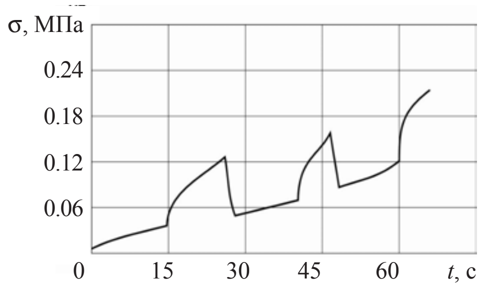


Рис. 3

Таким образом, созданный экспериментальный комплекс позволяет значительно снизить трудоемкость проводимых испытаний и оценить влияние магнитного поля на MRE при произвольных режимах нагружения. Полученные результаты дают оценку управляющих воздействий магнитного поля для перспективного использования материалов такого класса.

Список литературы

1. Никитин Л.В. и др. Влияние магнитного поля на упругие и вязкие свойства магнитоэластиков // Высокомолекулярные соединения. Сер А. 2001. Т. 43, №4. С. 698–706.

2. Kallio M. The elastic and damping properties of magnetorheological elastomers. Espoo 2005 // VTT Publications 565. 146 p.

3. Stepanov G.V. et al. // Polymer. 2007. V. 48. P. 488–495.

INFLUENCE OF MAGNETIC FIELDS ON THE MECHANICAL PROPERTIES OF MAGNETORHEOLOGICAL ELASTOMERS

V.N. Kovrov, A.I. Ostanin, K.V. Kachalin

The paper describes an experimental complex designed to study magnetorheological materials subjected to various loading conditions and placed in a magnetic field with the induction of up to 1.2 Tesla. The complex makes it possible to automate the process of obtaining experimental data. The results of tensile tests performed at a constant tension rate and the results of stress relaxation tests, including an assessment of the control action of the magnetic field, are presented.

Keywords: magnetorheological materials; magnetically controlled materials; magnetic field; magnetostriction.

УДК 577.35

РЕЖИМЫ СОБСТВЕННОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ФОКУСИРОВКИ ЭРИТРОЦИТОВ В ЛАМИНАРНЫХ ПОТОКАХ В УЗКИХ КАНАЛАХ

В.Л. Кононенко, Я.К. Шимкус

Институт биохимической физики им. Н.М. Эмануэля РАН, Москва

konon@sky.chph.ras.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Изложены результаты экспериментальных исследований и теоретического анализа поперечной гидродинамической фокусировки эритроцитов при ламинарном течении разбавленной суспензии клеток в узком канале. Ширина каналов плоского и круглого сечения составляла 40–500 мкм, скорость потока на оси 1– 10 см/с, число Рейнольдса для канала 0.5–50. Поперечные профили концентрации эритроцитов в потоке регистрировали методом интегральной доплеровской анемометрии. Зарегистрированы два режима фокусировки эритроцитов – внеосевой и аксиальный, показана возможность обратимого перехода между ними при изменении скорости потока. В пренебрежении диффузией построена феноменологическая теория гидродинамической фокусировки деформируемых частиц. Выполнен общий анализ картины поперечной фокусировки эритроцитов в зависимости от скорости потока, ширины канала, размера клетки и среднего по ее ориентациям в потоке индекса деформации. Показано, что при малых скоростях потока даже в сравнительно широких каналах происходит аксиальная фокусировка эритроцитов, что связано с их высокой деформируемостью. При скоростях выше некоторой критической аксиальная фокусировка сменяется внеосевой.

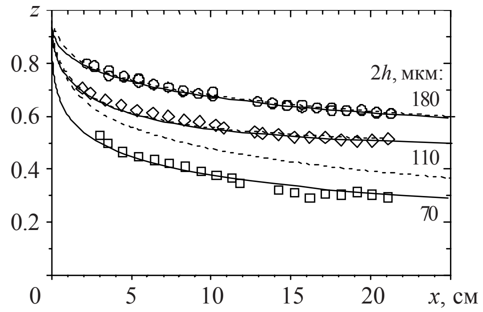
Ключевые слова: эритроцит, ламинарный поток в канале, гидродинамическая фокусировка.

Результаты измерений

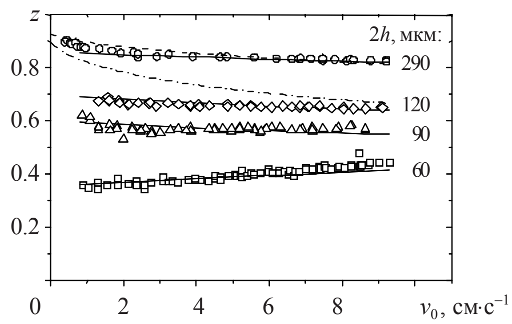
Сочетание несферичности и высокой деформируемости обусловливает очень сложный характер движения эритроцита даже в относительно простых, ламинарных, потоках [1, 2]. В разбавленной суспензии эритроциты совершают в среднем регулярное по времени перемещение как вместе с потоком жидкости, так и поперек потока, на которое накладываются хаотические перемещения и кувыркания [1]. В достаточно узких каналах поперечный дрейф эритроцитов может трансформировать первоначально однородный профиль их концентрации поперек канала в профиль с внеосевым максимумом [1, 3].

Исследованы закономерности внеосевой гидродинамической фокусировки эритроцитов в узких каналах, а также обнаруженной аксиальной фокусировки. Регистрация профилей поперечной концентрации частиц при ламинарном течении разбавленной суспензии выполнена методом интегральной доплеровской анемометрии [3]. Ширина $2h$ стеклянных каналов плоского и круглого сечения составляла 40–500 мкм, скорость потока на оси $v_0 = 1–10$ см·с$^{-1}$, концентрация эритроцитов в физиологическом растворе с фосфатным буфером при pH = 7.2 была порядка 10^5 см$^{-3}$. Число Рейнольдса для канала $R_c = 2v_0\rho h/\eta$, где ρ – плотность, η – вязкость жидкости, изменялось в пределах ~0.5÷50.

Измерениями установлено, что по мере удаления от входа в канал первоначально однородный профиль концентрации эритроцитов приобретает области обеднения возле стенок канала и пики на границах этих областей. Если значения v_0 достаточно велики, расстояние пика z от середины канала асимптотически приближается к некоторому значению $z_f^* > 0$ по мере роста расстояния вдоль канала. На рис. 1*а* показаны положения пика профиля концентрации эритроцитов в потоке в плоском канале шириной $2h$ при $v_0 = 8.7$ см·с$^{-1}$ (кружочки, ромбики) и $v_0 = 2$ см·с$^{-1}$ (квадратики). Это соответствует внеосевой фокусировке. Был обнаружен и исследован переход от внеосевой фокусировки эритроцитов к аксиальной, когда по мере удаления от входа в канал пики концентрации постепенно смещаются к середине канала. На рис. 1*б* приведены зависимости положения пика от скорости потока; расстояние от входа в канал: 6.2 см (кружочки), 3.2 см (ромбики, треугольники) и 6.3 см (квадратики). Сплошные линии – расчет, учитывающий аксиальный и внеосевой механизмы фокусировки, штриховые – только внеосевой. Переход к аксиальной фокусировке наблюдался при уменьшении отношения ширины канала к диаметру эритроцита до величин ~10 и понижении скорости потока. Регистрируемые режимы фокусировки имеют принципиально разную зависимость от скорости потока (рис. 1*б*). Два режима фокусировки наблюдались нами лишь для эритроцитов. Для суспензий недеформируемых латексных частиц в аналогичных условиях была зарегистрирована только внеосевая фокусировка.



а)



б)

Рис. 1

Обсуждение и выводы

В пренебрежении диффузией построена упрощенная теория гидродинамической фокусировки крупных деформируемых частиц. Поперечная гидродинамическая сила, действующая на такие частицы в канале, складывается из двух компонент. Первая обусловлена инерционными эффектами в жидкости и приводит к внеосевой фокусировке. Вторая возникает вследствие искажения линий тока жидкости вблизи деформируемой частицы и направлена к центру канала.

Для поперечной гидродинамической силы $F(z)$, действующей на эритроцит в пуазейлевском потоке в плоском канале, получено выражение:

$$F(z) = \frac{9\pi v_0^2 \rho a^2}{4(1-z_f^2)}\left(\frac{a}{h}\right)^2 z\left[z_f^2 - z^2 - \frac{z_b^2}{(1-|z|)^2}\right],$$

$$z_b^2 = \frac{32\langle D\rangle(1-z_f^2)f(\tilde{\eta})}{3\mathrm{R}_c}. \qquad (1)$$

Здесь $z_f \approx 0.5$ – точка обращения в ноль инерционной силы [1], R_c – число Рейнольдса для канала, $D = (a_\parallel - a_\perp)/(a_\parallel + a_\perp)$ – индекс деформации частицы радиуса a, $a_\parallel$ и $a_\perp$ – продольный и поперечный размеры деформированной частицы, $\langle D\rangle$ – среднее по ее ориентациям в потоке значение D. Функция $f(\tilde{\eta}) \sim 10$ слабо зависит от отношения $\tilde{\eta} = \eta_i/\eta$ вязкостей частицы и среды. Координата z выражена в единицах h.

Использование формулы (1) позволило количественно описать измеренные профили концентрации и положение пика в зависимости от расстояния вдоль канала и скорости потока (см. рис. 1). При этом получены следующие значения параметров: $z_f^* = 0.47$, $\langle D\rangle = 1.9\cdot10^{-3}$ при $2h = 180$ мкм, $z_f^* = 0.48$, $\langle D\rangle = 7.4\cdot10^{-4}$ при $2h = 110$ мкм, и $z_f^* = 0.20$, $\langle D\rangle = 2.7\cdot10^{-3}$ при $2h = 70$ мкм. Полученные значения $\langle D\rangle$ соответствуют практически сферической средней по ориентациям форме эритроцитов, т.е., хаотическому кувырканию клеток в потоке. Этот результат согласуется с данными оптической регистрации среднего по ориентациям индекса деформации эритроцитов в сдвиговом потоке, согласно которым $\langle D\rangle \approx 0$ при $\eta \sim 1$ сП [4].

Формула (1) позволяет выполнить общий анализ картины фокусировки эритроцитов в зависимости от определяющих параметров v_0, h, a и $\langle D\rangle$. Координата z_f^* плоскости фокусировки определяется условием $F(z_f^*) = 0$, приводящим к простому уравнению $(z_f^2 - z_f^{*2})(1 - |z_f^*|)^2 - z_b^2 = 0$. На его основе рассчитаны положения плоскостей фокусировки эритроцитов в зависимости от скорости потока для плоских каналов разной ширины (рис. 2).

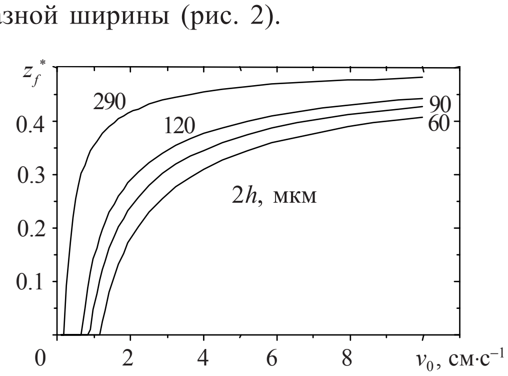


Рис. 2

Полученные зависимости $z_f^*(v_0)$ описывают переход от аксиальной фокусировки к внеосевой. При малых скоростях потока даже в сравнительно широких каналах, например, при $2h = 290$ мкм, $a/h = 0.023$, происходит аксиальная фокусировка эритроцитов. При скоростях выше некоторой критической она сменяется внеосевой фокусировкой. С увеличением v_0 координата фокуса z_f^* очень резко возрастает от нуля и приближается к z_f тем быстрее, чем больше ширина канала (см. рис. 2). Критическое значение скорости, точнее, числа Рейнольдса для канала, определяется условием $z_b = z_f$ в уравнении $F(z_f^*) = 0$:

$$(\mathrm{R}_c)_{\text{trans}} = \frac{32\langle D\rangle(1-z_f^2)f(\tilde{\eta})}{3z_f^2}. \qquad (2)$$

Полученные результаты являются основой для анализа течений суспензий эритроцитов в каналах лабораторных установок, а также приборов проточного фракционирования и гемореологической диагностики.

Список литературы

1. Левтов В.А., Регирер С.А., Шадрина Н.Х. Реология крови. М.: Медицина, 1982.
2. Fung Y.C. Biomechanics: Circulation / 2nd Ed. New York: Springer, 1997.
3. Kononenko V.L. // Proceedings of SPIE. 1993. V. 2052. P. 605–612.
4. Pfafferott C., Nash G.B., Meiselman H.J. // Biophysical Journal. 1985. V. 47, No 5. P. 695–704.

REGIMES OF INTRINSIC HYDRODYNAMIC FOCUSING OF ERYTHROCYTES IN LAMINAR FLOWS IN NARROW CHANNELS

V.L. Kononenko, Ya.K. Shimkus

Experimental results and theoretical analysis are presented concerning transverse hydrodynamic focusing of erythrocytes in a narrow channel flow of diluted suspension of cells. The characteristic width of plane and round channels was 40–500 microns, flow velocity at the channel axis was 1–10 cm/s, channel Reynolds number was 0.5–50. Transverse profiles of erythrocytes concentration in a flow were registered using integral Doppler anemometry. Two patterns of focusing the erythrocytes were observed, namely, non-central and axial focusing. A reversible transition between these two focusing regimes was possible under variation of flow velocity. A phenomenological theory of hydrodynamic focusing of deformable particles was developed neglecting particles diffusion. A general-type analysis of transverse focusing of erythrocytes was done in connection with the flow velocity, channel width, cell size, and erythrocyte deformability index averaged over cell orientations in a flow. It is shown that under small flow velocities the axial focusing of erythrocytes occurs even in comparatively wide channels, which is associated with high deformability of erythrocytes. Under flow velocities exceeding some critical value, the axial focusing regime changes for the noncentral one.

Keywords: erythrocyte, laminar channel flow, hydrodynamic focusing.

УДК 539.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ И ПОКРЫТИЙ МЕТОДОМ НАНОИНДЕНТИРОВАНИЯ: ПРОБЛЕМЫ, ДОСТИЖЕНИЯ, ПЕРСПЕКТИВЫ

Ю.В. Корнев, О.В. Бойко

Институт прикладной механики РАН, Москва

yurikornev@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Представлен обзор возможностей нового метода определения механических свойств материалов в наномасштабе – наноиндентирование. Показан принцип метода, методика проведения эксперимента, обработки экспериментальных данных. Приведены наиболее интересные результаты исследования механических свойств различных материалов данным методом, а также экспериментальные данные, полученные авторами при исследовании особенностей механического поведения эластомерных композитов.

Ключевые слова: наноиндентирование, механические характеристики в наномасштабе, модуль упругости, эластомерные композиты.

Описание физико-механических характеристик материалов в наношкале позволяет изучать закономерности поведения их приповерхностных слоев и субмикронных объемов, кластеров. Это особенно актуально в свете развития нанотехнологий и, как следствие, непрерывного уменьшения размеров микромеханических и электронных компонентов, пленочных покрытий и т.д. Основным методом, позволяющим определять физико-механические характеристики различных материалов и покрытий в наношкале, в настоящее время является наноиндентирование, с помощью которого можно получать до двух десятков разнообразных механических характеристик материала [1, 2].

Одним из приборов, позволяющих определять методом наноиндентирования механические свойства широкого спектра материалов на наноуровне, является измерительный комплекс NanoTest 600 (Micro Materials Ltd., Англия). Измерительный комплекс NanoTest 600 имеет теоретическое разрешение по деформации 0.001 нм и позволяет определять на образцах и покрытиях толщиной от 20 нм следующие характеристики: твердость и модуль Юнга в зависимости от деформации, адгезию тонких пленок, скретч-тест и износостойкость поверхности и др.

Суть метода заключается во внедрении геометрически и физически аттестованной пирамиды (пирамида Берковича с углом при вершине 65.3° и радиусом закругления 200 нм) в материал и определении с высокой точностью зависимости нагрузка – деформация (глубина индентирования). На рис. 1 приведена схема индентирования, где h_{total} – максимальная глубина индентирования (h_{max}); $h_{plastic}$ – пластическая деформация (h_c); h_{final} – необратимая деформация; P – нагрузка. При расчете приведенного модуля применяется модель Оливера – Фарра [3], в соответствии с которой описывается часть зависимости нагрузка–глубина индентирования на цикле разгрузки.

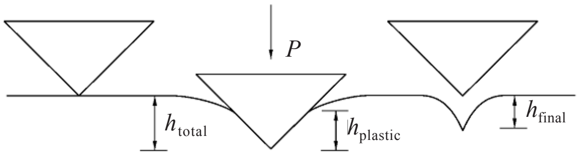


Рис. 1

Пластическая деформация h_c определяется из уравнения:

$$h_c = h_{max} - \varepsilon(CP_{max}), \quad (1)$$

где C – податливость контакта (эквивалентна тангенсу угла наклона кривой разгрузки при максимальной нагрузке). Значение ε зависит от геометрии индентора, для индентора Берковича ε = 0.75, P_{max} – максимальная нагрузка.

Функция зависимости площади контакта от глубины погружения $A(h_c)$ определяется при калибровке прибора на специальном калибровочном образце – кварце.

Для вычисления модуля упругости (модуля Юнга) образца обрабатывается часть кривой при разгрузке в соответствии с соотношением:

$$C = \frac{dh}{dP} = \frac{\pi^{0.5}}{2E_r A^{0.5}}, \quad (2)$$

где C – податливость контакта, E_r – приведенный модуль, который связан с модулем упругости соотношением

$$\frac{1}{E_r} = \frac{1-\nu_s^2}{E_s} + \frac{1-\nu_i^2}{E_i}, \quad (3)$$

ν_s – коэффициент Пуассона образца, ν_i – коэффициент Пуассона индентора ($\nu_i = 0.07$ [3]), E_s – модуль упругости образца, E_i – модуль упругости индентора (E_i = 1141 ГПа [3]). Таким образом, зная значение E_r – приведенного модуля, – которое прибор определяет из соотношения (3) при обработке экспериментальных данных, можно рассчитать модуль упругости образца или пленки на поверхности образца [4].

Метод наноиндентирования хорошо себя зарекомендовал при исследовании твердых однородных тел (кварц, металлы и т.д.) и покрытий [2]. Разработаны и приняты международные стандарты по определению механических свойств металлических материалов методом наноиндентирования (например, ISO 14577). При этом отмечается ряд факторов, которые существенно влияют на результаты механических испытаний данным методом: шероховатость поверхности, температурный дрейф, неидеальная геометрия индентора, особенности структуры материала и др. Также разработаны методики обработки данных и подготовки образцов, в которых учитываются данные факторы [2, 3].

Учет особенностей структуры материала и свойств поверхности особенно актуален при определении механических свойств структурно-сложных композиционных сред на основе полимеров, изделия из которых все шире применяются в промышленности. В [5, 6] отмечается необходимость корректировки существующей модели Оливера–Фарра при испытании некоторых полимерных образцов (на основе полистирола) – пластиков.

Исследование механических свойств дисперсно-наполненных эластомерных композитов методом наноиндентирования показывает их сильную зависимость (например, модуля упругости E) от глубины наноиндентирования h (или пластической деформации $h_{пл}$), т.е., своего рода масштабный эффект [7]. Как известно, из литературы (см., например, [8]), масштабные эффекты достаточно часто проявляются при исследовании механических свойств различных материалов. Примером тому может служить, в частности, зависимость напряжения разрушения от размера зерна для металлов (формула Холла–Петча) или эффективной степени наполнения от размера частиц наполнителя в случае полимерных композитов. В работе [9] рассматриваются возможные физические причины проявления масштабного эффекта в подобных материалах в процессе испытаний методом наноиндентирования.Таким образом, эксперименты по наноиндентированию дают возможность изучать связь между структурой и механическими свойствами широкого спектра материалов на наноуровне, в том числе, и композиционных. Данные исследования важны при создании материалов и покрытий с заданным комплексом свойств.

Список литературы

1. Головин Ю.И. // Физика твердого тела. 2008. Т. 50, №12. С. 2113–2142.

2. Fisher-Cripps A.C. Nanoindentation. New York: Springer-Verlag, 2002. 197 p.

3. Oliver W.C., Pharr G. M. // Journal of Materials Research. 1992. V. 7, №6. P. 1564–1583.

4. Шугуров А.Н., Панин А. В., Оскомов К.В. // Физика твердого тела. 2008. Т. 50, вып. 6. С. 1007–1012.

5. Tranchida D., Piccarolo S., Loos J., Alexeev A. // Applied physics letters. 2006. V. 89, is. 17. A. 171905.

6. Tranchida D., Piccarolo S., Loos J., Alexeev A. // Macromolecules. 2007. Vol. 40, №4. P. 1259–1267.

7. Корнев Ю.В., Яновский Ю.Г., Бойко О.В. // Сб. тез. докл. Второго междунар. конкурса науч. работ молодых ученых в области нанотехнологий в рамках Междунар. форума по нанотехнологиям Rusnanotech 09. Москва, 6–8 октября, 2009 г. М. 2009. С. 146–148.

8. Микклинток Ф., Аргон А. Деформация и разрушение металлов. М.: Мир, 1970. 443 с.

9. Яновский Ю.Г. и др. // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16, №2. С. 291–304.

DETERMINATION OF MECHANICAL PROPERTIES OF MATERIALS AND COATINGS BY NANOINDENTATION: PROBLEMS, PROGRESS, PROSPECTS

Yu.V. Kornev, O.V. Boiko

A new method of determining mechanical properties of materials on the nanoscale, called nanoindentation, is reviewed. The principle of the experimental part of nanoindentation and mathematical method of data processing is shown. The most interesting results of the investigation of mechanical properties of different materials by nanoindentation, and also experimental results obtained by the authors for elastomer composite materials are presented.

Keywords: nanoindentation, mechanical properties in nanoscale, elasticity modulus, elastomer composites.

Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (2), с. 475–477

УДК 531.7:612.833

ОСОБЕННОСТИ ЧАСТОТНОГО АНАЛИЗА ПОКАЗАНИЙ СИЛОМОМЕНТНЫХ ДАТЧИКОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПОСТУРАЛЬНЫХ МИКРОДВИЖЕНИЙ ЧЕЛОВЕКА

П.А. Кручинин[1,3], *Н.В. Холмогорова*[2,3], *В.Ю. Шлыков*[3]

[1]Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова
[2]Московский государственный педагогический университет
[3]Московский городской психолого-педагогический университет

pkruch60@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Известно, что силомоментные датчики используют для оценки функционального состояния, анализа неврологических и ортопедических патологий человека. Сигнал, измеренный силомоментным датчиком, взаимодействующим с телом человека, является интегративным. Он включает механические составляющие, обусловленные системой управления движением, а также дыханием, кардиоритмом и т.п., что находит свое отражение в его частотном спектре. Обсуждается задача выделения в спектре составляющих постуральных микродвижений человека, вызванных напряжением определенной группы мышц.

Ключевые слова: постуральные микродвижения человека, частотный спектр, силомоментный датчик.

Обсуждаются проблемы обработки показаний аппаратно-программного комплекса (АПК) «Многофункциональное кресло», разработанного при сотрудничестве МГППУ (г. Москва) и ОКБ Ритм (г. Таганрог). Экспериментальный образец АПК, включает специальное кресло, очувствленное семью силомоментными платформами, установленными на основных поверхностях, с которыми контактирует человек, а также дополнительные физиологические каналы, обеспечивающие регистрацию вегетативных показателей, таких как КГР, частота дыхания, кардиоритм и т.д. Измеренный силомоментным датчиком сигнал по своей природе является интегративным и включает механические составляющие, обусловленные вегетативными составляющими (дыхание, кардиоритм) и составляющими, обусловленными системой управления движением, что находит отражение в его частотном спектре. Цель настоящего исследования – обсуждение возможностей выделения «мышечных» составляющих колебаний и анализа проявлений тремора.

Экспериментальные исследования на АПК «Многофункциональное кресло» проводились в Московском городском психолого-педагогическом университете. В ходе эксперимента испытуемый сидел неподвижно в кресле в позе, изображенной на фотографии (рис.1). Статическая работа, совершаемая испытуемым, заключалась в удержании грузов различной массы в правой руке, опирающейся локтем на неподвижную опору – подлокотник с вмонтированным трехкомпонентным силомоментным датчиком. Груз удерживался в руке 2–3 мин до начала развития утомления. Проводились измерения до, во время и после выполнения статической работы. В исследовании приняло участие 20 человек. Произведено 48 записей с грузами, массы которых варьировались от 1 до 5.5 кг с шагом 0.5 кг.

Рис. 1

Основным методом обработки показаний датчиков многокомпонентного кресла явился спектральный анализ с использованием непараметрического метода Велча. Для вычислений выбирались интервалы времени, протяженность которых превышала 60 с при частоте опроса датчиков 50 Гц.

Результаты анализа сигналов датчиков многокомпонентного кресла и дополнительных физиологических каналов (ЭКГ и дыхания) позволили выделить в спектре сигналов силомоментных датчиков составляющие, порожденные дыханием и сокращениями сердца. Они имели многочастотный характер и включали значительные составляющие, кратные частотам дыхания и сердечных сокращений. Это объясняется тем, что у здорового человека характер дыхательных движений и микродвижений, вызванных сердечными сокращениями, является почти периодическим, но не является синусоидальным. Этот эффект хорошо виден на участках сагиттальной спектральной характеристики правого подлокотника, приведенных на рис. 2 (груз в правой руке – сплошная линия, до нагрузки – штриховая, после нагрузки – штрихпунктирная).

Частота пульса испытуемого, зафиксированная датчиком частоты сердечных сокращений, составила 1.3 Гц. Вследствие вышеописанного эффекта на приведенных спектральных характеристиках наблюдаются максимумы в окрестностях частот 1.3; 2.6; 3.9 Гц. Соответствующий эффект имеет место и при обработке показаний других измерительных систем: показаний датчика дыхания ДДПТ-1, оценки координат маркера системы видеоанализа DTrack2 Trackpack, закрепленного на груди испытуемого.

Анализ сигналов АПК «Многофункциональное кресло» и исключение характерных составляющих дыхательного и сердечного ритмов позволяют выделить составляющие колебаний, вызванные напряжением мышц руки при удержании груза. На рис. 2 соответствующий экстремум достигается при частоте 3.4 Гц.

ется упругим элементом. Соответствующее приближение для 3 испытуемых, основанное на математическом моделировании задачи, отображено на рис. 3 кривыми.

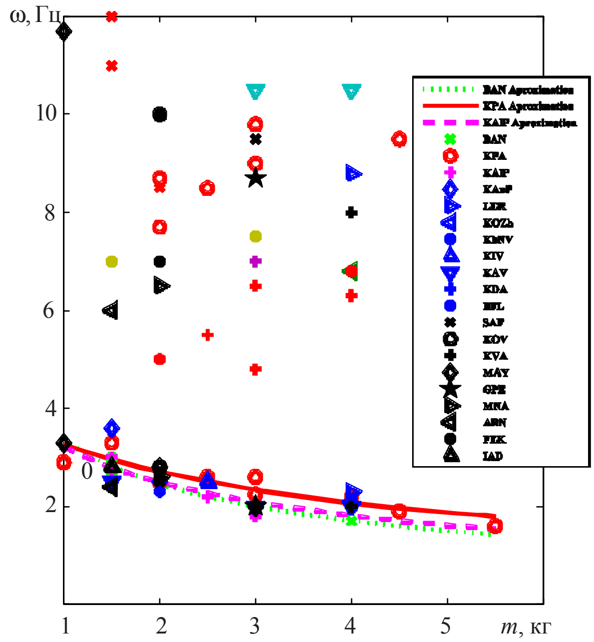


Рис. 3

Ко второй группе отнесены составляющие колебаний, частоты которых лежат в диапазоне 5–12 Гц. Эти колебания проявляются не у всех ис-

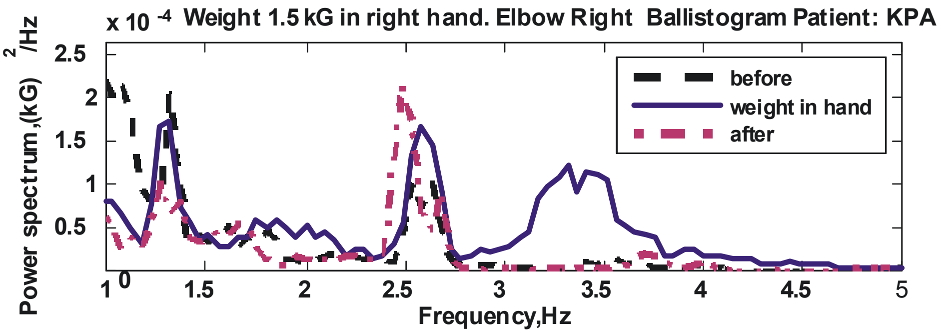


Рис. 2

пытуемых. Их интенсивность нарастает со временем по мере накопления усталости.

На рис. 3 представлено отображение результатов на плоскости параметров «масса груза – частота колебаний». Различными символами изображены точки, соответствующие различным испытуемым.

Обнаруженные частоты разделены на 2 группы. К первой группе отнесены «низкие» частоты колебаний в диапазоне 1.5–4 Гц. Эти колебания проявляются практически сразу после получения груза испытуемым. Частоты этих колебаний ω существенно зависят от массы груза m. Поэтому такие колебания ассоциируются с «механическими» колебаниями, при которых мышца моделиру-

Следует отметить, что в ряде случаев, эти колебания отмечены не только на датчике правого подлокотника, но также и на других датчиках. У некоторых испытуемых «высокочастотные» колебания при нагружении проявлялись на датчиках, удаленных от места нагружения, например на левом подлокотнике, на сидении и т.д., в то время как на правом подлокотнике колебания с этими частотами не наблюдались.

Таким образом, частотный анализ сигналов силомоментных датчиков, взаимодействующих с телом человека, позволяет выделить постуральные микродвижения, обусловленные как вегетативными составляющими (дыханием, кардиоритмом), так и системой управления движением, играющей важную роль в реализации усиленного физиологического тремора.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00809).

CHARACTERISTICS OF FREQUENCY ANALYSIS OF THE DATA FROM FORCE/TORQUE SENSORS FOR POSTURAL HUMAN MICROMOTIONS INVESTIGATION

P.A. Kruchinin, N.V. Holmogorova, V.Yu. Shlykov

Force/torque sensors are used for an estimation of human functional condition, analysis of neurologic and orthopedic pathologies. The signal measured by the force/torque sensor, contacting with a human body, has an integrative character. It includes the mechanical components caused by a motion control system, and also, respiration, cardiac rhythm, etc. This effect is observed in the frequency content of sensors. The problem of spectral components separation caused by activity of congenerous muscles during human postural micromovements is considered.

Keywords: human postural micromovements, frequency analysis, force/torque sensors.

УДК 620.22-022.532-0323:001.891.573

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК И ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК

***Г.Н. Кувыркин*[1], *Н.Н. Головин*[2]**

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва
[2]Московский институт теплотехники

fn2@bmstu.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Изложены основные принципы построения усовершенствованных структурных моделей одностенной и многостенной углеродных нанотрубок. Особенности этих моделей учтены при выводе системы уравнений, описывающих с позиций механики сплошной среды термодеформирование как самих углеродных нанотрубок, так и созданных на их основе композитов. Для учета деформации межатомных связей в структуре углеродной нанотрубки использован гармонический потенциал, который по своей физической природе соответствует потенциальной энергии упругой связи, соединяющей пару взаимодействующих атомов. Такой подход позволил в произвольно выбранной графитовой плоскости углеродной нанотрубки построить балочную модель и с помощью математического моделирования различных вариантов ее нагружения определить эффективные характеристики.

Ключевые слова: углеродные нанотрубки, композиты, математическое моделирование, термодеформирование, межатомная связь, балочная модель, эффективные характеристики.

Полная потенциальная энергия молекулярной системы, какой является произвольная графитовая плоскость углеродной нанотрубки (УНТ), может быть описана следующим выражением [1, 2]:

$$U=\sum 1/2\,K_r(r-r_0)^2+\sum 1/2\,K_\theta(\theta-2\pi/3)^2+ \\ +\sum 1/2\,K_\phi(\phi)^2+\sum U_{VDW}, \qquad (1)$$

где r и θ – линейное и угловое расстояние между соседними атомами углеродной плоскости УНТ после деформации; ϕ – угол закрутки связи между соседними атомами; r_0 – линейное расстояние между соседними атомами углерода в недеформированном состоянии УНТ, K_r – жесткость связи между соседними атомами при растяжении (сжатии); K_θ – изгибная жесткость связи между соседними атомами; K_ϕ – жесткость связи между соседними атомами при кручении; U_{VDW} – энергия нековалентных взаимодействий противолежащих атомов углеродного шестигранника. Так как силы Ван-дер-Ваальса примерно в 30 раз меньше, чем усилия ковалентных связей [2], $U_{VDW}\approx 0$.

Жесткостные характеристики углеродных связей – это известные параметры силового поля [3–5]:

$$K_r=6{,}52\cdot 10^{-7}\ \text{Н/нм}, \\ K_\theta=8{,}76\cdot 10^{-10}\ \text{Н}\cdot\text{нм/рад}^2, \qquad (2) \\ K_\phi=2{,}78\cdot 10^{-10}\ \text{Н}\cdot\text{нм/рад}^2.$$

Предположим, что соседние атомы углерода в структуре УНТ соединяются имеющими конечную жесткость мнимыми балками. Тогда справедливы следующие очевидные соотношения:

$$EA/L=K_r,\quad EI/L=K_\theta,\quad GJ/L=K_\phi, \qquad (3)$$

где L, A, I и J – соответственно длина, площадь, момент инерции при изгибе и полярный момент инерции поперечного сечения мнимой балки; E и G – модули упругости и сдвига материала мнимой балки. В случае если мнимая балка имеет поперечное сечение в виде круга диаметром d, то

$$A=\pi d^2/4,\quad I=\pi d^2/64,\quad J=\pi d^2/32. \qquad (4)$$

Используя соотношения (3) и (4), можно определить диаметр и характеристики материала мнимой балки, имитирующей связь атомов углерода в УНТ:

$$d=4\sqrt{K_\theta/K_r},\quad E=LK_r^2/(4\pi K_\theta), \\ G=LK_\phi K_r^2/(8\pi K_\theta^2). \qquad (5)$$

Полученные соотношения были использованы при создании континуально-дискретной структурной схемы УНТ, представляемой в виде совокупности балочных конечных элементов, соединяющих атомы – узлы и моделирующих ковалентные связи между атомами углерода. На рис. 1 представлены результаты численного моделирования методом конечных элементов [5] продольного растяжения и закручивания однослойной УНТ структуры armchair, содержащей 2030 атомов углерода и имеющей длину B = 24.841 нм; диаметр УНТ равен d_t = 0.678 нм, а числа хиральности $n = m = 5$. Эффективные модули упругости и сдвига УНТ определяются выражениями

$$E_{\text{УНТ}} = FB/(A_{\text{УНТ}}\Delta z), \quad G = MB/(\phi J_p), \quad (6)$$

где F – расчетное продольное усилие в УНТ, соответствующее заданному перемещению Δz = 5 нм, $F = 70.1\cdot10^{-9}$ Н; $A_{\text{УНТ}}$ – площадь поперечного сечения углеродной нанотрубки, $A_{\text{УНТ}} = \pi d_t h_{\text{УНТ}}$, причем эффективная толщина УНТ по данным работы [7] принята равной $h_{\text{УНТ}}$ = 0.075 нм; M – расчетный момент относительно продольной оси УНТ, соответствующий заданному повороту на угол ϕ = 0.295 рад, $M = 0.172\cdot10^{-9}$ Н·нм; J_p – полярный момент инерции УНТ, $J_p = \pi d_t^3 h_{\text{УНТ}}/4$.

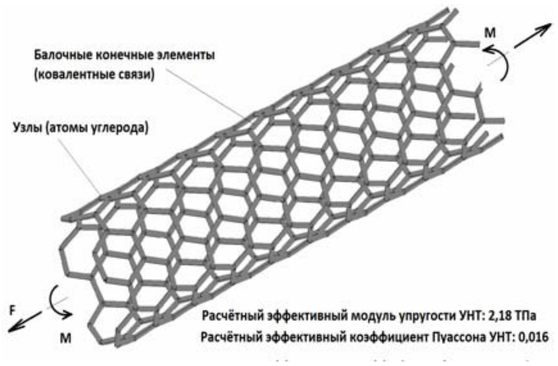


Рис. 1

На рис. 2 представлены результаты численного моделирования [5] изгиба двухслойной УНТ, на одном из торцов которой запрещены перемещения, а на другом задано поперечное усилие $F_{\text{поп}} = 0.8\cdot10^{-12}$ Н. Каждый слой трубки подобен рассмотренной УНТ и имеет ту же длину. При этом диаметр внутреннего слоя равен $d_t = 0.67$ нм, а внешнего – $D_t = 0.8136$ нм. Между слоями УНТ заданы условия контактного взаимодействия, включающие в себя условия взаимного непроникания и существования только сжимающих контактных усилий.

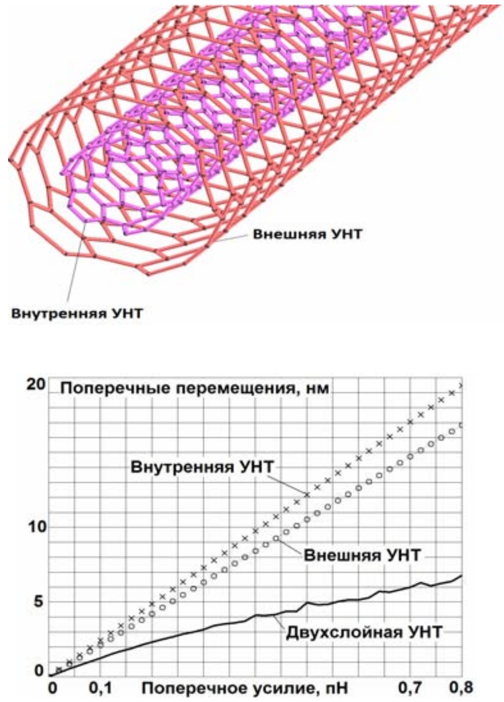


Рис. 2

Одновременно приводятся результаты численного моделирования поперечного изгиба внутреннего и внешнего слоев УНТ по отдельности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 09-08-00699а, и по программе Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-4046.2010.8.

Список литературы

1. Гольдштейн Р.В., Ченцов А.В. // Перспективные материалы и технологии: Нанокомпозиты. Т. 2. М.: Торус Пресс, 2005. С. 239–250.

2. Кормилицын О.П. Механика материалов и структур нано- и микротехники. М.: Академия, 2008. 224 с.

3. Brcic M. et al. // Estonian Journal of Engineering. 2009. V. 15, No 2. P. 77–86.

4. Avila A.F., Lacerda G.S.R. // Materials Research. 2008. V. 11, No 3. P. 325–333.

5. Li C., Chou T.W. // Nanomechanics of Materials and Structures, Amsterdam: Springer. 2006. P. 55–65.

6. Головин Н.Н., Кувыркин Г.Н. // VIII Всерос. съезд по теоретич. и прикл. механике. Пермь, 23-29 авг. 2001 г. С. 191.

7. Pantano A., Parks D.M., Boyce M.C. // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2004. V. 52. P. 789–821.

MATHEMATICALLY MODELING THE MECHANICAL CHARACTERISTICS AND INTERACTIONS OF CARBON NANOTUBES

G.N. Kyvirkin, N.N. Golovin

The basic principles of advanced structural models of single-walled and multiwalled carbon nanotubes are presented. The specific characteristics of these models are taken into account in deriving the system of equations describing in terms of continuum mechanics thermal deformation of both the carbon nanotubes and composites based on them. In order to take into account the deformation of atomic bonds in the structure of carbon nanotubes the harmonic potential is used, which corresponds to the physical nature of the elastic potential energy of the bond connecting a pair of interacting atoms. This approach made it possible to develop a beam model in an arbitrarily chosen plane of graphite carbon nanotube and to determine its effective characteristics using mathematical modeling of various ways of its loading.

Keywords: carbon nanotubes, composites, mathematical modeling, thermal deforming, atomic bond, beam model, the effective characteristics.

УДК 551.32:532.517.4

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ВИХРЕВОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ИМПУЛЬСА И ТЕПЛА В УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЯХ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

А.Ф. Курбацкий[1], **Л.И. Курбацкая**[2]

[1]Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск
[2]Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

kurbat@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Некоторые изменения турбулентного вихревого перемешивания в атмосферном пограничном слое (АПС) исследуются с привлечением мезомасштабной RANS-модели турбулентности. Поведение параметров турбулентного вихревого перемешивания найдено согласующимся с недавними данными измерений в лаборатории и атмосфере. В частности, потоковое число Ричардсона ($\mathrm{Ri_f}$) в переходный период течения к сильно устойчивому состоянию может вести себя немонотонно, возрастая с увеличением градиентного числа Ричардсона ($\mathrm{Ri_g}$) до состояния насыщения, при некотором значении градиентного числа Ричардсона ($\mathrm{Ri_g} = 1$) с последующим убыванием. Поведение вихревых коэффициентов диффузии импульса и тепла согласуется с представлением о поддержании переноса импульса (но не тепла!) распространяющимися внутренними волнами в сильно устойчивом состоянии АПС.

Ключевые слова: термически устойчивый атмосферный пограничный слой, потоковое число Ричардсона, вихревые коэффициенты диффузии импульса и тепла, моделирование.

Данные прямых измерений последних лет в атмосфере и водных средах обратной величины турбулентного числа Прандтля ($\mathrm{Pr_t^{-1}} \equiv K_h/K_m$; K_m и K_h – коэффициенты турбулентной вязкости и турбулентной температуропроводности, соответственно) показывают ясно выраженный спадающий тренд $\mathrm{Pr_t^{-1}}$ с ростом градиентного числа Ричардсона ($\mathrm{Ri_g} > 1$).

Для равновесной турбулентности фундаментальное уравнение баланса кинетической энергии турбулентности $(E = \overline{u_i u_i}/2)$ $K_m S^2 - K_h N^2 = \varepsilon$ (где S – вертикальный сдвиг скорости, N – частота Брента–Вяйсяля, ε – диссипация энергии турбулентности) вводит в рассмотрение единственный физически корректный критерий существования турбулентности устойчиво стратифицированного течения – потоковое число Ричардсона $\mathrm{Ri_f} - \mathrm{Ri_g Pr_t^{-1}}$. Поэтому потоковое число Ричардсона $\mathrm{Ri_f}$ является ключевым параметром моделирования геофизических течений в атмосфере и водных средах.

Поведение числа Прандтля и потокового числа Ричардсона с ростом устойчивости течения

Принимая во внимание зависимость турбулентного временного масштаба температурного поля от частоты Брента – Вяйсяля [1], можно сформулировать анизотропные алгебраические параметризации для коэффициентов турбулентного переноса импульса и тепла. Эти параметризации для устойчиво стратифицированных течений корректно учитывают анизотропию и воздействие внутренних волн на вертикальный перенос импульса в сильно устойчивых условиях стратифицированного течения жидкости (внутренние гравитационные волны могут переносить импульс, но не тепло [2]). Выражения для турбулентных потоков импульса и тепла можно найти в [2]. Зависимость $\mathrm{Pr_t^{-1}}(\mathrm{Ri_g})$, вычисленная в [2] для квазиустановившегося состояния устойчиво стратифицированного арктического пограничного слоя показана сплошной линией на рис. 1 вместе с данными измерений в атмосфере [3] (кружочки) и в устойчиво стратифицированном свободном сдвиговом слое течения жидкости [4] (квадратики) для сравнения. Рисунок 1 показывает, что без учета эффекта влияния внутренних гравитационных волн на вертикальный турбулентный перенос турбулентное число Прандтля остается практически постоянным с ростом термической устойчивости течения (штриховая линия).

На рис. 2 сплошными линиями нанесены зависимости $\mathrm{Ri_f}(\mathrm{Ri_g})$, вычисленные в устойчиво стратифицированном атмосферном пограничном слое с помощью трехпараметрической RANS-модели турбулентности и анизотропных выражений для турбулентных потоков импульса и тепла [2].

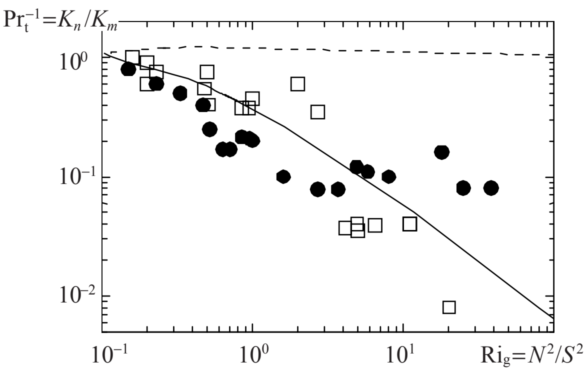


Рис. 1

Кроме трех наборов данных натурных измерений в атмосферном пограничном слое VTMX (треугольники) и TA-6 (крестики) и в лабораторном стратифицированном сдвиговом слое жидкости [4, 5] (квадратики), на рис. 2 представлены также упрощенные параметризации [6, 7] (штриховые и штрихпунктирные линии соответственно).

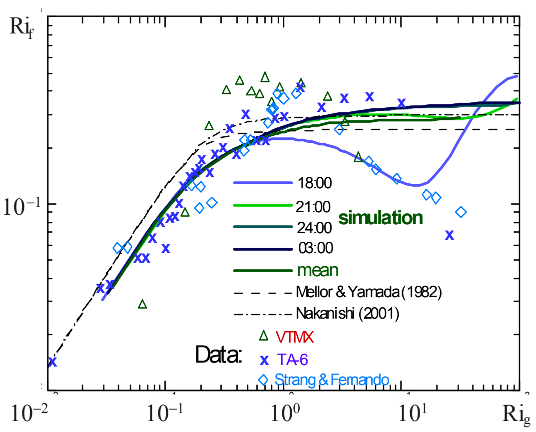


Рис. 2

Модель [2] с включением эффекта внутренних гравитационных волн на вертикальный перенос импульса воспроизводит режим возрастания потокового числа Ричардсона Ri_f с увеличением градиентного числа Ричардсона. В режиме перехода пограничного слоя к устойчивому состоянию фиксируется немонотонное поведение Ri_f (на рис.2 – линия, соответствующая 18:00). Однако, начиная с полуночи (24:00), «эффективность перемешивания» стремится к значению $\mathrm{Ri}_f \approx 0.35$. Немонотонная зависимость Ri_f–Ri_g в условиях сильной стратификации ($\mathrm{Ri}_g > 1$) зафиксирована, например, при DNS моделировании турбулентного струйного течения в тропопаузе (см. рис. 4*a* в [8]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №09-05-00004а) и СО РАН (ИП №23).

Список литературы

1. Weinstock J. A theory turbulence transport // Journal of Fluid Mechanics. 1989. V. 202. P. 319–338.
2. Курбацкий А.Ф., Курбацкая Л.И. О турбулентном числе Прандтля в устойчиво стратифицированном атмосферном пограничном слое // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46, №2. С. 40–49.
3. Monti P. et al. Observations of flow and turbulence in the nocturnal boundary layer over a slope // Journal of Atmospheric Sciences. 2002. V. 59, No 17. P. 2513–2534.
4. Strang E.J, Fernando H.J.S. Vertical mixing and transport through a stratified shear layer // Journal of Physical Oceanography. 2001. V. 31. P. 2006–2048.
5. Pardjak E.R., Monti P., Fernando H.J.S. Flux Richardson number measurements in stable atmospheric shear flows // J. Fluid Mech. 2002. V. 459. P. 307–316.
6. Mellor G.L., Yamada T. Development of a turbulent closure model for geophysical fluid problems // Rev. Geophysical. Space Phys. 1982. V. 20. P. 851–875.
7. Nakanishi M. Improvement of the Mellor-Yamada turbulence closure model based on large-eddy simulation data // Boundary-Layer Met. 2001. V. 99. P. 349–378.
8. Mahalov A. et al. Eddy mixing in jet-stream turbulence under stronger stratification // Geophys. Res. Lett. 2004. V. 31: L23111.

EFFICIENCY OF EDDY MIXING OF MOMENTUM AND HEAT IN STABLY STRATIFIED FLOWS OF ENVIRONMENT

A.F. Kurbatskiy, L.I. Kurbatskaya

Certain qualitative changes in turbulent eddy mixing in an atmospheric boundary layer (ABL) during transitional regimes towards stronger stratification are highlighted using numerical simulations with the mesoscale RANS turbulence model. The flux Richardson number Rif (or the mixing efficiency) in the stably stratified atmospheric boundary layer is investigated as a function of the gradient Richardson number Rig. In particular, the flux Richardson number can behave non-monotonic, which has increased with increasing of the gradient Richardson number, saturates and then decreases after a value of Rig around 1.0. Behavior of turbulent eddy mixing coefficients for momentum and heat in this study is consistent with the representation that the flow can sustain propagating internal waves that can effectively transport momentum, but not heat. This behavior is in good agreement with observational results for stably stratified nocturnal boundary layer flows.

Keywords: Thermal stable atmospheric boundary layer, flux Richardson number, eddy momentum and heat diffusivities, modeling.

УДК 551.515.2

СПИРАЛЬНЫЙ СЦЕНАРИЙ ТРОПИЧЕСКОГО ЦИКЛОГЕНЕЗА

Г.В. Левина[1,2], ***М.Т. Монтгомери***[3,4]

[1]Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь
[2]Институт космических исследований РАН, Москва
[3]Naval Postgraduate School, Monterey (CA, USA)
[4]NOAA-Hurricane Research Division, Miami (FL, USA)

levina@icmm.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Проведено исследование тропического циклогенеза с акцентом на спиральные свойства атмосферных движений разного масштаба, участвующих в образовании крупномасштабного вихря. На основе американских данных прямого численного моделирования атмосферных турбулентных движений (с шагами 2-3 км по горизонтали) рассчитаны и проанализированы спиральные и интегральные характеристики поля скорости. Практическая значимость полученных результатов связана с применением анализа спиральности для диагностики и прогноза зарождения тропических циклонов.

Ключевые слова: тропический циклогенез, трехмерное прямое численное моделирование атмосферных движений, анализ спиральности.

Самоорганизация вихревой конвекции при тропическом циклогенезе

Основным источником энергии для тропических циклонов (ТЦ) являются конвективные движения, осуществляющие перенос явного и скрытого тепла от подстилающей поверхности океана. В [1] был предложен новый сценарий формирования тропического циклона, основанный на самоорганизации конвективных процессов в тропической атмосфере при благоприятствующих циклогенезу кинематических и термодинамических условиях в окружающей среде, создаваемых слабым «затравочным» циклоническим вихрем в средней тропосфере. С использованием «почти облачно-разрешающего» численного моделирования (2–3 км по горизонтали) авторами [1] было показано, как образуется интенсивный сконцентрированный у поверхности мезомасштабный вихрь тропической депрессии (ТД) путем самоорганизации влажноконвективной вихревой атмосферной турбулентности. Согласно результатам моделирования в рассматриваемой области пространства основными конвективными структурами являлись восходящие конвективные струи, обладающие интенсивной вертикальной завихренностью в ядре (вращающиеся кучевые облака). В результате взаимодействия конвективных струй генерировались многочисленные мелкомасштабные (10–30 км) интенсивные циклонические вихревые трубки, которые в тропической метеорологии получили название вихревых горячих башен (например, в [1] – vortical hot towers), чтобы подчеркнуть вихревую природу этих когерентных структур. Такие структуры были локализованы в горизонтальных направлениях и имели характерное время жизни порядка одного часа. Вихревые горячие башни противостояли воздействию нисходящих потоков за счет подпитки конвективной доступной потенциальной энергией из окружающего пространства в местах их локализации. Они также увлажняли среднюю и верхнюю тропосферу. Наблюдавшееся укрупнение масштабов движений происходило путем слияния модельных вихревых структур – конвективных струй и горячих башен. Это создавало концентрацию абсолютного углового момента на масштабах циркуляции системы и усиливало крупномасштабную циркуляцию. Обнаруженный механизм увеличения размеров структур оказался способным привести к формированию мезомасштабного вихря тропической депрессии.

О спиральной природе тропического циклогенеза

В [2] впервые в мировой практике изучения тропических циклонов были выполнены расчеты и анализ спиральных характеристик поля скорости развивающегося ураганного вихря на основе данных [1], полученных при прямом численном моделировании влажно-конвективных атмосферных турбулентных движений, с помощью региональной численной модели атмосферы RAMS. Основным итогом исследований, проведенных в [2], стал вывод о возможном использовании интегральной спиральности вихревой системы в качестве индикатора крупномасштабной неустойчивости. Действительно, в отличие от кинетической энергии и энстрофии спиральность является знакопеременной величиной. И момент времени, когда интегральная спиральность становится существенно положительной и нарастающей, может быть сопоставлен с образованием вихря тропической депрессии.

В настоящем исследовании проводится сравнительный анализ эволюции интегральных характеристик (интегральных значений энстрофии, кинетической энергии и спиральности, нормированных на число узлов разностной сетки – рис. 1) для трех сценариев тропического циклогенеза, назовем их условно – «УСПЕШНЫЙ», «ПОГРАНИЧНЫЙ» и «НЕУСПЕШНЫЙ».

Результатом «УСПЕШНОГО» сценария является формирование ТД через 20–25 часов после начала численного эксперимента и вихря ураганной силы через 72 часа. В «ПОГРАНИЧНОМ» случае также происходит формирование ТД к концу первых суток, но дальнейшее усиление ТД не наблюдается, и ураган не возникает. В «НЕУСПЕШНОМ» сценарии имеет место некоторое усиление атмосферной конвекции в первые сутки эксперимента, однако не наблюдается каких-либо признаков ее самоорганизации, и ТД не формируется. На рис. 1 видно, что полная спиральность системы обнаруживает качественно различное поведение в изученных сценариях циклогенеза и имеет существенно отличающиеся значения.

Обсуждаются возможности для применения концепции спиральности при диагностике и оперативном прогнозе зарождения ТЦ, инициированные предварительным анализом наблюдений в ходе натурного эксперимента американских ученых в Карибском море – NSF-PREDICT 2010 (National Science Foundation-Pre-Depression Investigation of Cloud-systems in the Tropics) в августе-сентябре 2010 года.

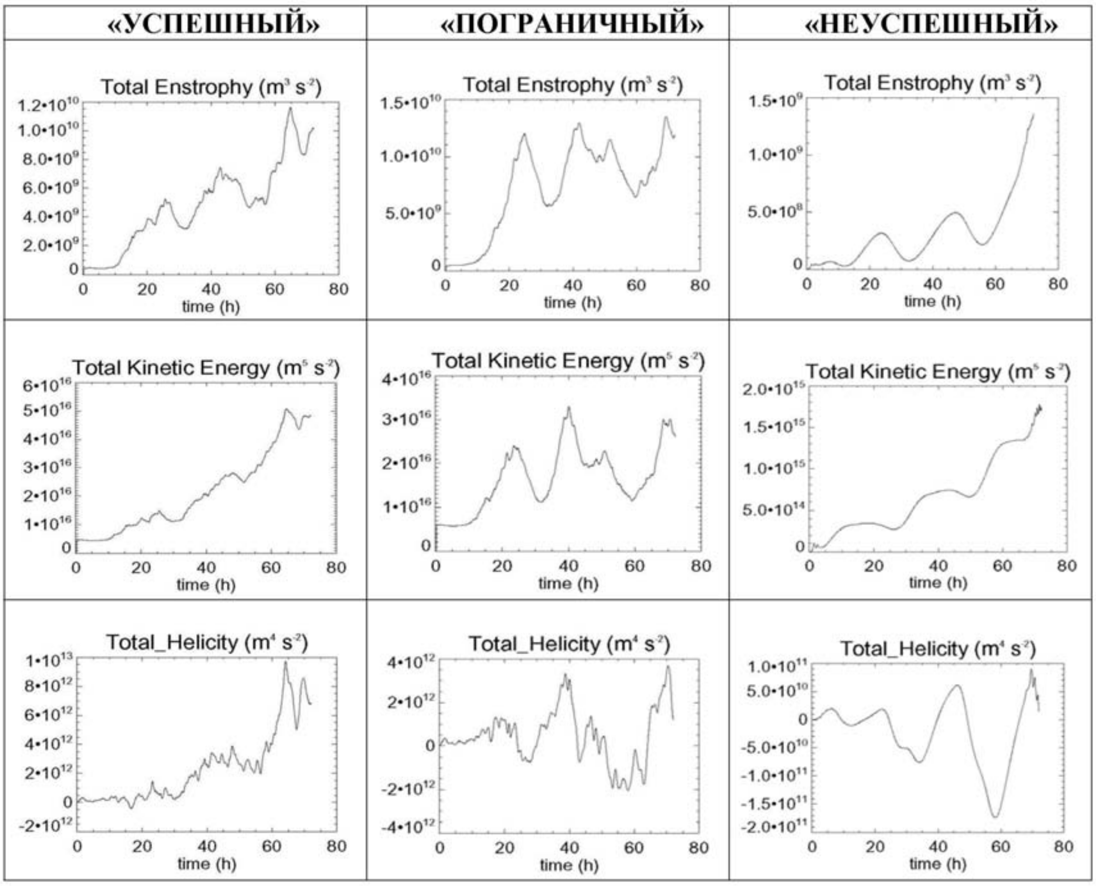


Рис. 1

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №10-05-00100), Национального научного фонда США по гранту ATM-0733380 и Международного научно-технического центра (проект №3726).

Список литературы

1. Montgomery M.T. et al. // J. Atmos. Sci. 2006. V. 63.
2. Левина Г.В., Монтгомери М.Т. // Докл. РАН. 2010. Т. 434, №3. С. 401–406.

A HELICAL SCENARIO OF TROPICAL CYCLOGENESIS

G.V. Levina, M.T. Montgomery

Tropical cyclogenesis is investigated with the emphasis on helical features of atmospheric flows of different scales which contribute into the formation of a large-scale vortex. Based on the American data on direct numerical simulation of atmospheric turbulent flows (with horizontal grid increments of 2-3 km), helical and integral characteristics of the velocity field have been calculated and analyzed. The practical significance of the obtained results is connected with using the helicity analysis for the diagnostics and forecasting of tropical cyclogenesis.

Keywords: tropical cyclogenesis, 3D direct numerical simulation of atmospheric flows, helicity analysis.

УДК 531.26:539.142.2

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ФИНИТНЫЕ ФУНКЦИИ И ТЕОРИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК В МОДЕЛИРОВАНИИ НАНООБЪЕКТОВ

В.Л. Леонтьев, И.С. Михайлов

Ульяновский госуниверситет

alex_lion@rambler.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

В математическом моделировании сил межатомного взаимодействия нанообъектов используются ортогональные функции с компактными носителями (ОФФ). Показывается, что скалярное произведение сеточных ОФФ является адекватной моделью силового взаимодействия атомов нанообъекта. Эта модель используется для модификации постановки задачи о напряженно-деформированном состоянии многослойного нанообъекта, основанной на классических уравнениях равновесия и состояния многослойной анизотропной оболочки.

Ключевые слова: ортогональные финитные функции, межатомное взаимодействие, многослойные анизотропные оболочки, моделирование нанообъектов.

Используется равномерная сетка $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$ с шагом h, и каждому узлу сетки ставится в соответствие сеточная функция вида [1]:

$$\varphi_i(x) = \varphi^{(1)}(x/h - i) =$$
$$= \begin{cases} (x - x_{i-1})/h, \\ x \in [x_{i-1}, x_{i-1} + h_1] \cup [x_{i-1} + h_2, x], \\ -\alpha + 2(\alpha h + h_1)(x_{i-1} + k_N - x)/(h(h_2 - h_1)), \\ x \in [x_{i-1} + h_1, x_{i-1} + k_N], \\ -\alpha + 2(\alpha h + h_2)\times \\ \times (x - x_{i-1} - k_N)/(h(h_2 - h_1)), \\ x \in [x_{i-1} + k_N, x_{i-1} + h_2], \\ (x_{i-1} - x)/h, \\ x \in [x_i, x_i + h_1] \cup [x_i + h_2, x_{i+1}], \\ \beta + 2(\beta h + h_1 - h)\times \\ \times (x - x_i - k_N)/(h(h_2 - h_1)), \\ x \in [x_i + h_1, x_i + k_N], \\ \beta + 2(\beta h + h_2 - h)\times \\ \times (x_i + k_N - x)/(h(h_2 - h_1)), \\ x \in [x_i + k_N, x_i + h_2], \\ 0, \quad x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases} \qquad (1)$$

где $k_N = (h_1 + h_2)/2$, $0 \le h_1 < h_2 \le h$. Аппроксимирующие свойства функций (1) описываются следующей теоремой [1].

Теорема. *Если* $u(x) \in W_2^1(R)$ *и* $h_1 + h_2 = h$, $\alpha = \beta - 1$, *то существует функция*

$$u^h = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i : \quad \left\| u - u^h \right\|_{W_2^0(R)} \le ch \left\| u \right\|_{W_2^1(R)},$$

$$\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|^2 \le c_1 \left\| u \right\|^2_{W_2^0(R)}, \qquad (2)$$

где α_i *– некоторые постоянные*; *постоянные* c, c_1 не зависят от u, h; W_2^n – функциональные пространства Соболева.

Если, например, $h_1 = 0$ и $h_2 = h$, то функции (1) будут ортогональными на данной сетке при выполнении интегрального условия $4\alpha\beta + \alpha - \beta = 0$ ортогональности функций $\varphi_i(x)$, которое совместно с условием $\alpha = \beta - 1$ дает значения $2\alpha = \sqrt{2} - 1$, $2\beta = \sqrt{2} + 1$. В случае $h_1 = 3h/8$, $h_2 = 5h/8$ функции (1) обладают аппроксимирующими свойствами (2) и являются ортогональными, если $2\alpha = 2\sqrt{2} - 1$, $2\beta = 2\sqrt{2} + 1$. Скалярное произведение двух соседних ОФФ $\varphi_i(x)$ и $\varphi_{i+1}(x)$ равно нулю, что соответствует равновесному положению атомов в нанообъекте. При смещении центра ОФФ $\varphi_{i+1}(x)$, соответствующего положению одного атома, в направлении центра ОФФ $\varphi_i(x)$, соответствующего положению другого атома, величина интеграла – скалярного произведения $\varphi_i(x)$ и $\varphi_{i+1}(x)$ – монотонно возрастает от нулевого значения до величины интеграла функции $(\varphi_i(x))^2$, взятого по области конечного носителя. При смещении центра ОФФ $\varphi_{i+1}(x)$ из равновесного положения в направлении от центра ОФФ $\varphi_i(x)$ величина интеграла – скалярного произведения $\varphi_i(x)$ и $\varphi_{i+1}(x)$ – принимает отрицательные значения, вначале возрастая по модулю, а затем уменьшаясь по модулю до нулевого значения. Такая зависимость величины интеграла – скалярного произведения $\varphi_i(x)$ и $\varphi_{i+1}(x)$ от параметра – расстояния между центрами ОФФ $\varphi_i(x)$ и $\varphi_{i+1}(x)$ – соответствует известной феноменологической зависимости силы межатомного взаимодействия от этого параметра. Поэтому такая функция параметра может быть использована для построения математических моделей нанообъектов, в которых каждому отдельному атому соответствует одна сеточная ОФФ.

Математическое моделирование многослойных нанообъектов проводится на основе теории многослойных анизотропных оболочек [2]. Уравнения равновесия оболочки

$$\frac{\partial(BT_1)}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}T_2+\frac{\partial(AS_{21})}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}S_{12}+$$

$$+ABk_1N_1=-ABX,$$

$$\frac{\partial(AT_2)}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}T_1+\frac{\partial(BS_{12})}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}S_{21}+$$

$$+ABk_2N_2=-ABY,$$

$$-(k_1T_1+k_2T_2)+\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial(BN_1)}{\partial\alpha}+\frac{\partial(AN_2)}{\partial\beta}\right)=-Z,$$

$$\frac{\partial(BM_1)}{\partial\alpha}+\frac{\partial(AM_{21})}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}M_{12}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}M_2=ABN_1,$$

$$\frac{\partial(AM_2)}{\partial\beta}+\frac{\partial(BM_{12})}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}M_{21}-\frac{\partial A}{\partial\beta}M_1=ABN_2,$$

$$S_{12}-S_{21}+\frac{M_{12}}{R_1}-\frac{M_{21}}{R_2}=0$$

и соотношения упругости

$$T_1=C_{11}\varepsilon_1+C_{12}\varepsilon_2+K_{11}\chi_1+K_{12}\chi_2,$$

$$T_2=C_{22}\varepsilon_2+C_{12}\varepsilon_1+K_{22}\chi_2+K_{12}\chi_1,$$

$$S=S_{12}=S_{21}=C_{66}\omega+K_{66}\tau,$$

$$M=M_{12}=M_{21}=D_{66}\tau+K_{66}\omega,$$

$$M_1=D_{11}\chi_1+D_{12}\chi_2+K_{11}\varepsilon_1+K_{12}\varepsilon_2,$$

$$M_2=D_{22}\chi_2+D_{12}\varepsilon\chi_1+K_{22}\varepsilon_2+K_{12}\varepsilon_1$$

позволяют учесть наличие многих слоев, например, в нанотрубке и то, что нанотрубка является анизотропным объектом, обладающим различными свойствами упругости в различных направлениях соприкасающейся плоскости. Здесь T_i, S_{ij}, N_i – внутренние силы; M_i, M_{ij} – изгибающие и крутящие моменты; ε_i, χ_i, ω, τ – деформации; C_{ij}, K_{ij}, D_{ij} – коэффициенты жесткости [2], учитывающие многослойность и свойства анизотропии оболочки A, B – коэффициенты Ламе криволинейной системы координат на срединной поверхности оболочки; X, Y, Z – компоненты вектора внешней нагрузки; k_1, k_2 – главные кривизны; R_1, R_2 – радиусы линий главных кривизн срединной поверхности оболочки. Теория многослойных анизотропных оболочек применяется в случаях, в которых изгибающие и крутящий моменты учитываются (для значительного числа слоев), а также в частном случае безмоментного напряженного состояния (для малого числа слоев). Модификация определяется учетом в членах этих уравнений сил взаимодействия атомов соседних слоев нанообъекта, связанным с предложенным здесь моделированием таких сил с помощью ортогональных финитных функций.

Список литературы

1. Леонтьев В.Л. Ортогональные финитные функции и численные методы. Ульяновск: УлГУ, 2003. 178 с.

2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: ГИФМЛ, 1961. 384 с.

ORTHOGONAL FINITE FUNCTIONS AND THE THEORY OF MULTILAYERED ANISOTROPIC SHELLS FOR MODELING NANOOBJECTS

V.L. Leontiev, I. S. Mihailov

Orthogonal compactly supported functions have been used for mathematically modeling an atomic interaction in nanoobjects. The theory of multilayered anisotropic shells has been used for investigating deformation of nanoobject.

Keywords: orthogonal finite functions, atomic interaction, multilayered anisotropic shells, modeling of nanoobjects.

УДК 539.22, 539.32

КУБИЧЕСКИЕ КРИСТАЛЛЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПУАССОНА (КУБИЧЕСКИЕ АУКСЕТИКИ)

Д.С. Лисовенко, В.А. Городцов

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

lisovenk@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

На основе экспериментальных данных для коэффициентов упругости кубических кристаллов, собранных в справочном издании Ландолт – Бернштайна, выявлено более ста кристаллов, обнаруживающих отрицательный коэффициент Пуассона (ауксетиков). Исследован характер однопараметрического изменения вида поверхностей в пространстве углов ориентации кристаллов, отделяющих области с отрицательными и положительными значениями коэффициентов Пуассона.

Ключевые слова: кубические кристаллы, анизотропная упругость, коэффициент Пуассона, отрицательный коэффициент Пуассона, ауксетики, кубические ауксетики.

В то время как изотропные упругие среды при малых деформациях характеризуются парой постоянных упругих коэффициентов, в анизотропных кристаллах их больше и упругие свойства становятся зависящими от направления деформирования. При этом такая «техническая» характеристика, как коэффициент Пуассона, может становиться отрицательной при деформировании некоторых кристаллов в определенных направлениях.

Упругость кубических кристаллов можно характеризовать тремя матричными коэффициентами податливости s_{11}, s_{12}, s_{44}, и при описании ориентации растягиваемого кристаллического стержня в кристаллографической системе координат тремя углами Эйлера φ, θ, ψ для отношения коэффициента Пуассона ν к модулю Юнга E можно записать:

$$-\frac{\nu}{E} = s_{12} + \frac{\Delta}{2} f(\varphi,\theta,\psi),$$

$$f = \frac{3}{4}\sin^2 2\theta \cos^2 \psi +$$

$$+\left(\sin 2\varphi \sin\theta \sin\psi - \frac{1}{4}\cos 2\varphi \sin 2\theta \cos\psi\right)^2,$$

$$2\Delta \equiv 2s_{11} - 2s_{12} - s_{44}, \quad 0 \le f(\varphi,\theta,\psi) \le 1.$$

Полученное отношение зависит лишь от коэффициента s_{12} и одной комбинации трех коэффициентов податливости Δ.

Если кубический кристалл при одних углах ориентации проявляет ауксетичность (отрицательность коэффициента Пуассона) и не проявляет при других, т.е. не является «абсолютным ауксетиком», то уравнение поверхности $\nu(\varphi, \theta, \psi) = 0$, разделяющей эти области, запишется в виде

$$f(\varphi,\theta,\psi) = p \equiv -\frac{2s_{12}}{\Delta}.$$

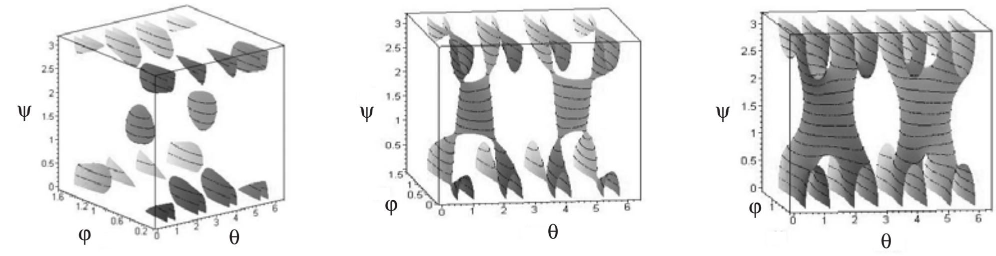
В это уравнение входит лишь один безразмерный параметр p, скомбинированный из трех коэффициентов податливости, причем оно может иметь решение в силу предыдущего только при $0 \le p \le 1$. Неотрицательность этого параметра указывает на противоположность знаков размерных упругих характеристик s_{12} и Δ для неабсолютных ауксетиков.

Анализ экспериментальных данных, сведенных в [1], позволил выявить более ста неабсолютных кубических ауксетиков. Найдено, что разделительная поверхность $\nu(\varphi, \theta, \psi) = 0$ имеет довольно сложную топологическую структуру, сильно изменяющуюся при изменении величины параметра p. На рис. 1 показаны изменения вида поверхности $\nu(\varphi, \theta, \psi) = 0$ при изменении параметра p (*а* – $p = 0.85$; *б* – $p = 0.745$; *в* – $p = 0.5$).

При относительно больших p она распадается на некоторую совокупность замкнутых поверхностей, окружающих малые объемы с ауксетическим поведением для материалов с $s_{12} < 0$. Для материалов с $s_{12} > 0$ эти малые объемы будут, наоборот, неауксетичными. С убыванием p такие объемы растут, а при критическом значении $p_c \approx 0.75$ исчезают замкнутые поверхности и образуется пара «открытых» поверхностей, охватывающая при дальнейшем уменьшении p все большие объемы. Большой объем ауксетичности будет у кубических кристаллов: FePd ($s_{12} < 0$ и $p = 0.684$) и TmSe ($s_{12} > 0$ и $p = 0.62$).

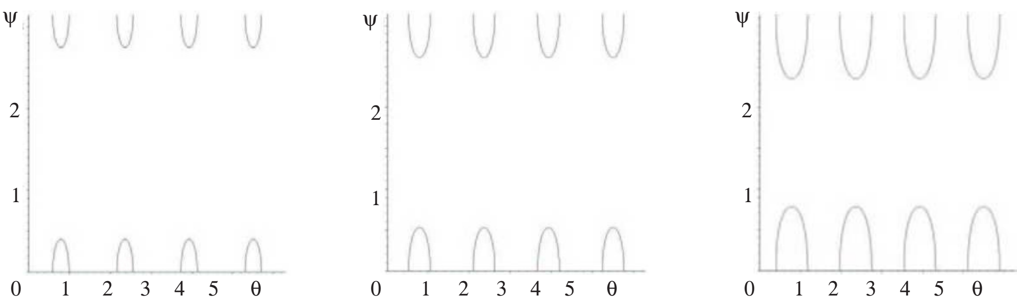
Все неауксетики характеризуются либо условием $p<0$, либо неравенством $p>1$. Обнаружены также два абсолютных ауксетика (кристаллы $Sm_{0.75}Y_{0.25}S$ с $p=2.25$ и Ba с $p=-0.176$), имеющих отрицательный коэффициент Пуассона при любых ориентациях кристалла.

Ранее в статье [2] были проанализированы ауксетики различных систем при ограничении частным случаем $\varphi = 0$. Существенные отрицательные значения коэффициента Пуассона были обнаружены для таких известных материалов, как медь, кальций, калий, литий, натрий, свинец и т.д.



а) *б*) *в*)

Рис. 1



а) *б*) *в*)

Рис. 2

Разграничивающие кривые $\nu(\varphi=0, \theta, \psi)=0$, отделяющие области ауксетического поведения (с $\nu<0$) от областей неуксетического поведения (с $\nu>0$), при различных p представлены на рис. 2 ($а - p=0.85$; $б - p=0.745$; $в - p=0.5$).

С уменьшением p для материалов с $s_{12}<0$ увеличивается область ауксетичности. Для материалов с $s_{12}>0$ имеет место обратная тенденция.

При всех значениях p из интервала (0,1) разграничивающие кривые с учетом периодичности по ψ являются замкнутыми. В полном соответствии с пространственными картинами общего случая, отраженного на рис. 1, кривые на рис. 2 являются их сечениями при $\varphi=0$.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 22.

Список литературы

1. Landolt-Bernstein – Group III: Crystal and Solid State Physics. Vol. 29a. Second and Higher Order Constants. Berlin: Springer, 1992. 743 p.
2. Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С. // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 4. С. 43–62.

CUBIC CRYSTALS WITH NEGATIVE POISSON'S RATIO (CUBIC AUXETICS)

D.S. Lisovenko, V.A. Gorodtsov

Based on the experimental values of elastic constants, compiled in the Landolt–Bernstein book series, we identified more than a hundred of cubic crystals with negative Poisson's ratio (cubic auxetics). The character of one-parametrical changes of a kind of surfaces in a space of angles of orientation of the crystals separating areas with negative and positive values of Poisson's ratios, has been investigated.

Keywords: cubic crystals, anisotropic elasticity, Poisson's ratio, negative Poisson's ratio, auxetics, cubic auxetics.

УДК 531/534: [57+61]

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОМПАРТМЕНТАЛЬНОГО И КОНТИНУАЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ ПРОВОДИМОСТИ КОРНЕЙ РАСТЕНИЙ

С.А. Логвенков

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова
Государственный университет – Высшая школа экономики, Москва

logv@bk.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Проанализирована одна из основных методик измерения гидравлической проводимости корней растений, основанная на использовании компартментальных моделей. Указаны недостатки использования моделей такого рода. Предложено находить интегральную гидравлическую проводимость корня как частную производную потока через единицу боковой поверхности по разности гидростатических давлений при фиксированной разности осмотических давлений. Для этого используется континуальная многофазная модель процессов радиального переноса веществ в корнях. Показано, что континуальная модель в полной мере может описывать эксперименты по измерению проводимости. Выработаны указания, позволяющие проводить правильную обработку результатов в рамках существующих методик.

Ключевые слова: гидравлическая проводимость корней растений, метод релаксации корневого давления, континуальное моделирование.

Моделирование на основе компартментальной модели

При описании переноса жидкости через корень традиционно используется соотношение, связывающее поток через единицу боковой поверхности корня J_w с разностью гидростатических и осмотических давлений между окружающей средой и сосудами ксилемы Δp и $\Delta\pi$: $J_w = L_p(\Delta p - \sigma\Delta\pi)$. Здесь L_p – интегральный коэффициент гидравлической проводимости, характеризующий способность корней перемещать воду из окружающей среды в сосуды ксилемы. Измерение коэффициента гидравлической проводимости сопутствует многим теоретическим работам, связанным с изучением радиального перемещения воды в корнях растений, в частности, с выявлением влияния различных веществ на проводимость корней, определением соотношения проводимостей различных путей переноса жидкости и т.д.

Измерение коэффициента гидравлической проводимости часто проводят с использованием метода релаксации давления жидкости в измерительной системе, присоединенной к срезу корня. Нарушение равновесия в системе путем возмущения давления приводит к возникновению потока и релаксационному изменению корневого давления. При обработке эксперимента выделяют участки кривой, характеризуемые различными временами релаксации. Выбирая соответствующее время релаксации, на основе компартментальной модели получают величину, отождествляемую с интегральной гидравлической проводимостью корня.

Недостатком использования компартментальной модели является то, что полученная величина характеризует проводимость корня лишь в окрестности набора параметров, соответствующего отсутствию потока. Другим недостатком является игнорирование организации течения на микроуровне, обусловленного особенностями анатомического строения корня, что сказывается на величине вычисляемой проводимости. Использование компартментальной модели делает невозможным описание экспериментальной кривой, содержащей участки с различными временами релаксации, и поэтому выбор времени релаксации при обработке экспериментов является не вполне обоснованным.

Континуальное моделирование

Считая, что поток жидкости через единицу боковой поверхности корня определяется разностью гидростатического и осмотического давлений, определим интегральную гидравлическую проводимость корня без использования компартментальных моделей. Основываясь на представлении этого коэффициента как меры изменения потока через единицу боковой поверхности корня при изменении разности гидростатических давлений между окружающей средой и ксилемой при постоянстве остальных факторов, определим его как частную производную потока через единицу боковой поверхности по разности гидростатических давлений при фиксированной разности осмотических давлений $L_p = \partial J_w / \partial \Delta p\big|_{\Delta\pi=\text{const}}$.

При решении задачи использовалась разработанная нами математическая модель переноса воды и ионов в корне, основанная на континуальном подходе. Предполагая осевую симметрию корня, его ткань рассматриваем как пористую сплошную среду, занимающую область $r_0 \le r \le r_1$, где r_0 и r_1 – координаты границ области сосудов ксилемы с окружающей средой. Пористая среда заполнена двумя жидкими фазами, образованными вязкими жидкостями, находящимися соответственно во внеклеточном и внутриклеточном пространствах, фильтрующимися через недеформируемый твердый каркас. Предполагается, что в каждой фазе растворен обобщенный низкомолекулярный компонент, способный перемещаться в среде как активными механизмами переноса через мембраны, так и путем конвекции и диффузии и создающий осмотическую силу, связанную с присутствием полупроницаемых клеточных мембран. Поток воды между фазами регулируется соотношениями мембранного типа с учетом разности осмотических давлений, создаваемых растворенным веществом. При написании макроскопических динамических соотношений учитывалось представление об организации течения на клеточном уровне. Во внеклеточной жидкой фазе предполагается чисто вязкое течение, тогда как во внутриклеточной действует еще распределенная осмотическая сила.

Фиксируя разность осмотических давлений и выбирая различные значения разности гидростатических давлений, из решения задачи (при выборе соответствующих граничных условий) получим зависимость $J_w = J_w(\Delta p, \Delta\pi = \text{const})$, которая хорошо описывается прямой линией, и найдем величину гидравлической проводимости как угловой коэффициент в уравнении линейной регрессии.

Математическая модель радиального переноса веществ в корне использовалась при моделировании нестационарных экспериментов. При этом она должна быть дополнена уравнениями, описывающими изменение корневого давления в системе за счет упругого изменения объема и изменение концентрации в ксилеме за счет вытекания из сосудов ксилемы в межклеточное пространство и диффузионного массообмена с окружающими клетками через клеточные стенки. В качестве начального приближения использовалось решение стационарной задачи, дающее распределение величин при отсутствии потока через поверхность корня.

Полученные в численном эксперименте релаксационные кривые обрабатывались с помощью традиционной методики с применением полученных на основе компартментальной модели формул. Для набора параметров, соответствующих корням кукурузы, проведено сравнение коэффициентов гидравлической проводимости, определенных различным образом: используя компартментальную и континуальную модели.

Выводы

Показано, что континуальная модель позволяет описывать все особенности наблюдаемой экспериментальной кривой. В результате сопоставления двух методов обработки нестационарного эксперимента по измерению проводимости корня на основе традиционной мембранной и континуальной моделей продемонстрировано, что радиальную проводимость корня следует определять по медленному, а не быстрому участку релаксационной кривой. Таким образом, использование континуальной модели позволяет сформулировать уточняющие указания, позволяющие получать правильные результаты в рамках существующей методики. Отмечена возможность оценивать в рамках существующей экспериментальной методики отношение внутриклеточной и внеклеточной проводимостей по полученной экспериментально релаксационной кривой при использовании континуальной модели корня.

Работа поддержана РФФИ (проект № 08-01-00492).

COMPARISON OF RESULTS OF THE USE OF COMPARTMENTAL AND CONTINUAL MODELING FOR DETERMINING THE HYDRAULIC CONDUCTIVITY OF PLANT ROOTS

S.A. Logvenkov

One of the main methods of measuring the hydraulic conductivity of plant roots based on the use of compartmental models is analyzed. The paper lists the disadvantages of using models of this kind. It has been suggested to define an integral hydraulic conductivity of root as the partial derivative of the flow through the root surface by the difference in hydrostatic pressure at a fixed difference of osmotic pressures. For this purpose a multiphase continuum model of radial transport of substances in the roots is applied. The possibility of a continuum model to describe fully the experiments on the measurement of hydraulic conductivity is demonstrated. A guidance for correctly processing the results in the framework of the existing techniques is developed.

Keywords: conductivity of plant roots, root pressure relaxation method, continuum modeling.

УДК 539.3;539.21

МД МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ СВОЙСТВ МЕМБРАНЫ ФЛЮОРОГРАФЕНА

© 2011 г. **_М.А. Мазо[2], Н.К. Балабаев[1], Е.Б. Гусарова[2], Т.П. Товстик[3]_**

[1]Институт математических проблем биологии РАН, г. Пущино
[2]Институт химической физики им. Н.Н. Семенова РАН, Москва
[3]Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

mazo@polymer.chph.ras.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Молекулярно-динамическое моделирование используется для расчета тепловых и механических характеристик полностью фторированных мембран графена – флюорографена (ФГ). Рассматриваются три плоско-кристаллические структуры ФГ («кресельная», «кроватная» и структура «стиральной доски»), а также мембрана со случайным расположением атомов фтора. Получены коэффициенты температурного расширения мембран и их равновесные геометрические характеристики (длины валентных связей и величины валентных углов) в области температур от 1 до 300 К. Численное моделирование растяжения и сжатия мембран позволило рассчитать их продольные и изгибные жесткости, а также коэффициенты Пуассона при двух температурах: 1 К и 300 К. Полученные значения модулей Юнга для плоско-кристаллических структур хорошо согласуются с соответствующими значениями квантово-механических расчетов. В то же время величины модулей Юнга для мембраны со случайным расположением фторов примерно в 2.5 раза ниже и согласуются с известными экспериментальными данными, что, возможно, свидетельствует о большой дефектности получаемых в экспериментах мембран ФГ.

Ключевые слова: флюорографен, фторированный графен, структура, коэффициенты температурного расширения, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, молекулярно-динамическое моделирование.

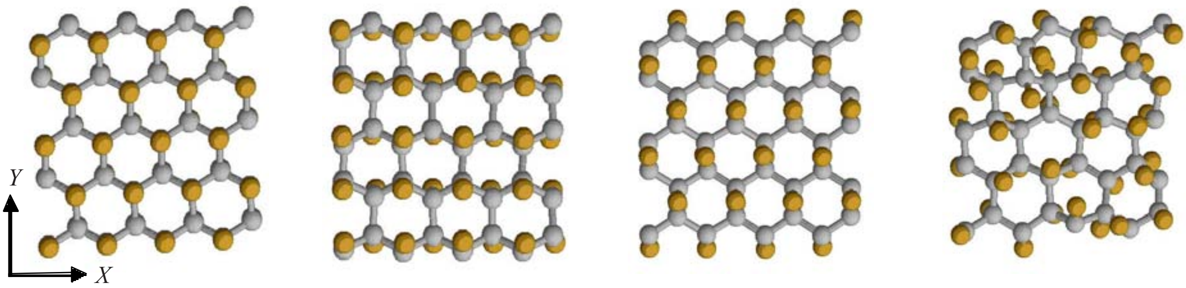
Монофторидам углерода, нашедшим широкое применение в химических источниках тока, а также в качестве уникального твердо-смазочного материала, посвящено большое количество работ, где рассмотрены методики их получения, структура и свойства (см., например, [1]). Однако особый интерес к изучению свойств однослойной фторированной мембраны графена – флюорографену (ФГ) – возник совсем недавно после экспериментальных и теоретических исследований ее электронных свойств [2–5], которые показали, что ФГ является весьма перспективным материалом для использования в микроэлектронике.

Наиболее подробное исследование отдельных мембран ФГ было проведено в [2], где экспериментально показано, что ФГ имеет относительно большой модуль Юнга ~100 Н/м и значительную прочность на излом ~15 Н/м. Квантово-химические расчеты нескольких плоско-кристаллических структур ФГ без учета тепловой подвижности атомов были проведены авторами [6] и [7]. В [6] были также рассчитаны модули Юнга и коэффициенты Пуассона, причем теоретические оценки жесткости мембран оказались в 2.5 раза выше экспериментальных. В работе [7] были уточнены параметры потенциалов для численных расчетов ФГ. С использованием этих уточненных потенциалов в настоящем исследовании проведено молекулярно-динамическое (МД) моделирование ненапряженных мембран ФГ при температурах 1, 100 и 300 К и одноосной деформации этих мембран при температурах 1 и 300 К.

Расчеты проводились для мембран ФГ с различной плоско-кристаллической структурой («кресельная», «кроватная» и «стиральная доска») и с мембраной, у которой атомы фтора присоединялись к углеродам случайным образом (рис. 1, где серым цветом обозначены атомы углерода, желтым – атомы фтора).

Все мембраны были примерно одного размера 4.5×2.6 нм и содержали 400 атомов углерода и 400 атомов хлора (например, рис. 2*а*, где показан общий вид ненапряженной мембраны плоско-кристаллической структуры типа «кресло»). Важно отметить, что случайное присоединение атомов фтора привело к существенной деформации исходной мембраны графена (рис. 2*б* – аморфная структура).

Мембраны помещались в расчетную ячейку с периодическими граничными условиями и располагались в плоскости *XY*, при этом раз-



«Кресельная» «Кроватная» «Стиральная доска» «Аморфная»

Рис. 1

а) *б*)

Рис. 2

мер расчетной ячейки вдоль направления Z был выбран таким образом, чтобы мембрана не взаимодействовала сама с собой через периодическую границу. Для расчетов использовалось силовое поле OPLS/AA [8] с учетом результатов работы [7]. МД моделирование проводилось с помощью модифицированной программы ПУМА [9]. Равновесные параметры мембран при температурах 1, 100 и 300 К были получены усреднением по равновесной траектории в течение 100 пс. Методика определения в численных экспериментах механических характеристик двумерных объектов подробно описана работе [10].

Основные полученные результаты приведены в таблицах 1 и 2. Видно, что в целом они неплохо согласуются с результатами квантово-химических расчетов и существенно дополняют их.

Значения в табл. 2 приведены для температуры 1 К (в скобках – для 300 К).

Авторы благодарят Л. И. Маневича за полезное обсуждение.

Список литературы

1. Митькин В.Н. // Ж. струк. химии. 2003. Т. 44. №1. С. 99–138.

2. Nair R.R. et al. // Small. 2010. V. 6, No 24. P. 2877–2884.

3. Robinson J.T. et al. // Nano Lett. 2010. V. 10. P. 3001–3005.

4. Withers F., Dubois M., Savchenko A.K. // Phys. Rev. B. 2010. V. 82. P. 073403.

5. Cheng S.-H., et al. // Phys. Rev. B. 2010. V. 81. P. 205435; V. 114. P. 5389–5396.

6. Leenaerts O. et al. // Phys. Rev. B. 2010. V. 82,

Таблица 1

Рассчитанные коэффициенты температурного расширения α_x и α_y

	«Кресельная»	«Кроватная»	«Стиральная доска»	Случайная
$\alpha_x \cdot 10^{-6}$	4.3	3.0	7.6	4.1
$\alpha_y \cdot 10^{-6}$	4.5	5.0	4.7	3.8

Таблица 2

Значения модулей Юнга, коэффициентов Пуассона и изгибной жесткости

Структура ФГ	Направление деформации	2D модуль Юнга, Н/м	Коэфф. Пуассона	Изгибная жесткость, Н·м	2D модуль Юнга, Н/м [6]	Коэфф. Пуассона [6]
«Кресельная»	X	233 (236)	0.22 (0.22)	26 (20)	243	0.07
	Y	236 (237)	0.22 (0.22)	31 (29)	243	0.07
«Кроватная»	X	234 (230)	0.20 (0.19)	16 (14)	230	–0.01
	Y	235 (236)	0.20 (0.21)	14 (13)	262	–0.01
«Стиральной доски»	X	167 (171)	0.11 (0.12)	25 (21)	117	0.05
	Y	251 (252)	0.17 (0.17)	23 (22)	271	0.11
Случайная	X	76 (75)	0.11 (0.10)	–	–	–
	Y	141 (129)	0.2 (0.22)	–	–	–

No 19. P. 195436.

7. Artyukhov V.I., Chernozatonskii L.A. // J. Phys. Chem. A. 2010. V. 114, No 16. P. 5389–5396.

8. Watkins E.K., Jorgensen W.L. // J. Phys. Chem. A. 2001. V. 105, No 16. P. 4118–4125.

9. Lemak A.S., Balabaev N.K. // Mol. Simul. 1995. V. 15, No 4. P. 223–231.

10. Мазо М.А., Маневич Л.И., Балабаев Н.К. // Российские нанотехнологии. 2009. Т. 4, №9, 10. С. 1118-1135.

MD SIMULATION OF MECHANICAL AND THERMAL PROPERTIES OF A FLUOROGRAPHENE MEMBRANE

M.A. Mazo, N.K. Balabaev, E.B. Gusarova, T.P. Tovstik

Molecular dynamics simulations were used for modeling the thermal and the elastic properties of fully fluorinated graphene membranes – fluorographene (FG). Simulations were carried out for three basic crystal conformations: chair, bed and washboard structures, as well as for FG membranes with random structural defects. The coefficients of temperature extension and the equilibrium geometric parameters (bond lengths and angles), were obtained for the temperature range from 1 to 300 K. Computer simulation of the extension and compression of the membrane made it possible to calculate the longitudinal stiffness, Poisson's ratios and the bending stiffness at 1 and 300 K. The obtained values of the Young modules for 2D crystal structures accords well with the corresponding quantum-mechanical calculations. At the same time, the Young modules for the membranes with defects in crystalline structure were approximately 2.5 times less, which is consistent with the known experimental data. Probably, this is circumstantial evidence of the fact that the FG membranes obtained in the experiments have a big deficiency.

Keywords: fluorographene, fluorinated graphene, structure, coefficient of temperature extension, Young module, Poisson's ratios, molecular dynamics simulation.

УДК 537.8:539.3:539.194

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОЛИМЕРНЫХ И НАНОРАЗМЕРНЫХ СИСТЕМ

Л.И. Маневич

Институт химической физики им. Н.Н. Семенова РАН, Москва

manevitchleonid3@gmail.com

Поступила в редакцию 16.06.2011

Выделены основные особенности, отличающие модели полимерных и наноструктурных систем от стандартных одномерных моделей: необходимость учета связанных колебаний (изгибно-продольных и изгибно-крутильных); изменение типа солитонного возбуждения (формирование солитонов растяжения вместо солитонов сжатия, характерных для стандартной модели ФПУ); существование оптических солитонов даже в одноатомных цепочках; «квантование» характеристик солитонных возбуждений вследствие геометрических ограничений, присущих кристаллическим полимерам.

Проанализированы механизмы ряда физических процессов, протекание которых невозможно без формирования и распространения локализованных возбуждений, к которым относятся: диэлектрическая релаксация в слабо окисленном полиэтилене, реализуемая за счет подвижности продольно-крутильных солитонов, термически активируемых на границах аморфных и кристаллических областей; структурные трансформации в полимерных кристаллах (в частности, переходы между орторомбической, моноклинной и триклинной решетками в кристаллическом полиэтилене); нормальная теплопроводность за счет рассеяния тепловой энергии бризерами; аномальная электропроводность полимерных кристаллов, образованных полисопряженными полимерами (полиацетилен и др.), за счет высокой подвижности топологических солитонов, возникающих благодаря электрон-фононному взаимодействию; «сверхбыстрый» режим распространения экзотермических твердофазных рекаций, элементарным актом которых является распространение топологических солитонов, возникающих при условии невырожденности потенциалов взаимодействия.

Ключевые слова: локализованные нелинейные возбуждения, модели полимеров.

Современное развитие нелинейной динамики, охватывающей широкий круг фундаментальных и прикладных областей науки, своими успехами обязано, главным образом, одномерным моделям. В этом смысле полимерные макромолекулы и кристаллы представляются почти идеальными объектами для приложения методов нелинейного анализа.

Действительно, полимерные молекулы, даже такие сложные, как молекулы ДНК, могут рассматриваться в квазиодномерном приближении в силу того, что внутримолекулярные связи характеризуются энергией, на порядки превышающей энергию взаимодействия с окружающими макромолекулами. Поэтому, по крайней мере, на расстояниях порядка персистентной длины для гибкоцепных макромолекул (полиэтилен – ПЭ, политетрафторэтилен – ПТФЭ и др.) квазиодномерное описание представляется естественным.

Однако наличие внутренней структуры и/или геометрические особенности их строения, в том числе спиральность, характерная для большинства полимерных цепей, приводят к тому, что чисто одномерные модели типа решеток Тоды или цепочек Ферми – Паста – Улама (ФПУ) не отражают важных физических особенностей динамических процессов. Поэтому нелинейные уравнения динамики полимеров изначально не могут рассматриваться как чисто одномерные, поскольку движения в спиральной цепи являются плоскими или пространственными. Кроме того, в отличие от одномерных решеток Тоды, ФПУ или модели Френкеля – Конторовой (ФК), где ангармонизм имеет чисто физическое происхождение и определяется потенциалами взаимодействия (физическая нелинейность), в рассматриваемых системах важную роль играет ангармонизм геометрического характера (геометрическая нелинейность). Так, в нелинейной динамике молекулы ПЭ (в конформации плоского транс-зигзага), геометрический ангармонизм является доминирующим [1], что приводит к формированию динамических солитонов растяжения вместо солитонов сжатия, характерных для цепочек Тоды или решеток с потенциалом Морзе.

Обобщение результатов, полученных для молекул ПЭ, на случай более сложных спиральных цепей ПТФЭ показывает, что в дополнение к продольным солитонам в системе появляются локализованные решения, соответствующие крутильным модам движения [2].

Наличие сложной пространственной структуры полимеров приводит к тому, что даже в простых молекулах ПЭ в приближении объединенных атомов (т.е. когда СН2-группа заменяется одной частицей с эффективной массой, равной сумме масс составляющих), кроме акустической ветви, в дисперсионном соотношении появляется и оптическая ветвь колебаний, соответствующая относительному движению соседних СН2-групп. Описание соответствующих малоамплитудных колебаний приводит к уравнениям типа нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), допускающим при определенных значениях параметров взаимодействия существование локализованных колебаний (бризеров). Эти возбуждения соответствуют связанным продольным и поперечным оптическим колебаниям [3]. В спиральных молекулах ПТФЭ бризеры могут соответствовать как продольным, так и крутильным колебаниям [4]. Следует заметить, что наличие связанных продольных и поперечных оптических колебаний характерно для систем, обладающих конфигурацией плоского зигзага, при учете геометрической нелинейности, будь то молекула ПЭ [5], зигзагообразный элемент углеродной нанотрубки или механическая конструкция типа фермы [6].

Несмотря на относительную слабость межмолекулярного взаимодействия в полимерных кристаллах, что служит основанием для использования квазиодномерных моделей изолированной цепи, его наличие накладывает определенные топологические ограничения на характер нелинейных возбуждений. А именно, условие сохранения кристаллического порядка, например, в кристаллах ПЭ, определяет допустимые смещения СН2-групп вследствие трансляционной подвижности локализованного возбуждения (аналогично тому, как кинки в модели ФК могут иметь амплитуду, лишь кратную 2π). В кристалле солитоны должны иметь топологический заряд, кратный периоду решетки.

Однако в кристалле ПЭ, в силу того, что сдвиг молекулы на расстояние, равное проекции С–С связи на ось макромолекулы, изменяет исходную конфигурацию, реалистичное описание таких возбуждений требует учета связанных поступательно-крутильных мод движения. В этом случае мы сталкиваемся еще с одной проблемой, характерной для описания динамики полимерной решетки. Дело в том, что динамические солитоны в моделях изолированной цепи обязаны своим существованием ангармонизму внутримолекулярного взаимодействия и имеют скорость, превышающую скорость звука в рассматриваемой системе (аналогично солитонам в решетке Тоды или цепи ФПУ). Именно поэтому они учитываются при описании процессов распространения ударных волн в нелинейных средах или баллистической теплопроводности в простых средах. Топологические же солитоны, существующие в лоренц-инвариантных моделях (ФК и φ^4-модели), обусловлены в основном нелинейностью межмолекулярного взаимодействия и могут иметь скорости, не превышающие скорость звука.

Вопрос о существовании квазиточечных дефектов в полимерных кристаллах не требует, вообще говоря, учета внутримолекулярного ангармонизма – в этом случае доминирующим фактором является нелинейность слабого межмолекулярного взаимодействия. Потенциал, описывающий кристаллическое поле, является периодическим и энергетически вырожденным, так как имеется множество эквивалентных положений равновесия системы.

Что же касается решеточных моделей наноуглеродных систем (графен, углеродные нанотрубки – УНТ), то к настоящему времени число работ, выполненных в этой области, невелико. В частности, это упомянутая выше двухмерная модель плоского зигзага, являющегося структурным элементом графенового листа или УНТ. Кроме того, моделирование неспиральных УНТ привело к выводу, что динамика малоамплитудных процессов в таких структурах адекватно описывается уравнениями Кортевега де Вриза, имеющими в качестве частных решений динамические солитонные моды.

На основе результатов численного моделирования был проведен сравнительный анализ локализованных колебаний (бризеров) в неспиральных УНТ с конфигурациями «зигзаг» и «кресло». Оказалось, что спектр солитонных возбуждений в первой из конфигураций гораздо шире, что может приводить к заметным различиям в теплопроводности указанных систем. Из результатов, относящихся к молекулярно-динамическому моделированию УНТ, отметим недавний МД-эксперимент, моделирующий коллапс УНТ под действием внешнего локализованного возмущения. Этот процесс имеет экзотермический характер, и в этом смысле он близок к уже упоминавшимся ранее моделям топохимической полимеризации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 10-01-00698, и в рамках Программы фундаментальных исследований № 2 ОХНМ РАН.

Список литературы

1. Manevitch L.I., Savin A.V. Solitons in crystalline polyethylene: isolated chain in the transconformation // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 4713–4722.

2. Manevitch L.I., Savin A.V. Solitons in spiral polymer macromolecules // Phys. Rev. E. 2000. V. 61. P. 7065–7075.

3. Savin A.V., Manevitch L.I. Discrete breathers in a polyethylene chain // Phys. Rev. B. 2003. V. 64. P. 144302.

4. Manevitch L.I., Kovaleva N.A. // Nonlinear localized excitations in polytetrafluorethylene crystal: Proceedings 10th Conf. on Dynamical Systems – Theory and Applications. Lodz, December 7–10, 2009. Poland. 2009. V. 2. P. 549–558.

5. Manevitch L.I., Savin A.V., Lamarque C.-H Analytical study and computer simulation of discrete optical breathers in a zigzag chain // Phys. Rev. B. 2006. V. 74. P. 014305.

6. Маневич Л.И., Смирнов В.В. Локализованные нелинейные колебания плоского зигзага // Докл. РАН. 2007. Т. 413. С. 354–359.

NONLINEAR DYNAMIC MODELS OF POLYMER AND NANO-DIMENSIONAL SYSTEMS

L.I. Manevitch

The main peculiarities which distinguish the models of polymer and nano-dimensional systems from conventional one-dimensional models are considered. They iunclude: appearance of coupled oscillations involving different types of motion; the formation of the solitons of a new type (e.g. of the extension instead the compression); existence of optic breathers even in one-component chains; «quantization» of the soliton-like excitations as a consequence of geometric restrictions. On this basis the mechanisms of significant physical processes, which can not proceed without localized nonlinear excitations, have been analyzed. Among them are: the structural transformations in polymer crystals (in particular, the transitions between monoclinic and orthorhombic phases); dielectric and mechanical relaxation in the slightly oxidized polyethylene; anomalous electro-conductivity in the polymers with the conjugate bonds; «superfast» propagation of exothermal chemical reactions in molecular crystals.

Keywords: localized nonlinear excitations, polymer models.

УДК 539.3:51-76

ПОРОУПРУГИЕ МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЕЙ

Л.Б. Маслов

Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина

maslov@tipm.ispu.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Представлена математическая модель костной ткани, описываемая динамическими уравнениями теории эффективной пороупругости и определяющими уравнениями анизотропной сплошной среды. Разработан алгоритм расчета пороупругих констант эффективной сплошной среды, необходимый для математического моделирования деформирования биологических структур как пороупругих сред. Для численного анализа использована формулировка метода конечных элементов в виде «перемещения упругого каркаса – давление в порах» и разработана конечно-элементная модель голени человека. Проведен расчет вынужденных гармонических колебаний модели большеберцовой кости и исследовано распределение давления в порах компактного и губчатого вещества. Показано, что вибрационные потоки жидкости в системе пор костной ткани зависят от частоты возбуждения и могут достигать существенных значений на резонансных формах колебаний. Полученные результаты могут служить теоретическим фундаментом для разработки вибрационных методов реабилитации и контроля физиологического состояния костной ткани спортсменов, космонавтов, пожилых и перенесших травмы людей.

Ключевые слова: костная ткань, пороупругая модель, конечно-элементный расчет, вынужденные колебания, поровая жидкость.

Математическая модель ткани как пороупругой среды

В последние десятилетия пороупругие модели биологических тканей получили распространение и успешно применяются в биомеханике. Уравнениями пороупругости более точно, чем классическими уравнениями идеальной упругости, описываются процессы деформации и адаптации костной, хрящевидной и соединительной тканей, а также исследуется применимость теории пороупругости для описания деформирования мышечной ткани. Определяющие соотношения, записанные относительно осредненных по представительному элементу среды перемещений твердой $\mathbf{u}$ и жидкой $\mathbf{U}$ фаз, были сформулированы Био на основе феноменологического подхода [1] и впоследствии получили обобщение в работах Нигматулина [2]. В предположении упругой модели твердой фазы и модели идеальной сжимаемой жидкости фазовые уравнения преобразуются в определяющие соотношения пороупругой среды в «*u*–*p*» переменных (перемещение упругого каркаса – давление поровой жидкости). Кинематической переменной жидкой фазы является вектор относительного перемещения $\mathbf{w} = \phi(\mathbf{U} - \mathbf{u})$ или дивергенция этого вектора $\zeta = -\nabla\cdot\mathbf{w}$, имеющая физический смысл относительного изменения объемного содержания жидкости в порах. Для случая анизотропии упругих и гидростатических свойств уравнения примут вид

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u},p) = \boldsymbol{\sigma}_{dr}(\mathbf{u}) - \mathbf{A}p \equiv \mathbf{C}_{dr}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathbf{A}p,\\ \zeta(\mathbf{u},p) = \mathbf{A}\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \phi^2R^{-1}p,\end{gathered} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – полный тензор напряжений; $\boldsymbol{\sigma}_{dr}$ – тензор напряжений в точках твердой фазы, вызываемый только упругими деформациями; $\mathbf{C}_{dr}$ – тензор упругих модулей среды в дренированном состоянии; $\mathbf{A}$ – тензор коэффициентов эффективных напряжений Био; p – давление поровой жидкости; R – гидростатическая константа, имеющая смысл модуля объемного сжатия жидкой фазы; ϕ – пористость.

С учетом выражения тензора напряжений в идеальной сжимаемой жидкости и схемы Рахматулина силового взаимодействия и совместного деформирования фаз [2] система уравнений динамики пороупругой среды примет вид краевой задачи относительно изображений искомых функций $\mathbf{u}$ и p:

$$\begin{gathered}\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{dr} - s^2(\rho\mathbf{E} - \rho_f\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}(s))\cdot\mathbf{u} -\\ -(\mathbf{A} - \widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}(s))\cdot\nabla\hat{p} = -\hat{\mathbf{f}}_V + \widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}(s)\cdot\hat{\mathbf{f}}_f,\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}s^{-1}\nabla\cdot(\widetilde{\mathbf{K}}(s)\cdot\nabla\hat{p}) - \phi^2R^{-1}\hat{p} -\\ -(\mathbf{A} - \widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}(s))\cdot\cdot\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = s^{-1}\gamma_f,\end{gathered} \tag{3}$$

где s – параметр Лапласа; ρ – полная плотность;

ρ_f – плотность жидкости, $\mathbf{E}$ – единичный тензор; $\widetilde{\mathbf{\Gamma}} = \rho_f s \widetilde{\mathbf{K}}$ – тензор, характеризующий инерционное взаимодействие фаз; $\mathbf{f}_V$ – объемная сила; $\widetilde{\mathbf{K}}(s) = (s\mathbf{E} + \tau\phi^{-1}\rho_f s^2 \mathbf{K})^{-1} \cdot s\mathbf{K}$ – приведенная комплексная гидравлическая проницаемость среды; τ – параметр искривленности поровых каналов; $\hat{\gamma}_f = \nabla \cdot (\widetilde{\mathbf{K}} \cdot \hat{\mathbf{f}}_f)$ – плотность внутренних источников жидкости.

При замене параметра Лапласа на комплексное выражение $s = i\omega$ получим уравнения вынужденных колебаний пороупругой среды под действием силы, изменяющейся по гармоническому закону.

Эффективные характеристики биологических тканей

Для определения эффективных материальных характеристик пороупругой среды $\mathbf{C}_{dr}$, $\mathbf{A}$ и R, входящих в (1), их явные выражения через физико-механические характеристики отдельных фаз не могут быть непосредственно использованы, поскольку сами эти характеристики не всегда известны, а их нахождение не менее сложно. Для решения данной задачи применен дифференциальный метод самосогласования, позволяющий определить эффективные упругие модули в случае большой пористости, и методы микромеханики для расчета коэффициентов эффективных напряжений Био и гидростатической константы. Разработанный алгоритм вычисления эффективных упругих модулей анизотропной двухфазной среды $\mathbf{C}_{eff}$ при произвольных значениях пористости описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{C}_{eff}(\phi)}{d\phi} = \frac{\mathbf{C}_{eff}(\phi) \cdot\cdot \hat{\mathbf{T}}(\phi)}{1-\phi}, \quad (4)$$

в котором выражение тензорной функции $\hat{\mathbf{T}}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{T}}(\phi) &= (\mathbf{C}_{eff}(\phi) + \Delta(\phi) \cdot\cdot \mathbf{S}(\phi))^{-1} \cdot\cdot \Delta(\phi), \\ \Delta(\phi) &= \mathbf{C}_{inc} - \mathbf{C}_{eff}(\phi), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mathbf{S}$ – тензор Эшелби, определяющий поле деформаций вокруг эллипсоидального включения в бесконечной упругой среде; $\mathbf{C}_{inc}$ – тензор упругих модулей материала включения.

С помощью формул (4), (5) проведен численный анализ эффективных характеристик твердых и мягких биологических тканей как пороупругих сред в дренированном состоянии при произвольных значениях пористости в случае принятия модели трансверсально-изотропного тела.

Численное исследование колебаний большеберцовой кости

Для численного решения задачи пороупругости (2), (3) применен метод конечных элементов [3]. Если внешние нагрузки изменяются по гармоническому закону, то отклик линейной системы также представляет собой гармонические во времени функции, что приводит к системе матричных уравнений:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{K}_{dr} - \omega^2\mathbf{M} - \widetilde{\mathbf{L}}(i\omega))\,\mathbf{U} - \\ &-(\mathbf{H}_1 + \widetilde{\mathbf{H}}_2(i\omega))\,\mathbf{P} = \mathbf{F}_V + \mathbf{F}_S, \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-(\mathbf{H}_1 + \widetilde{\mathbf{H}}_2(i\omega))^T\,\mathbf{U} + \\ &+(-\mathbf{D} + i\omega^{-1}\widetilde{\mathbf{G}}(i\omega))\,\mathbf{P} = -i\omega^{-1}\mathbf{Q}^*, \quad (7) \end{aligned}$$

где $\mathbf{K}_{dr}$, $\mathbf{M}$ – глобальные матрицы жесткости и массы; $\widetilde{\mathbf{L}}$ – дополнительная матрица массы; $\mathbf{H}_1$, $\widetilde{\mathbf{H}}_2$ –матрицы взаимного влияния; $\mathbf{D}$, $\widetilde{\mathbf{G}}$ – матрицы насыщения и проницаемости; $\mathbf{U}$, $\mathbf{P}$ – глобальные векторы комплексных амплитудных значений перемещений и давлений в узлах конечно-элементной сетки.

С помощью базы данных фотографических снимков поперечных сечений тела человека построена трехмерная реалистичная конечно-элементная модель голени. Модель включает в себя основные элементы опорно-двигательной системы голени: берцовые большую и малую кости, ахиллово сухожилие, трехглавую мышцу, мышцы передней поверхности, кожный покров. При численном решении уравнений (6)-(7) использован пространственный изопараметрический конечный элемент с параболической интерполяцией геометрии и функций. Путем исследования сходимости тестового численного решения выбрана адекватная по точности сетка, состоящая из 3264 конечных элементов и 14238 узлов.

Уточненные значения вязкоупругих характеристик тканей включены в полную модель голени и исследованы колебания большеберцовой кости под действием поперечной силы, изменяющейся по гармоническому закону.

Первые резонансные частоты, наблюдаемые на графиках, соответствуют основным изгибным формам большеберцовой кости преимущественно в двух физиологических плоскостях. При этом малоберцовая кость совершает синфазное или противофазное движение, а мягкие ткани вносят дополнительный вклад в пространственные формы колебаний полной модели голени.

Показано, что на резонансных режимах максимальных значений достигают как компоненты вектора перемещений, так и давление и компоненты вектора потока внутритканевой жидкости.

Это особенно заметно на частоте 325...330 Гц в среднем сечении голени в точках вблизи фронтальной плоскости, что связано с расположением главной плоскости соответствующей формы колебаний.

Список литературы

1. Biot M.A. // Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. Part I: Low frequency range // J. Acoust. Soc. Am. 1956. Vol. 28, №2. P. 168–178.

2. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.. 336 с.

3. Маслов Л.Б. Математическое моделирование колебаний пороупругих систем. Иваново: Изд-во ИГЭУ, 2010. 264 с.

POROELASTIC MODELS OF VIBRATIONS OF BIOLOGICAL TISSUES

L.B. Maslov

A mathematical model of a bone tissue described by dynamic equations of the effective poroelasticity and by the constitutive equations of anisotropic continuum is presented. An algorithm for theoretically evaluating the effective poroelastic constants required for the mathematical simulation of biological structures as poroelastic media is developed. The numerical analysis is done using the finite element method based on the «elastic skeleton displacement – pore fluid pressure» and a finite element model of a human shank is introduced. Based on the forced vibration analysis carried out for the model of tibia, the pore fluid pressure distribution in compact and sponge tissues is investigated. It is demonstrated that the induced fluid flux in the bone pore system depends on the excitation frequency and can reach the essential magnitudes at resonant modes. The results obtained can be used as a theoretical basis for developing vibration methods of rehabilitation and control of the physiological condition of bone tissue for sportsmen, astronauts, elderly and injured persons.

Keywords: bone tissue, poroelastic model, finite element analysis, forced vibration, pore fluid.

УДК 536.421; 622.276

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ В ОСНАЩЕННОЙ ЭЛЕКТРОЦЕНТРОБЕЖНЫМ НАСОСОМ СКВАЖИНЕ

Н.Г. Мусакаев, С.Л. Бородин

Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН

timms@tmn.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Проведено теоретическое исследование процессов, происходящих при восходящем течении двухфазной смеси в вертикальной скважине, оснащенной установкой центробежных электронасосов; представлена математическая модель, на ее базе разработан программный продукт по расчету основных параметров двухфазного потока по высоте скважины. На основе численного исследования восходящего течения двухфазной смеси в скважине показано, что улучшения температурной обстановки в скважине можно достичь проведением комплекса мероприятий по снижению теплопередачи через систему труб скважины. Показано, что за счет использования установки центробежных электронасосов и варьирования расходной характеристики насоса, глубины его расположения можно добиться оптимального температурного режима по всей высоте скважины и тем самым предотвратить образование парафиновых отложений или уменьшить их интенсивность.

Ключевые слова: теоретическое исследование, двухфазное течение, вертикальная скважина, электроцентробежный насос.

Введение

В настоящее время на многих нефтяных месторождениях России из-за существенного ухудшения эксплуатационных условий процесс добычи нефти возможен лишь при его модернизации. Одним из перспективных методов при этом является применение в добывающих скважинах установок погружных электроцентробежных насосов (УЭЦН). Однако эффективность работы УЭЦН может быть резко снижена при наличии осложняющих факторов. В первую очередь, это факторы, обязанные своим происхождением условиям формирования залежи (наличие газа и механических примесей в добываемой из пласта жидкости, отложения твердой фазы и т.п.). В связи с этим становятся актуальными теоретические исследования процессов, происходящих при восходящем течении нефтегазовой смеси в вертикальной скважине. Установленные в ходе такого исследования закономерности и рассчитанные с их учетом параметры могут служить основой для выбора оптимального режима эксплуатации скважин путем принятия соответствующих технологических и инженерных решений.

Математическая модель

При теоретическом исследовании восходящего потока нефтегазовой смеси в вертикальной скважине необходимо учитывать три взаимосвязанных фактора: гидродинамику и теплофизику течения углеводородной смеси; тепловое взаимодействие газожидкостного потока с окружающей горной породой; рост парафиновых отложений на внутренних стенках подъемной колонны, по которой движется двухфазная смесь. Дополнительно, если скважина оснащена УЭЦН, следует учесть скачкообразное изменение параметров потока (давления, температуры и др.) вследствие работы насоса.

Построена математическая модель, учитывающая все вышеназванные факторы. На основе этой модели был разработан программный продукт, который позволяет проводить численные эксперименты по нахождению основных параметров двухфазного потока по высоте скважины при работе различных типов насосов и их месторасположения.

Численное исследование восходящего двухфазного потока в скважине

Известно, что на тех участках скважины, где температура внутренней стенки подъемной колонны скважины T_w становится ниже температуры начала кристаллизации парафина T_c, за короткое время образуется слой парафиновых отложений небольшой толщины. Если не принять никаких мер, то парафиновый слой постепенно увеличивается до полного перекрытия проходного сечения скважины. Для борьбы с подобными осложнениями зачастую применяют превентивные методы, основанные на сохранении благоприятной температурной обстановки в скважине ($T_w > T_c$). В качестве одного из таких методов может служить комплекс мероприятий по снижению теплопередачи через систему труб скважины. На рис. 1 изображено распределение температуры внутренней стенки подъемной колонны скважины в зависимости от рода и состояния вещества в межтрубном пространстве скважины (*1* – нефть, *2* – газ, *3* и *4* – газ в состоянии термогравитационной конвекции; число Грасгофа Gr = 10^5 и 10^6).

Из рис. 1 видно, что если межтрубное пространство заполнено веществом с меньшим коэффициентом теплопроводности (газ), то температурный режим в значительной мере улучшается. Если газ в межтрубном пространстве находится в состоянии термогравитационной конвекции, то при увеличении интенсивности конвективного течения температура стенки подъемной колонны по высоте скважины понижается. Улучшения температурного режима можно добиться путем уменьшения теплопередачи через систему труб скважины за счет использования теплоизолированных труб.

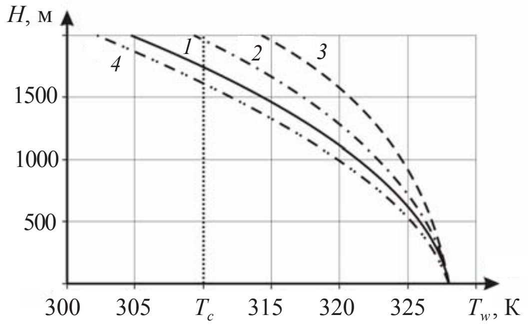


Рис. 1

На рис. 2 представлено распределение температуры внутренней стенки подъемной колонны скважины в зависимости от толщины теплоизолирующего слоя на внешней стенке подъ-емной колонны (*1* – нет теплоизоляции, *2* – теплоизоляция 5 мм, *3* – 10 мм).

Проведены расчеты по изменению параметров потока в зависимости от места расположения установки электроцентробежных насосов z_p и ее производительности M_p. Показано, что за счет использования УЭЦН, варьирования ее расходной характеристики M_p и глубины расположения z_p можно добиться увеличения температуры внутренней стенки подъемной колонны T_w по высоте скважины и тем самым предотвратить образование парафиновых отложений или уменьшить их интенсивность.

На рис. 3 показано распределение температуры внутренней стенки подъемной колонны скважины в зависимости от производительности УЭЦН (*а*) и глубины ее установки (*б*). На графиках обозначено: *а*) *1* – 1 кг/с, *2* – 1.6 кг/с, глубина установки z_p = 1000 м; б) *1* – 750 м, *2* – 1000 м, *3* – 1250 м, M_p = 1 кг/с.

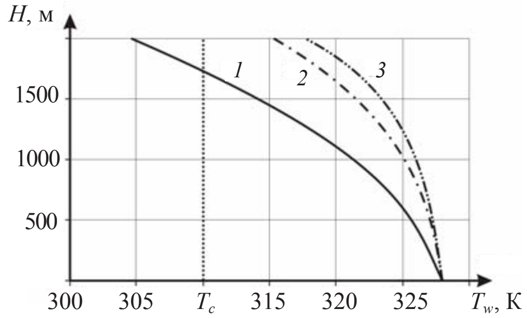
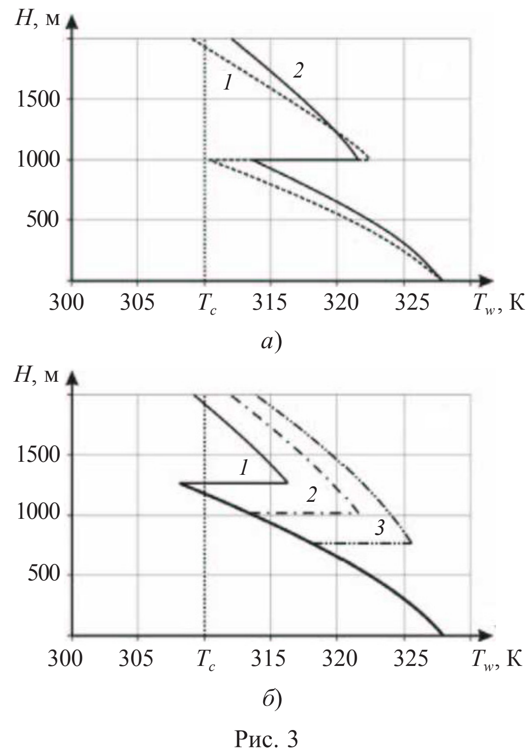


Рис. 2



а)

б)

Рис. 3

Работа выполнена при финансовом содействии Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-4381.2010.1).

THEORETICAL RESEARCH OF THE FEATURES OF A TWO-PHASE FLOW IN A WELL EQUIPPED WITH AN ELECTRICAL CENTRIFUGAL PUMP

N.G. Musakaev, S.L. Borodin

Theoretical research of the processes occurring during the upward flow of a two-phase mixture in a vertical well equipped with an electrical centrifugal pump was carried out. The mathematical model is presented. Based on the model, the program for calculating the main parameters of two-phase flow at the height of the well is developed. Numerical research of the upward flow of two-phase mixture in a well shows, that improving of the temperature conditions in the well can be achieved by a complex of measures to reduce heat transfer through the pipes of the well. Also, calculations show that using an electrical centrifugal pump and varying its flow rate, the depth of its location, the optimum temperature condition for the entire height of the well can be achieved, thereby preventing the formation of paraffin deposits or reducing its intensity.

Keywords: theoretical research, two-phase flow, vertical well, electrical centrifugal pump.

УДК 539.3+622.83

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ ЭВОЛЮЦИИ ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПРИРОДНЫХ И ТЕХНОГЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

***Л.А. Назарова*[2]*, И.Н. Ельцов*[1]*, Л.А. Назаров*[2]*, М.И. Эпов*[1]**

[1]Институт нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН, Новосибирск
[2]Институт горного дела СО РАН, Новосибирск

larisa@misd.nsc.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Методами механики деформируемого твердого тела описаны протекающие в породном массиве при ведении горных работ процессы необратимого деформирования и разрушения геосред. Предложен метод синтеза определяющих уравнений нарушения сплошности на основе величины фрактальной размерности его берегов. Построена геомеханическая модель процесса глубокого бурения, с использованием которой установлена зависимость размеров зон разрушения в прискважинной области от соотношения компонент природного поля напряжений. Разработан и апробирован на реальном объекте статистический подход, устанавливающий количественную связь между параметрами техногенной сейсмичности и поля напряжений в массиве горных пород при отработке месторождений полезных ископаемых. Сформулированы и решены обратные коэффициентные и граничные задачи геомеханики, позволяющие дать оценку времени жизни конструктивных элементов технологии выемки месторождений и фокальных параметров готовящегося сейсмического события по данным мониторинга состояния геосреды.

Ключевые слова: породный массив, напряжение, деформация, упругопластическая модель с дилатансией, эволюция геомеханических полей, скважина, обратная задача, техногенная сейсмичность.

Диагностика состояния массива горных пород по информации об эволюции параметров физических полей, вызванной природными и техногенными факторами, геомеханическое обоснование технологий отработки месторождений полезных ископаемых, оценка устойчивости подземных объектов различного масштабного уровня – вот далеко не полный перечень проблем, связанных с необходимостью описывать процессы необратимого деформирования и разрушения геосред.

Синтез уравнений состояния нарушений сплошности

Процессы необратимого деформирования структурированного массива горных пород локализуются, как правило, на межблочных границах, поэтому необходимо знать соотношения, описывающие закономерности взаимодействия берегов разломных нарушений. Разработаны методика генерации поверхностей с заданной фрактальной размерностью f и механизм взаимодействия двух полупространств, границы которых – случайные поверхности с одинаковой фрактальной размерностью. На основе статистической обработки результатов численных экспериментов установлена зависимость нормального напряжения $S(p) = K_n p$ на нарушении от конвергенции берегов p, где нормальная жесткость K_n пропорциональна величине $(f-2)^{-0.5}$ и прочности на одноосное сжатие вмещающих пород. Предложен способ определения величины f по длине береговой линии.

Геомеханические аспекты бурения глубоких скважин

Многие технологии горных работ связаны с созданием в породном массиве скважин различного назначения. При глубоком бурении для разведки и добычи углеводородов могут иметь место нежелательные явления такие, как отклонение скважины от заданной траектории, разрушение прискважинной зоны и изменение ее проницаемости. На основе упругопластической дилатантной модели горных пород [1] описан процесс формирования и эволюции зон необратимых деформаций D в окрестности глубокой скважины, проходящей пачку тонких слоев с пониженными прочностными свойствами – типичной ситуации при бурении скважин на нефть и газ. Оказалось:

– радиальные размеры пропорциональны величине $(1 - q)^2$ (где $q = \sigma_h/\sigma_v$ – коэффициент бокового отпора, σ_h и σ_v – горизонтальные и вертикальные напряжения в нетронутом массиве);

– разрушение менее прочного слоя может наступить до пересечения его скважиной, что нужно учитывать при инверсии каротажных данных;

– перед забоем возникает область растягивающих радиальных напряжений, амплитуда которых пропорциональна разности давления бурового раствора и σ_h и может достигать предельных значений, что объясняет наблюдаемое в реальных условиях увеличение скорости бурения с глубиной [2];

– проницаемость зоны D может измениться до 15% в зависимости от глубины и прочностных свойств горных пород.

Связь техногенной сейсмичности и вариации параметров напряженного состояния при обработке месторождений полезных ископаемых

Предложен метод поэтапного решения краевых задач на основе иерархии объемных геомеханических моделей. Граничные условия на первом – глобальном уровне формулируются на основе косвенной (сейсмотектонической, геодезической) информации о полях напряжений в литосфере. На втором (региональном) и третьем (локальном) уровне для этой цели используются результаты расчетов с предыдущего иерархического уровня, уточняемые по данным измерений in situ параметров геомеханических полей. Реализация подхода выполнена с использованием метода конечных элементов (сферическая и декартова системы координат, контакт-элементы для описания межблочного взаимодействия) для объектов «Центральной Азия и ее обрамление», «Алтае-Саянская складчатая область», «район рудных месторождений Горной Шории» и «Таштагольское железорудное месторождение». Для последнего объекта построена детальная геомеханическая модель, с использованием которой описан процесс эволюции напряженно-деформированного состояния при его отработке в 1978–2009 гг. Обоснован подход, позволяющий на основе статистического анализа характеристик пространственно-временного распределения очагов индуцированных горными работами динамических событий установить их количественную связь с параметрами напряженного состояния. Предложенный подход, апробированный с использованием базы данных сейсмических событий Таштагольского месторождения в 1989–2009 гг., позволяет на основе планов горных работ и форвардных расчетов полей напряжений дать прогнозную количественную оценку уровня техногенной сейсмичности и локализации в пространстве очагов динамических явлений при отработке месторождений полезных ископаемых.

Обратные задачи геомеханики

При моделировании геомеханических полей в природных объектах различного масштабного уровня всегда присутствует элемент неопределенности, связанный, например, с недостатком данных о свойствах среды или действующих в породном массиве напряжениях. В таких случаях целесообразно сформулировать и решить обратную задачу соответствующего типа. В качестве входной информации могут выступать как прямые (результаты измерений деформаций, напряжений, смещений), так и косвенные (компоненты магнитного поля, сейсмотектонические деформации и их траектории) данные.

Граничные обратные задачи. Создан метод реконструкции краевых условий по информации о полях смещений или деформаций во внутренних точках области, заключающийся в построении дискретной функции Грина для соответствующей краевой задачи и последующей минимизации целевой функции. На этой основе предложен способ определения параметров эквивалентного точечного источника (типа двойной силы с моментом), моделирующего очаг готовящегося динамического события по изменению смещений на поверхности Земли, что позволяет дать априорную оценку координат гипоцентра и магнитуды предстоящего сейсмического события по GPS данным.

Коэффициентные обратные задачи. Предложен метод определения параметров уравнений состояния, описывающих реологические процессы деформирования и разрушения горных пород, базирующийся на решении обратных задач по данным измерений in situ изменения размеров подземных полостей в процессе отработки месторождения. Оказалось, что соответствующая целевая функция (среднее квадратичное отклонение модельных и измеренных величин конвергенции кровли и почвы очистного пространства) имеет несколько расположенных на одной прямой локальных минимумов, что позволило создать эффективный алгоритм решения обратных задач, комбинирующий методы градиентного спуска и прямого поиска. На этой основе с использованием моделей ползучести и критерия накопления повреждений разработана методика оценки времени жизни целиков (типичных конструктивных элементов камерно-столбовой системы отработки месторождений полезных ископаемых) и последовательности их разрушения, что позволило обосновать новую технологию добычи медных руд Джезказганского месторождения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 10-05-00736, 10-05-00835), Программы Президиума РАН №16.8 и Интеграционного Проекта СО РАН №60.

Список литературы

1. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996.

2. Калинин А.Г. Бурение нефтяных и газовых скважин. М.: ЦентрЛитНефтеГаз, 2008.

NON-LINEAR PROCESSES OF GEOMECHANICAL FIELDS EVOLUTION IN NATURAL AND TECHNOLOGICAL OBJECTS

L.A. Nazarova, I.N. Eltsov, L.A. Nazarov, M.I. Epov

The paper uses methods of the deformable solid mechanics to describe mining-induced irreversible deformation and fracture processes in a rock mass, and proposes to construct constitutive relations of a discontinuity based on the value of fractal dimensionality of edges of the discontinuity. A deep-hole drilling model is constructed and used to relate the dimensions of ruptured zones in the well bore area and the ratio of natural stress components. The authors developed a statistic approach to determining the quantitative relation between parameters of the mining-induced seismic activity and stress field evolution in rocks, and have approved this approach in a real-life object. The formulated and solved inverse coefficients and boundary value problems allow estimating life time of design elements, which extraction technology includes, and the focal parameters of an incipient seismic event by the geomedium monitoring data.

Keywords: rock mass, stress, strain, elastoplastic model, dilatation, evolution of geo-mechanical fields, borehole, inverse problem, mining-induced seismic activity.

УДК 550.34.013.4

КОЛЛЕКТИВНЫЕ ЭФФЕКТЫ ПОВЕДЕНИЯ ДЕФЕКТОВ ГЕОСРЕДЫ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ

И.А. Пантелеев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

pia@icmm.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Предложено статистико-термодинамическое описание эволюции ансамбля дефектов в геосреде с целью моделирования процесса формирования потенциального очага землетрясения. Полученные определяющие соотношения позволили провести численное моделирование завершающей стадии образования очага землетрясения и процесса распространения «медленных» волн.

Ключевые слова: теория структурно-скейлинговых переходов, локализация разрушения, режимы с обострением, потенциальный источник землетрясения.

Значительный интерес вызывает в последние десятилетия разработка подходов, отражающих нелинейные особенности процесса разрушения, сейсмических процессов в земной коре, обусловленных коллективными свойствами ансамблей дефектов, и связанные с ними проявления пространственно-временной инвариантности. Несмотря на расширение сетей по регистрации сейсмической активности, огромный объем данных о феноменологических закономерностях землетрясений, это природное явление остается одним из наиболее катастрофических и недостаточно прогнозируемых.

Широкое развитие в последнее время получили концепции, согласно которым возникновение сильного землетрясения может быть описано как поведение физической системы в окрестности критической точки [1, 2]. Это означает, что с приближением момента сильного землетрясения индивидуальное поведение структурных элементов геосреды становится менее существенным, в отличие от коллективных эффектов, охватывающих все пространственно-временные масштабы системы и преобладающих в области возникновения наступающего землетрясения.

Согласно модели лавинно-неустойчивого трещинообразования [3] процесс формирования источника землетрясения состоит из трех стадий: стадии однородного накопления несплошностей в объеме геосреды, стадии формирования потенциальной области источника землетрясения, самоорганизованного коллективного роста, взаимодействия несплошностей внутри этой области и третьей стадии, которую отличает начало неустойчивой деформации, локализованной в узкой области развивающегося макроразрыва.

Одним из первых появившихся формализованных подходов для описания указанных стадий была реологическая модель В.П. Мясникова и В.А. Ляховского [4–6]. Введение в рамках данной модели безразмерных переменных, определяющих степень поврежденности материала и степень взаимодействия между трещинами, позволило описать первую и вторую стадии развития формирования источника землетрясения.

Существенным недостатком вышеописанных подходов является несостоятельность при описании третьей стадии подготовки землетрясения, при которой происходит неустойчивый катастрофический рост поврежденности в локализованной пространственной области, уменьшающейся с течением времени. Причем характерные времена протекания этого процесса могут быть на порядки меньше характерных времен изменения внешней нагрузки.

Целью настоящего исследования – описание завершающей стадии формирования очага землетрясения с помощью статистической модели среды с дефектами, разрабатываемой в Лаборатории физических основ прочности Института механики сплошных сред УрО РАН, учитывающей коллективные эффекты в ансамбле типичных дефектов (микросдвигов). При этом предполагается, что источник землетрясения не связан с существующим разломом, а формируется благодаря нелинейному самоорганизованному поведению ансамбля дефектов.

В рамках статистического описания поведения ансамбля дефектов вводится макроскопический тензор плотности дефектов $\widetilde{p}$, определяемый усреднением по статистическому ансамблю микросдвигов $\widetilde{s} = (\mathbf{vn} + \mathbf{nv})/2$ (здесь $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$ – единичные векторы нормали и направления сдвига, $\widetilde{s}$ – интенсивность сдвига) и совпадающий по смыслу с деформацией, обусловленной дефектами. Процедура усреднения приводит к уравнению самосогласования, определяющему зависимость макроскопического тензора плотности дефектов (деформации, обусловленной дефектами) от величины внешних напряжений, исходной структуры и взаимодействия дефектов, которое в безразмерном случае содержит только один параметр – параметр структурного скейлинга δ. Параметр структурного скейлинга $\delta \sim (R/r_0)^3$ определяется отношением характерных структурных масштабов для твердых тел с мезодефектами (r_0 – характерный размер зародыша данного дефекта, R – среднее расстояние между дефектами). Дополнительный параметр порядка δ следует естественным образом из решения статистической задачи и имеет структуру, аналогичную концентрационному параметру, введенному С.Н. Журковым в [7].

Решение уравнения самосогласования позволило выявить три характерных реакции материала с дефектами на рост напряжения, которые определяются величиной параметра структурного скейлинга, имеющего две точки бифуркации.

Ранее показано, что реакция материала на внешнюю нагрузку в случае квазихрупкого разрушения соответствует ситуации, когда плотность микросдвигов лавинообразно растет в локальной области, уменьшающейся с течением времени. Такой сценарий развития дефектов в материале совпадает с общепризнанным качественным описанием третьей стадии подготовки землетрясения согласно модели лавинно-неустойчивого трещинообразования и позволяет использовать данный подход для моделирования кинетики плотности дефектов на завершающей стадии подготовки.

В предположении, что появлению одиночного землетрясения соответствует момент обострения (обращения в бесконечность) одиночной локализованной дефектной структуры, проведено численное моделирование обострения одиночной локализованной структуры возмущением поля напряжения. Показано, что возмущение поля напряжения небольшой амплитуды может инициировать обострение одиночной локализованной дефектной структуры, находящейся в равновесии. При этом величина амплитуды возмущения, необходимая для инициирования обострения структуры, определяется близостью расположения системы к критической точке. Установлено, что возмущение поля напряжения и соответствующее ему возмущение поля плотности микросдвигов распространяются со скоростью, меньшей характерной скорости звука в материале. При этом скорость распространения возмущений в системе зависит как от среднего уровня поврежденности, так и от среднего уровня напряжения, что определяет ее «квазиакустический» характер распространения.

Учет эволюции дефектной структуры среды позволил провести численное моделирование процесса распространения «медленных» волн – возмущений поля напряжения и плотности дефектов, распространяющихся со скоростью, намного меньшей характерной скорости звука в среде.

В рамках рассматриваемого подхода показано, что процесс эволюции одиночной дефектной структуры генерирует возмущение поля напряжения, способное инициировать соседние равновесные локализованные дефектные структуры и создать условия для развития каскада землетрясений.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН «Фундаментальные проблемы механики взаимодействий в технических и природных системах» №09-П-1-1010, РФФИ (грант №10-05-96065-р_урал_а) и прграммы Президиума УрО РАН для молодых ученых (грант №10-1-НП-233).

Список литературы

1. Садовский М.А., Писаренко В.Ф. Случайность и неустойчивость в геофизических процессах // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1989 №2. С. 3–12.

2. Тюпкин Ю.С. Динамика формирования потенциального очага землетрясения // Физика Земли. 2004. №3. С. 26–33.

3. Мячкин В.И. Процессы подготовки землетрясения. М.: Наука, 1978. 232 с.

4. Lyakhovsky V.A., Ben-Zion Y., Agnon A. Distributed damage, faulting, and friction // J. Geophys. Res. 1997. Vol. 102. P. 27635–27649.

5. Lyakhovsky V.A., Myasnikov V.P. On behavior of viscoelastic cracked solid // Phys. Solid Earth. 1985. No 4. P. 28–35.

6. Tyupkin Yu. S. Earthquake source nucleation as self organization process // Tectonophysics. 2007. Vol. 431. P. 73–81.

7. Журков С.Н. Кинетическая концепция прочности твердых тел // Вестн. АН. СССР. 1968. Вып. 3. С. 46–52.

COLLECTIVE EFFECTS OF THE BEHAVIOR OF GEO-ENVIRONMENT DEFECTS DURING THE NUCLEATION OF A POTENTIAL EARTHQUAKES SOURCE

I.A. Panteleev

Statistical and thermodynamic description of the evolution of a defect ensemble is presented for simulating the process of earthquake source nucleation. The obtained defining equations make it possible to realize the numerical simulation of final earthquake source nucleation stage and of the propagation of «slow» waves.

Keywords: conception of structural-scaling transitions, damage localization, blow-up regimes, potential earthquake source.

УДК 551.513

ГЛОБАЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ КЛИМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ СЛОЖНОСТИ

В.П. Пархоменко

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва

Vparhom@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Модель состоит из взаимодействующих блоков: моделей океана, морского льда и атмосферы. Для описания термохалинной крупномасштабной циркуляции океана система уравнений модели океана рассматривается в геострофическом приближении с фрикционным членом (придонное трение) в уравнениях импульса по горизонтали. По вертикали принимается уравнение гидростатики. Уравнения дополняются уравнениями переноса и турбулентной диффузии тепла и солей. В термодинамической модели морского льда динамические уравнения решаются для сплоченности льда и для средней толщины льда. Для описания процессов, протекающих в атмосфере, используется энерго- и влаго-балансовая модель. В модели решаются вертикально проинтегрированные уравнения для переноса температуры и удельной влажности в режиме сезонного хода инсоляции. На поверхности океана предполагается воздействие ветра, обмен теплом и влагой. Используются реальная конфигурация материков и распределение глубин мирового океана.

Ключевые слова: гидродинамическая климатическая модель, геострофика, трение, численное решение.

Основные уравнения крупномасштабных течений в океане обычно записываются в приближении Буссинеска (постоянства плотности в горизонтальных уравнениях импульса и неразрывности, наличия силы Кориолиса, вертикальной и горизонтальной турбулентной вязкости) [1]. По вертикали принимается уравнение гидростатики. Уравнения дополняются уравнениями переноса и турбулентной диффузии тепла и солей, а также уравнением состояния для плотности, зависящей от температуры и солености. На поверхности океана предполагается воздействие ветра, обмен теплом и влагой.

Для стационарного случая при наличии придонного трения (фрикционного члена), пропорционального среднему по глубине потоку, и стационарного воздействия ветра осредненные по глубине уравнения объясняют эффект западной интенсификации течений в океане, влияния переменной глубины океана и воздействия ветра [1]. Можно предположить, что некоторое их обобщение и использование далее в качестве горизонтальных уравнений импульса может быть пригодно для описания термохалинной циркуляции мирового океана.

С учетом этих соображений система уравнений модели океана рассматривается в геострофическом приближении с фрикционным членом в уравнениях импульса по горизонтали. Значения температуры T и солености S удовлетворяют адвекционно-диффузионным уравнениям, что позволяет описать термохалинную циркуляцию океана. Приближенным образом учитываются также конвективные процессы.

Таким образом, система основных уравнений, записанных в локальных декартовых координатах (x, y, z), где x, y – горизонтальные координаты и z – высота, направленная вверх, имеет следующий вид:

– уравнения импульса по горизонтали

$$-lv+\lambda u=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_x}{\partial z},$$

$$lu+\lambda v=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_y}{\partial z};$$

– уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}=0;$$

– уравнение гидростатики

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g;$$

– уравнение состояния морской воды

$$\rho=\rho(S,T);$$

– уравнение переноса и диффузии трассеров X (температуры и солености)

$$\frac{d}{dt}X=k_h\nabla^2 X+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_v\frac{\partial X}{\partial z}\right)+C,$$

в которых u, v, w – компоненты вектора скорости,

λ – переменный в пространстве фрикционный член, увеличивающийся к береговым границам и экватору, T, S, p – температура, соленость, давление соответственно; τ_x, τ_y – компоненты напряжения трения ветра; ρ – плотность воды; l – параметр Кориолиса, g – ускорение свободного падения, κ_v, κ_h – коэффициенты турбулентной диффузии трассеров по вертикали и горизонтали соответственно, C – источники.

Условие отсутствия нормального потока требуется на всех границах. На границах материков также принимаются равными нулю нормальные составляющие потоков тепла и солей. Океан подвергается воздействию напряжения трения ветра на поверхности. Потоки T и S у дна полагаются равными нулю, а на поверхности определяются взаимодействием с атмосферой.

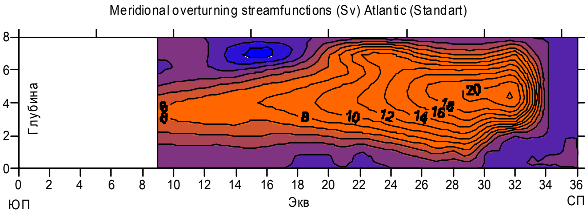
В термодинамической модели морского льда динамические уравнения решаются для сплоченности льда и для средней толщины льда. Рост и таяние льда в модели зависят только от разности между потоком тепла из атмосферы в морской лед и потока тепла изо льда в океан. Для температуры поверхности льда решается диагностическое уравнение.

Для описания процессов, протекающих в атмосфере, используется энерго- и влаго-балансовая модель, в которой решается вертикально проинтегрированное уравнение для температуры, определяющее баланс приходящего и уходящего радиационных потоков, явных (турбулентных) обменов потоками тепла с подстилающей поверхностью, высвобождения скрытого тепла из-за осадков и простой однослойной параметризации горизонтальных процессов переноса. Источники в уравнении переноса для удельной влажности определяются осадками, испарением и сублимацией с подстилающей поверхности.

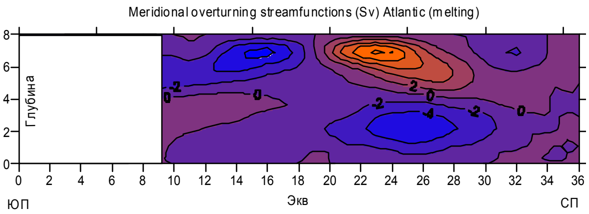
Все блоки модели связаны между собой обменом импульсом, теплом и влагой. Используются реальная конфигурация материков и распределение глубин мирового океана [2]. Уравнения в сферической системе координат решаются численным конечно-разностным методом. Глубина океана представляется в виде восьмиуровневой логарифмической шкалы до 5000 м. Начальное состояние системы характеризуется постоянными температурами океана, атмосферы и нулевыми скоростями течений океана. Численные эксперименты показывают, что модель выходит на равновесие за период около 2000 лет.

Резкое потепление климата может вызвать быстрое таяние и разрушение ледяных континентальных щитов Гренландии, что приведет к значительным поверхностным выбросам пресной воды в области Северной Атлантики.

В численном эксперименте предполагается, что в течение 25 лет в области 50°–70° северной широты в Атлантике происходят выбросы 1 Зв пресной воды. На рис. 1 приведена меридиональная функция тока (Зв) для современных условий (*а*) и при дополнительных выбросах пресной воды (*б*) (Атлантический океан, июль). Расчет ведется с установившихся условий (рис. 1*а*) на период 200 лет. Более легкая пресная вода препятствует возникновению конвекции и существенно ослабляет меридиональную термохалинную циркуляцию (рис. 1*б*).



а)



б)

Рис. 1

Максимум меридионального потока уменьшается с 28 до 15 Зв примерно через 25 лет. Эффект ослабления потока сохраняется вплоть до 200 лет, несмотря на прекращение выбросов пресной воды. Блокировка термохалинной циркуляции ведет к понижению температуры воздуха на 1.4 °С в соответствующей области, а также влияет на глобальный климат.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант №08-01-00607.

Список литературы

1. Кочергин В.П. Теория и методы расчета океанических течений. М.: Наука, 1978. 128 с.

2. Marsh R., Edwards N.R., Shepherd J.G. Development of a fast climate model (C-GOLDSTEIN) for Earth System Science // SOC. 2002. No 83. 54 p.

GLOBAL CLIMATE HYDRODYNAMIC MODEL OF INTERMEDIATE COMPLEXITY

V.P. Parkhomenko

The model consists of the coupled model blocks of the ocean, atmosphere and sea ice. The ocean model is based on the planetary geostrophic equations, with the addition of a linear drag term to the horizontal momentum equations. In the resulting frictional geostrophic system, density depends nonlinearly on the local values of temperature and salinity, which obey separate advection-diffusion equations and are also subject to convective adjustment. Energy-moisture balance model of the atmosphere is used. The prognostic variables are air temperature and specific humidity at the surface. The model solves a vertically integrated equation for air temperature by balancing incoming and outgoing radiation fluxes, sensible (turbulent) heat exchange with the underlying surface, latent heat release due to precipitation, and a simple one-layer parameterization of horizontal transport processes. The corresponding transport equation for humidity is forced only by precipitation and by evaporation and sublimation at the underlying surface. A simple representation of sea ice thermodynamics is used. Dynamical equations are solved for the fraction of the ocean surface covered by sea ice in any given region and the average height of sea ice. The model components are coupled by exchanges of the three basic quantities, momentum, heat and fresh water. Real continents and ocean depth distributions are applied.

Keywords: hydrodynamic climate model, frictional geostrophic system, numerical solution.

УДК 539.4

МОДЕЛИ ТРЕЩИНЫ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ БЕРЕГОВ ДЛЯ НАНОКОМПОЗИТОВ

М.Н. Перельмутер

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

perelm@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Развиты модели прочности и трещиностойкости нанокомпозитов, основанные на рассмотрении зоны процесса разрушения вблизи вершины трещины. Участок ослабленных или нарушенных связей в нанокомпозите моделируется трещиной, между берегами которой действуют силы сцепления, обусловленные присутствием нанотрубок или наночастиц.

Ключевые слова: нанокомпозиты, нанотрубки, прочность, разрушение, трещиностойкость, концевая область.

Введение

Значительное увеличение трещиностойкости нанокомпозитов с полимерной или керамической матрицей обусловлено упрочняющим влиянием нанотрубок, нановолокон и наночастиц. Экспериментально установлено, что связи между берегами трещины, образованные этими включениями, препятствуют развитию разрушения. Причем в большинстве случаев размер части трещины, занятой связями (далее концевой области трещины), сравним с размером всей трещины [1–4]. Приближенные методы оценки трещиностойкости, основанные на рассмотрении трещины с малой концевой областью, при этом неприменимы.

В настоящем исследовании модель трещины с концевой областью используется для описания трещиностойкости нанокомпозитов. Участок ослабленных или нарушенных связей в нанокомпозите моделируется трещиной, между берегами которой действуют силы сцепления, обусловленные присутствием нанотрубок или нановолокон, сдерживающих раскрытие трещины. Размер зоны взаимодействия берегов трещины (концевая область) может меняться в процессе роста трещины и не является малым по сравнению с размером всей трещины.

Математическое описание модели трещины со связями в концевой области состоит из трех основных этапов: 1) установления зависимости сил сцепления в концевой области от раскрытия трещины; 2) определения напряженного состояния в близи трещины с учетом внешних нагрузок и сил сцепления; 3) анализа предельного равновесия трещины на основе критерия разрушения.

Для связей между берегами трещины, образованных нанотрубками и нановолокнами, получен закон деформирования связей, основанный на рассмотрении сдвигового взаимодействия между волокном и матрицей. Система сингулярных интегро-дифференциальных уравнений для определения напряжений в связях и перемещений берегов трещины получена, исходя из принципа суперпозиции для случая трещины, расположенной на границе между полуплоскостями из различных материалов [5–8]. Для тел конечных размеров расчетная методика основана методе граничных интегральных уравнений [9].

Критерий разрушения

Для анализа квазистатического роста трещины с концевой областью, заполненной связями, предложен критерий разрушения [5, 6, 10–12], учитывающий работу по деформированию связей в концевой области трещины. В рамках этого критерия состоянию предельного равновесия вершины трещины соответствует энергетическое (необходимое) условие – равенство скорости высвобождения энергии деформации в вершине трещины $G_{\text{tip}}(d, l)$ и скорости потребления энергии деформации связями в концевой области трещины $G_{\text{bond}}(d, l)$. Разрыв связей на краю концевой области определяется условием их предельной вытяжки (достаточное условие разрушения):

$$G_{\text{tip}}(d,l) = G_{\text{bond}}(d,l), \quad u(l-d) = \delta_{\text{cr}}. \quad (1)$$

Здесь l – длина трещины, d – размер концевой области, $u(l-d)$ – раскрытие трещины на краю концевой области. Параметр δ_{cr} определяется свойствами связей в концевой области трещины, также он может зависеть от масштаба трещины. Из совместного решения уравнений (1) можно определить размер концевой области d_{cr} и критическое внешнее напряжение σ_{cr} в состоянии предельного равновесия трещины. Скорость потребления энергии деформации $G_{\text{bond}}(d_{cr}, l)$, полученная из совместного решения уравнений (1), является энергетической характеристикой сопротивления адгезионному разрушению, $G_{cr} = G_{\text{bond}}(d_{cr}, l)$, причем величина G_{cr} не остается постоянной при изменении длины трещины. После определения критического внешнего напряжения могут быть также определены критический коэффициент интенсивности напряжений и поток энергии в вершину трещины, обусловленные внешней нагрузкой σ_{cr}. Рассмотрим условия:

$$\begin{aligned} &\text{условие 1:}\ \text{а)}\ G_{\text{tip}}(d,l) \ge G_{\text{bond}}(d,l), \\ &\qquad\qquad\quad \text{б)}\ G_{\text{tip}}(d,l) < G_{\text{bond}}(d,l); \\ &\text{условие 2:}\ \text{а)}\ u(l-d) < \delta_{\text{cr}}, \\ &\qquad\qquad\quad \text{б)}\ u(l-d) \ge \delta_{\text{cr}}. \end{aligned} \tag{2}$$

При монотонном нагружении тела для заданных начальных размеров трещины и ее концевой области можно выделить режимы равновесия и квазистатического роста трещины. При выполнении условий 1а и 2а происходит продвижение вершины трещины с одновременным возрастанием длины концевой области без разрыва связей. Этот этап роста трещины можно рассматривать как процесс приспособляемости трещины к заданному уровню внешних нагрузок (докритический рост трещины). Продвижение вершины трещины с одновременным разрывом связей на краю концевой области (квазистатический рост трещины) происходит при одновременном выполнении условий 1а и 2б. При выполнении условий 1б и 2б происходит разрыв связей без продвижения вершины трещины, размер концевой области сокращается, стремясь к предельному значению для данного уровня нагрузки. В рамках рассматриваемой модели положение концевой области и вершины трещины не меняется при одновременном выполнении условий 1б и 2а. Предельные случаи трещины, полностью заполненной связями, а также трещины с малой концевой областью рассмотрены для задачи о прямолинейной трещине в однородном теле с постоянными напряжениями в связях [12]. На основе предложенного критерия разрушения для случая трещины, полностью заполненной связями (зона ослабленных связей в материале), даны оценки прочности бездефектного материала. Для напряжений в связях, зависящих от раскрытия трещины, получены зависимости прочности и трещиностойкости нанокомпозитов от длины трещины и концентрации наполнителя.

Список литературы

1. Qian D., Dickey E.C., Andrews R., Rantell T. Load transfer and deformation mechanisms on carbon nanotube-polystyrene composites // App. Phys. Let. 2000. V. 76, No 20. P. 2868–2874.

2. Xia Z. et al. Direct observation of toughening mechanisms in carbon nanotube ceramic matrix composites // Acta Materiala. 2004. V. 52. P. 931–944.

3. Srivastava D., Wei C., Cho K. Nanomechanics of carbon nanotubes and composites // App. Mech. Rev. 2003. V. 56, No 2. P. 215–230.

4. Watts P.C.P., Hsu W.K. Behaviors of embedded carbon nanotubes during film cracking // Nanotechnology. 2003. V. 14. L7–L10.

5. Goldstein R.V., Perelmuter M.N. Modeling of bonding at an interface crack // International J. of Fracture. 1999. V. 99, No 1-2. P. 53–79.

6. Гольдштейн Р.В. Перельмутер М.Н. Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами // МТТ. 2001. №1. Р. 94–112.

7. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н. Рост трещин по границе соединения материалов // Проблемы механики: Сб. статей к 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского. М.: Физматлит, 2003. С. 221–238.

8. Перельмутер М.Н. Трещина на границе раздела материалов с нелинейными связями в концевой области // ПММ. 2011. №1. С. 151–172.

9. Perelmuter M. Bridged interface cracks under transient thermal loading // Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics. 2007. V. 7, No 1. P. 4030033–4030034.

10. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н. Моделирование трещиностойкости композиционных материалов // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2, №2. С. 22–39.

11. Перельмутер М.Н. Критерий роста трещин со связями в концевой области // ПММ. 2007. №1. С. 152–171.

12. Перельмутер М.Н. Критерий роста трещин со связями в концевой области. Предельные случаи // Актуальные проблемы механики. Механика деформируемого твердого тела: Сб. трудов. М.: Наука, 2009. С. 166–179.

CRACK BRIDGING MODEL FOR NANOCOMPOSITES

M.N. Perelmuter

Models of strength and fracture toughness of nanocomposites are developed on the basis of the crack bridging approach. The region of weak or damaged bonds in nanocomposite is considered as a crack with a bridged zone. The bridging stresses in this zone are induced by nanotubes or nanoparticles which connect crack surfaces..

Keywords: nanocomposites, nanotubes, strength, fracture, toughness, bridged zone.

УДК 550.834

ГЕОФИЗИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОИСКА МЕСТОРОЖДЕНИЙ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ, ОСНОВАННЫЙ НА ЭФФЕКТЕ ВОЛН ОБЖАТИЯ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

В.А. Пухлий

Севастопольский национальный университет ядерной энергии и промышленности

pu1611@rambler.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Излагается геофизический метод поиска месторождений полезных ископаемых, связанный с высокочастотными колебаниями и сжимаемостью заполнителя (рыхлых пород) и им соответствующими волнами обжатия.

Ключевые слова: геофизический метод, полезные ископаемые, слоистые среды, волны обжатия, теория оболочек.

Среди геофизических методов сейсморазведка занимает первое место по многообразию геологических задач, решаемых с ее помощью. Наблюдение волн землетрясений раскрыли перед геофизиками в начале XX века возможности успешного зондирования недр Земли при помощи упругих колебаний и натолкнули на мысль применять для более детальных исследований искусственные землетрясения, возбуждаемые взрывами. Земные недра реагируют на деформации, передаваемые из очага возбуждения колебаний, как абсолютно упругая среда. Таким образом, необходимо, прежде всего, использовать законы распространения колебаний в идеально-упругих средах.

Большинство горных пород осадочного происхождения представляет собой модель слоистой среды с чередующимися слоями, как правило, анизотропной структуры. При анализе распространения сейсмовзрывных волн важное значение имеют физико-механические характеристики грунтовой среды. По структуре наиболее простым является однородный (изотропный) массив, который возможно использовать при расчетах в качестве первого приближения.

Для многослойных осадочных грунтовых массивов особенностью залегания пород является слоистость, которая выражается в чередовании различных слоев, при этом слоистость наиболее ярко проявляется при переходе от одного слоя к другому (чередование слоев гранита, базальта, известняка, песчаника, глины). Теоретическими исследованиями было установлено, что попытка учета подобных неоднородностей путем задания некоторых осредненных характеристик грунтового массива приводит к значительным погрешностям в расчетных значениях параметров движения и напряженного состояния грунта.

В настоящем исследовании излагается способ сейсмической разведки, основанный на использовании волн обжатия. Данное явление связано с обжатием заполнителя, при этом в качестве заполнителя рассматриваются рыхлые породы. Под рыхлыми породами в сейсморазведке подразумеваются различные группы пород: крупнообломочные (галечники, щебень, гравий); песчаные (пески различной крупности) и глинистые (супеси, суглинки, глины).

Открытие волн обжатия [1, 2] связано с высочастотными колебаниями и сжимаемостью заполнителя. При этом виде колебаний основные слои колеблются независимым образом в противофазе.

Решение указанной модельной задачи осуществляется на примере трехслойной среды с сжимаемым заполнителем, при этом вполне очевидно, что основные выводы распространяются и на многослойные массивы.

Для исследования динамического поведения трехслойной среды используется теория трехслойных оболочек с жестким сжимаемым заполнителем. Уравнения движения трехслойной оболочки с сжимаемым заполнителем получается из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского. Динамика поведения оболочки описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных 16-го порядка с переменными коэффициентами. Решение исходной системы уравнений основано на синтезе метода интегральных соотношений Дородницына и модифицированного метода последовательных приближений [3].

Рассматривается задача о собственных колебаниях трехслойной оболочки со сжимаемым заполнителем. Получено точное решение задачи. Из анализа полученных результатов следует:

– собственные частоты, связанные с обжатием заполнителя ω_1, на два-три порядка выше собственных частот ω_2, обусловленных общим изгибом оболочки;

– если обжатие заполнителя практически не учитывается, частоты ω_1 не претерпевают изменений; частоты ω_2, обусловленные общим изгибом, претерпевают значительные изменения.

Рассмотренная модельная задача позволяет сделать следующие выводы:

1. Разработана математическая модель динамического поведения многослойных массивов на основе теории трехслойных оболочек с учетом обжатия заполнителя и возникновения волн обжатия.

2. Учет обжатия заполнителя (рыхлых пород) связан с изучением высокочастотных колебаний и им соответствующих волн обжатия.

3. Эффект возникновения волн обжатия заполнителя (рыхлых пород) может быть с успехом использован в высокочастотной сейсморазведке.

Предлагаемый геофизический метод, основанный на эффекте волн обжатия в слоистых средах, характеризующихся сжимаемостью заполнителя (рыхлых пород), может использоваться при разведке урановых месторождений выщелачиваемого песчаникового типа – одного из видов экзогенных месторождений урана. При этом большинство урановых месторождений песчаникового типа, расположенных на периферии нефтегазовых полей, отличается тесной взаимосвязью с нефтью и газом.

Работа поддержана РФФИ (проект 10-08-00381-а).

Список литературы

1. Пухлий В.А. Об одном типе волн в слоистых средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. М.: Изд-во РАН, 2002. №6. С. 90–99.

2. Пухлий В.А. Динамика и прочность трехслойных оболочек сложной геометрии и переменной жесткости // IX Всерос. съезд по теоретич. и прикл. механике: Аннот. докл. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2006. Т. 3. С. 179.

3. Пухлий В.А. Численные методы. Теория и практикум в среде MATLAB: в 2-х т. Севастополь: Черкасский ЦНТЭИ, 2007. Т. 1. 412 с.; 2008. Т. 2. 742 с.

A GEOPHYSICAL METHOD OF PROSPECTING FOR MINERAL DEPOSITS BASED ON THE EFFECT OF CONTRACTION WAVES IN LAYERED ENVIRONMENTS

V.A. Puhly

The paper presents a geophysical method of prospecting for mineral depositss, connected with high-frequency fluctuations and compressibility of a filler (rare rocks) and the related contraction waves.

Keywords: geophysical method, deposits of the minerals, layered environments, waves contractility, theory of shells.

УДК 539.5

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ МЕЗОДЕФЕКТОВ ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ МЕТАЛЛОВ

Г.Ф. Сарафанов, В.Н. Перевезенцев

Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

sarafanov@mts-nn.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Проведено аналитическое исследование самосогласованной динамики дислокационного ансамбля в упругих полях первичных мезодефектов (стыковой дисклинации, планарного скопления дислокаций и дисклинационного диполя), формирующихся в границах и стыках зерен в процессе пластической деформации. Показано, что эти мезодефекты вызывают расслоение однородного потока дислокаций и формируют области повышенной плотности дислокационного заряда. Такое перераспределение дислокаций эффективно экранирует упругие поля мезодефектов, существенно понижает энергию системы и создает предпосылки для формирования вторичных мезодефектов в виде оборванных дислокационных границ, обусловливающих взаимные развороты кристаллической решетки и разбиение исходных зерен на субзерна.

Ключевые слова: пластическая деформация, фрагментация, мезодефекты, границы зерен.

Экспериментально установлено, что большие пластические деформации приводят к фрагментации кристаллических материалов и формированию микро- и субмикрокристаллических структур. Деформационное измельчение (фрагментация) структуры материалов заключается в разбиении исходных зерен поликристаллов на более мелкие разориентированные области (субзерна), разделенные малоугловыми или среднеугловыми границами. Исследования феномена фрагментации позволили заключить [1, 2], что в поликристаллах его первопричиной являются мощные упругие напряжения, источники которых (пластические несовместности, трактуемые как мезодефекты) возникают на межзеренных границах. Появление таких мезодефектов неизбежно, так как кристаллические зерна по-разному ориентированны относительно внешних напряжений и поэтому по-разному деформируются.

Среди мезодефектов, образующихся при пластической деформации, можно выделить три типа характерных мезодефектов, представляющих собой «строительные» блоки процесса фрагментации. Во-первых, это стыковая дисклинация, которая формируется в стыках или изломах исходных границ в результате накопления на них дополнительных разориентировок. Вторым типичным зародышем фрагментации является дисклинационный диполь, возникающий при пластической деформации на двойном изломе границы зерна. Для этой системы также существует тенденция понижения упругой энергии путем достройки диполя выходящими в тело одного из зерен оборванными дислокационными границами разного знака, т.е. путем формирования полосы переориентации. Третьим характерным мезодефектом является планарный мезодефект эквидистантно распределенных краевых дислокаций. Чисто геометрический анализ [3] не дает ответа на вопросы, как в окрестности мезодефектов динамически образуются субграницы, и почему они, будучи оборванными, являются устойчивыми. На эти вопросы может дать ответ только исследование самосогласованной коллективной динамики распределенного дислокационного ансамбля в упругом поле дисклинаций (мезодефектов) [4–6].

Поведение ансамбля дислокаций описывалось системой эволюционных уравнений для плотности дислокаций $\rho_a(\mathbf{r},t)$ и функции напряжений Эйри $\psi^{eff}(\mathbf{r},t)$ системы дефектов:

$$\frac{\partial\rho_a}{\partial t} + \mathrm{div}[\rho_a \hat{M}_a(\mathbf{f}_a + \mathbf{f}_a^{eff})] = F_a(\rho_a),$$
$$\mathbf{f}_a^{eff} = -b_a\nabla\frac{\partial\psi^{eff}}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\psi^{eff}(\mathbf{r},t) = \sum_i \psi(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i) +$$
$$+\sum_{a=\pm}\int\rho_a(\mathbf{r}',t)\psi_a^e(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)d\mathbf{r}', \tag{2}$$

где $\psi(\mathbf{r}) = (D\omega/2)(r^2\ln(r/R_c) - r^2/2)$ – функция напряжений Эйри клиновой дисклинации; $\psi_a^e(\mathbf{r}) = -b_a Dy\ln(r/R_c)$ – функция напряжений Эйри краевой дислокации; $\mathbf{f}_a$ – сила Пича – Келера, обусловленная внешним полем $\sigma_e = \sigma_{xy}^{(e)}$; $\mathbf{f}_a^{eff}$ – сила, действующая на дислокации со стороны упругого поля системы дефектов; $\hat{M}_a$ – тензор подвижности дислокаций, $F_a(\rho_a)$ – нелинейные функции, ответственные за кинетику дислокаций, $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор, задающий расположение дисклинаций.

Исследование (1), (2) показало, что дисклинации своими дальнодействующими полями напряжений возмущают ламинарный поток решеточных дислокаций, вызывая расслоение их однородного распределения и формируя в прилегающих объемах зерна области избыточной плотности дислокаций $I = \rho_+ - \rho_-$. Для случая одиночной клиновой дисклинации (при $\mathbf{r}_i = 0$) решение имеет вид:

$$I(x,y) = \frac{\omega}{\pi b r_d}\,\mathrm{sh}(y/r_d)K_0(r/r_d), \qquad (3)$$

где ω – мощность дисклинации, r_d – радиус экранирования упругого поля, $K_0(r)$ – функция Макдональда нулевого порядка. Соответствующий график зависимости $I = I(x, y)$ и эффективное поле сдвиговых напряжений $\sigma_{xy}^{eff} = -\partial^2\psi^{eff}/\partial x\partial y$ показаны на рис. 1*а* и *б* соответственно.

ной с ней разориентировки кристалла. Для геометрии, рассматриваемой в настоящей работе, имеем

$$\theta_{st} = \frac{\omega}{\pi\beta}\int_0^\beta\int_{-\beta}^\beta \mathrm{sh}(y')K_0(r')dx'dy', \qquad (5)$$

где $\beta = R/2r_d$, $y' = y/r_d$, $x' = x/r_d$, $r' = r/r_d$. Анализ интеграла (5) показывает, что при $\beta >> 1$ его значение стремится к значению $\theta_{st} = 0.5\omega$. Таким образом, дисклинация собирает вокруг себя дислокационный заряд, который создает разориентировку прилегающих к нему областей кристалла, примерно равную половине мощности дисклинации. Аналогичный результат для разориентированных областей ($\theta_{st} = 0.5\omega$) мы имеем и в случае дисклинационного диполя.

Итак, важным следствием эффекта самосогласованного перераспределения дислокаций в условиях их кинетики в поле дисклинации явилось то, что дисклинация собирает вокруг себя дислокационный заряд, который создает разориентировку прилегающих к нему областей кристалла, примерно равную половине мощности дисклинации ($\theta_{st} = 0.5\omega$). Области разориентации формируются вдоль линий нулевого уровня экранированного поля напряжений σ_{xy}^{eff} диск-

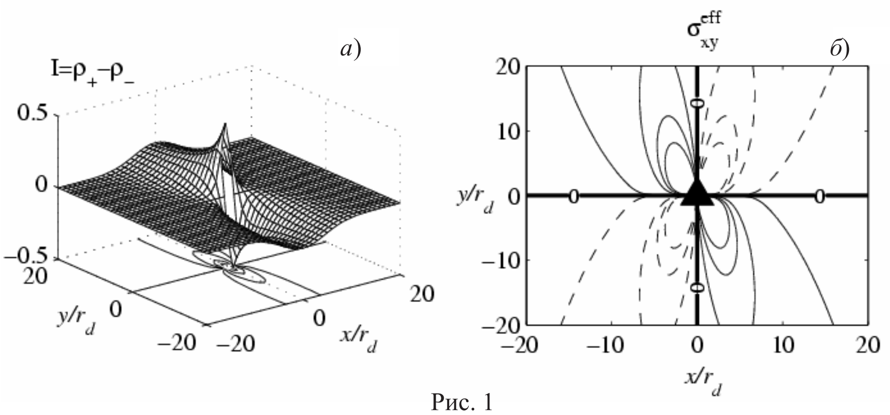


Рис. 1

линаций перпендикулярно действующей системе скольжения дислокаций (рис. 1*б*). Эти области являются сугубо динамическими образованиями и имеют кинетическую природу возникновения.

Оказалось, что такое перераспределение дислокаций в упругом поле дисклинации способно существенно понизить общую упругую энергию системы кристалла в области размера R:

$$W_e = \frac{\sqrt{\pi}}{4}D\omega^2 r_d^2\sqrt{\frac{R}{r_d}}. \qquad (4)$$

Сравнивая эту энергию с энергией $U = D\omega R^2/8$ неэкранированной дисклинации, получаем, что имеет место существенное снижение упругой энергии для дисклинации, экранированной системой избыточных дислокаций, распределенных по закону (3).

Пользуясь выражением для избыточной плотности (3), нетрудно определить величину связан-

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 09-02-97032-р, 10-02-00508-а).

Список литературы

1. Рыбин В.В. Большие пластические деформации и разрушение металлов. М.: Металлургия, 1986. 224 с.
2. Рыбин В.В. // Вопросы материаловедения. 2002. Вып. 1(29). С. 11–33.
3. Владимиров В.И., Романов А.Е. Дисклинации в кристаллах. Л.: Наука. 1986. 224 с.

4. Сарафанов Г.Ф., Перевезенцев В.Н. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31, вып. 21. С. 73–78.
5. Сарафанов Г.Ф., Перевезенцев В.Н. // ФТТ. 2007. Т. 49, вып. 10. С. 1780–1786.
6. Сарафанов Г.Ф., Перевезенцев В.Н. // ФТТ. 2009. Т. 51, вып. 12. С. 2309–2314.

THE LAWS OF MESODEFECTS FORMATION DURING PLASTIC DEFORMATION OF METALS

G.F. Sarafanov, V.N. Perevezentsev

Analytical investigation of dislocations ensemble self-consistent dynamics in the elastic fields of initial mesodefects (junction disclination, planar groups of dislocations and disclination dipole) generating in boundaries and junctions of grains during plastic deformation is made. It is shown that these mesodefects lead to stratification of the initially homogeneous dislocation flow and generate regions of increased dislocation charge density. Such re-distribution of dislocations effectively screens elastic fields of mesodefect, essentially decreases the system energy and preconditions the formation of the secondary mesodefects, such as broken dislocation boundaries providing misorientations of crystall lattice regions and dividing initial grains to sub-grains.

Keywords: plastic deformation, fragmentation, mesodefects, grain boundaries.

УДК 681.2

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОВРЕМЕННЫХ МЕТОДОВ АНЕМОМЕТРИИ ПО ИЗОБРАЖЕНИЯМ ЧАСТИЦ (PIV-МЕТОДОВ) ПРИ ЛАБОРАТОРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Д.А. Сергеев

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

daniilser@mail.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Одним из направлений современной океанологии и физики атмосферы является лабораторное моделирование геофизических течений. Предложен новый измерительный комплекс и усовершенствованы алгоритмы для исследования течений сплошных сред (жидкостей и газов) с помощью современного метода гидрофизического эксперимента Particle Image Velocimetry (PIV-метода). Новый измерительный комплекс специально адаптирован для использования при моделировании геофизических течений. С его помощью были проведены эксперименты по моделированию мелкомасштабных процессов в пограничных слоях атмосферы и океана. Приведены два основных примера: 1) моделирование процессов загрязнения подводными системами сброса сточных вод прибрежной зоны стратифицированного океана; 2) исследование параметров течения в турбулентном пограничном слое воздушного потока над взволнованной поверхностью.

Ключевые слова: лабораторное моделирование, визуализация, PIV, геофизические течения, турбулентность, волны.

Введение

Лабораторное моделирование гидрофизических течений, наблюдающихся в атмосфере и мировом океане, является составной частью комплексных исследований физики окружающей среды. При проведении лабораторного гидрофизического эксперимента одной из наиболее сложных задач является измерение полей скорости течений сплошных сред (жидкостей, газов). С помощью точечных методов исследования зачастую трудно получить полную пространственно-временную картину эволюции течения в ходе одной реализации эксперимента. В связи с этим, уже давно используются методы измерения полей скорости, основанные на визуализации исследуемых течений. Одним из наиболее распространенных и современных среди этой группы методов является метод Particle Image Velocimetry (PIV) [1]. Принципы этого метода заключаются в следующем: в исследуемое течение добавляются частицы, течение подсвечивается лазерным ножом и снимается на цифровые видеокамеры. С помощью специальной программной обработки цифровых изображений, основанной на кросс-корреляционном анализе, вычисляют поля скорости течения в плоскости лазерного ножа. Классическая схема PIV-метода основана на применении мощных импульсных лазеров (1–10 МВт) с синхронной видеосъемкой специально применяемых для этого PIV-камер. Предложена схема на основе непрерывного твердотельного лазера с диодной накачкой (0.5–4 Вт) совместно со съемкой цифровыми камерами (в том числе высокоскоростными) без системы синхронизации. Применение подобной схемы позволило сделать систему более безопасной и простой в обслуживании и эксплуатации. Подробное техническое описание см. в [2]. Далее приведены примеры использования нового PIV-комплекса при лабораторном моделировании геофизических течений.

Исследование динамики плавучих турбулентных струй в стратифицированной жидкости

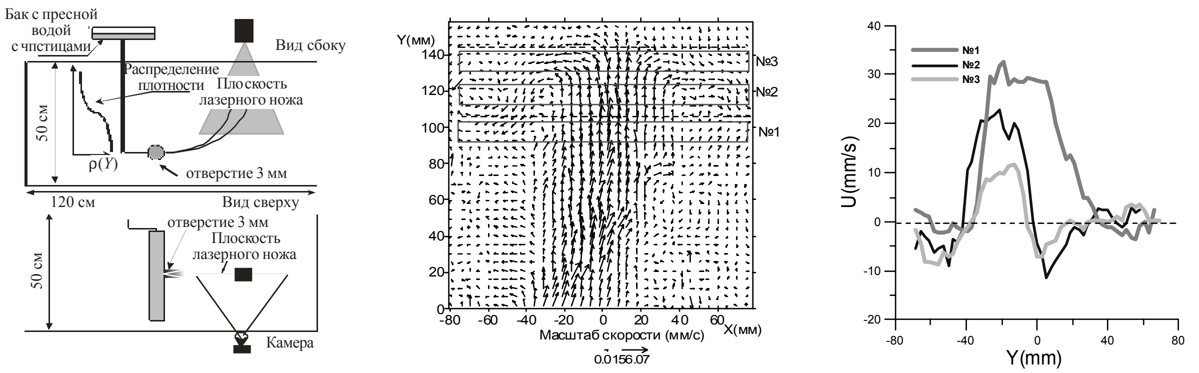
Интерес к моделированию динамики турбулентных плавучих струй в стратифицированной жидкости, в первую очередь, связан с проблемой загрязнения прибрежной зоны мирового океана системами сброса сточных вод городов и промышленных предприятий [3]. Схема лабораторного эксперимента показана на рис. 1*а*. В бассейне создавалась солевая стратификация пикноклинного типа. Из горизонтально расположенного отверстия со скоростью 70 см/с вытекала пресная вода, содержащая частички полиамида размером 20 мкм. Для визуализации движения частиц струя просвечивалась по оси вертикальным лазерным ножом.

Вид сбоку снимался на камеру с частотой 25 кадр/с. Обработка полученных изображений с помощью стандартных алгоритмов PIV позволила получить поле скорости течения в струе в области ее взаимодействия с пикноклином (рис. 1*б*). Хорошо видно, что струя тормозится стратификацией и распространяется на горизонте нейтральной плавучести. Видеосъемка также показала, что верхняя граница струи совершает колебания в вертикальной плоскости, при этом спектр колебаний имеет выраженный пик на частоте 0.1 Гц. На рис. 1*в* показаны мгновенные профили скорости в различных сечениях струи. Для того чтобы «сгладить» турбулентные флуктуации, вычислялся средний профиль скорости по соседним профилям (области усреднения отмечены рамками на рис. 1*б*).

3 – волнопродуктор, *4* – вентилятор с хонейкомбами, *5* – непрерывный лазер LCS-DTL-318 (532 нм, 0.5 Вт), *6* – скоростная видеокамера ВИДЕОСПРИНТ.

Поверхностные волны создавались с помощью управляемого волнопродуктора при фиксированной скорости ветра. В зоне последнего иллюминатора проводились измерения поля скорости ветрового потока новым PIV-комплексом. Специальное устройство позволяло вводить частицы полиамида 20 мкм в поток одновременно по всей высоте от поверхности жидкости до верхней границы окна съемки. Движение частиц в вертикальном лазерном ноже снималось сбоку. Скорость съемки составляла 1000 кадров в секунду.

На рис. 2*б* показан пример мгновенного поля скорости воздушного потока над передним



а) *б*) *в*)

Рис. 1

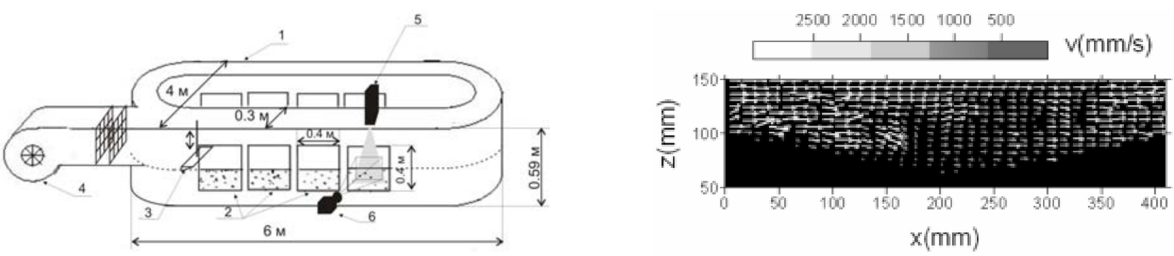
Исследования параметров ветрового потока над взволнованной водной поверхностью

Эксперименты по изучению характеристик течений в турбулентном пограничном слое ветрового потока над взволнованной поверхностью были проведены на овальном ветро-волновом лотке ИПФ РАН [4]. На рис. 2*а* представлена схема экспериментальной установки, где обозначено: *1* – лоток, *2* – иллюминаторы,

склоном волны, генерируемой волнопродуктором.

Автор выражает благодарность: Ю.И. Троицкой, Е.В. Ежовой, О.С. Ермаковой, В.И. Казакову, Г.Н. Баландиной за оказанную помощь в работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №09-05-00779, 10-05-00339), при поддержке ФЦП «Научно-педагогические кадры инновационной России 2009-2013».



а) *б*)

Рис. 2

Список литературы

1. Adrian R.J. Particle-imaging techniques for experimental fluid mechanics // Annu. Rev. Fluid Mech. 1991. V. 23. P. 261.
2. Сергеев Д.А. // ПТЭ. 2009. №3. С. 138–144.
3. Троицкая Ю.И. и др. Автогенерация внутренних волн всплывающими струями в стратифицированном бассейне // Докл. РАН. 2008. Т. 419, №2. С. 388–392.
4. Троицкая Ю.И. и др. Тонкая структура турбулентного пограничного слоя атмосферы над водной поверхностью // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46, №1. С. 119–130.

DEVELOPMENT OF PARTICLE IMAGE VELOCIMETRY METHODS FOR LABORATORY MODELING OF GEOPHYSICAL FLOWS

D.A. Sergeev

Laboratory modeling of geophysical flows is one of the main scopes of the environmental science (physical oceanography). A novel complex of equipment and algorithms of flow images analysis for studying flows based on modern Particle Image Velocimetry (PIV) is developed in the present work. The equipment was specially improved for using in experiments on laboratory modeling of geophysical flows. Laboratory modeling of the different turbulent flows and small scale processes in the boundary layer between atmosphere-ocean was carried out with new measuring technique. Two applications are described in details: 1) modeling of pollution of the coastal zone induced by submerged sewer systems; 2) investigation of the wind flow in the turbulent boundary layer over the wavy surface.

Keywords: laboratory modeling, visualization, PIV, geophysical flows, turbulence, waves.

УДК 532.543 + 551.4.08

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ ПРИРУСЛОВЫХ БАРОВ В МЕАНДРИРУЮЩИХ РЕКАХ

А.Н. Синев, Д.А. Притыкин

Московский физико-технический институт

Alex.Sinev@gmail.com

Поступила в редакцию 16.06.2011

Основываясь на известных математических моделях эволюции речных русел, можно предложить сравнительно простые алгоритмы, позволяющие реалистично воспроизводить строение прирусловых баров – песчанистых тел, имеющих в типичном случае серповидную форму в плане и клиновидную в вертикальном сечении. Модель состоит из двух блоков – «гидродинамического», описывающего меандрирование руслового канала, и «седиментологического» для учета процессов осадконакопления при перемещении русла.

Ключевые слова: математическое моделирование, гидрология, седиментология, меандрирующая река, русло, прирусловой бар, старицы.

Описание модели

Основной объект моделирования в настоящем исследовании – песчанистые тела, образующиеся в условиях осадконакопления аллювиального типа. Подобные комплексы отложений характеризуются сложной пространственной геометрией и неоднородным внутренним строением. Формирование песчанистых комплексов происходит под действием множества физических процессов. Используемая в наших исследованиях модель естественным образом подразделяется на «гидродинамический» и «седиментационный» блоки.

Гидродинамический блок. В настоящее время существует достаточно много математических моделей меандрирующих рек (примеры можно найти в [1–4]). Для нас наиболее удобной оказалась модель Икеды – Паркера [2], позволяющая на основе манипулирования с относительно простыми соотношениями получать вполне реалистическую картину перемещения русловой линии по речной долине.

Основополагающее уравнение модели Икеды – Паркера описывает изменение прибрежного смещения скорости – разности эффективной прибрежной скорости потока и средней. Оно возникает в результате линеаризации уравнений Сен-Венана в предположении постоянной ширины речного русла, большой его кривизны и стационарного характера течения. Скорость береговой эрозии прямо пропорциональна прибрежному смещению скорости.

В дополнение к плавной эволюции геометрии русла необходимо еще учесть и случающиеся время от времени резкие его изменения – авульсии. В частности, авульсия может быть обусловлена размывом прируслового вала. Авульсию несложно ввести в модель эволюции русла, если предполагать, что подобные явления на рассматриваемом временном интервале происходят только в местах, располагающихся выше по течению по отношению к изучаемому участку поймы палеореки (верхняя авульсия). В этом случае достаточно установить новое положение русла (например, на основе анализа текущего рельефа речной долины) и продолжить моделирование его эволюции на основе соотношений Икеды – Паркера.

Наконец, как и в реальных условиях, смещение русла при численном моделировании сопровождается образованием стариц – при сближении двух точек русловой линии на расстояние, меньшее ширины русла. Точки определяют участок русловой линии, образующий не претерпевающую эволюции старицу. Дальнейший итерационный процесс осуществляется с модифицированной русловой линией, из которой участок старицы удален. Существует и другой механизм образования стариц, связанный с уже упоминавшимся размывом прирусловых валов еще до описанного критического сближения; предполагается включить его в модель на следующих этапах исследования.

Седиментационный блок. Изменение геометрии меандрирующего речного русла обусловлено размывом вогнутых берегов и латеральной аккрецией на выпуклых берегах. Результатом латеральной акреции является формирование песчанистых тел сложной геометрии, называемых прирусловыми барами (в частности, при преимущественно боковом развитии меандров прирусловые бары имеют серповидную форму в плане). Нарушение относительной равномерности процесса латеральной аккреции при особо сильных наводнениях приводит к появлению в барах глинистых прослоек с относительно низкой проницаемостью, оказывающих существенное влияние на перемещение флюидов внутри осадочного комплекса.

Для того чтобы воспроизвести форму прируслового бара и найти положение глинистых прослоек, нет необходимости строить модель процесса аккреции. Эта задача решается с помощью простых геометрических построений. Вначале «гидродинамический» блок используется для отыскания положений береговых линий в определенные моменты времени. Для реалистичного описания неоднородностей фациального состава образующихся песчанистых тел, например, изменения гранулометрических характеристик и образования глинистых прослоек, можно выбирать в качестве моментов времени периоды половодья. Следующий шаг состоит в выделении серповидных фигур, границами которых служат полученные береговые линии. На последнем шаге плоские фигуры преобразуются в трехмерные тела на основе разумных гипотез о форме руслового канала. Например, можно предположить, что русловой канал имеет полуэллиптический профиль в поперечном сечении, и строить бар, принимая во внимание, какая его граница соответствует «внешнему» берегу излучины, а какая – «внутреннему».

Результаты моделирования

Визуализация результатов численного эксперимента дает представление о характерном строении песчанистых тел, формирующихся при меандрировании русла, а также о динамике изменения геометрии или миграции этих тел. В частности, рис. 1 изображает строение отложений при боковом развитии меандров.

Моделирование производится на трехмерной сетке, каждой ячейке сетки можно назначить одно или несколько свойств (пористость, проницаемость и т.д.).

Рис. 1

Дальнейшее развитие модели

Для многих приложений желательно обеспечить более детальное моделирование неоднородностей в распределении отлагающихся частиц. Например, известно, что нижняя часть бара сформирована из более крупных частиц, а верхняя – из более мелких.

Все эти эффекты давно изучаются гидрологами, предложены их математические модели, которые после соответствующей модификации могут быть включены в «седиментационный» блок.

Список литературы

1. Edwards B.D., Smith D.H. // Physical Review E. 2002. V. 65. P. 1–12.
2. Ikeda S.G., Parker G., Sawai K. // J. Fluid Mech. 1981. V. 112. P. 363–377.
3. Howard A.D. Lowland Flood Plain Rivers / Eds. by P.A. Carling, G.E. Petts. NY: John Wiley and Sons, 1992. P. 1–41.
4. Meakin P. et al. // Physica A. 1996. V. 233. P. 606–618.

MODELING THE GEOMETRY OF POINT BARS IN MEANDERING RIVERS

A.N. Sinev, D.A. Pritykin

Based on known mathematical models of evolution of river channels, relatively simple algorithms are developed to simulate the formation of point bars. These algorithms provide realistic simulation of point bars – sand bodies that are crescent-shaped in the horizontal section and wedge-like in the vertical one.

The proposed model comprises two blocks – the hydrodynamical block that accounts for the evolution of a meandering channel, the sedimentological block to simulate sedimentation processes in a channel.

Keywords: mathematical modeling, hydrology, sedimentology, meandering river, channel, point bar, oxbow lakes.

УДК 531.534: 57+61

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕКОНСТРУИРОВАННОГО СРЕДНЕГО УХА, ПОДВЕРГНУТОГО ТИМПАНОСТАПЕДОПЛАСТИКЕ И ПЕРФОРАЦИИ ПОДНОЖНОЙ ПЛАСТИНЫ СТРЕМЕНИ

И.Л. Славашевич, Г.И. Михасев

Белорусский госуниверситет, Минск

slavashevichi@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Предложена биомеханическая модель реконструированного среднего уха, подвергнутого тимпаностапедопластике и перфорации подножной пластины стремени. Изучено влияние тангенциальных перемещений в тимпанальной мембране на собственные частоты и формы колебаний реконструированного среднего уха. Реконструированная тимпанальная мембрана моделируется как изотропная упругая кольцевая пластинка.

Ключевые слова: среднее ухо, свободное колебание, звукопроводящая система, реконструкция, собственные частоты.

Введение

Механические повреждения барабанной перепонки, патологические изменения ее механических свойств, вызванные воспалительными процессами в среднем ухе, могут привести к перфорации барабанной перепонки, повреждению слизистой оболочки, слухового нерва. Тимпанопластика – это операция, направленная на ликвидацию воспалительного (гнойного) процесса в ухе, закрытие перфорации барабанной перепонки и восстановление трансмиссионного механизма слуховых косточек. Ограничение подвижности цепи звукопроводящих косточек при отосклеротическом анкилозе может привести к частичной или полной фиксации стремени. При данной патологии в клинической практике часто прибегают к стапедопластике, которая предполагает фенестрацию овального окна, заключающуюся в высверливании отверстия в подножной пластинке стремени, через которое вводится ствол протеза в улитку внутреннего уха [1]. Наиболее сложным является случай тотальной реконструкции, предполагающий одновременно тимпанопластику и стапедопластику с фенестрацией подножной пластинки [2]. В данном случае основание введенного протеза типа TORP упирается в восстановленную барабанную перепонку, а конец покоится в кохлеарной жидкости улитки.

Цель работы – построение динамической модели звукопроводящей системы реконструированного среднего уха при тимпаностапедопластике и перфорации подножной пластины стремени.

Постановка задачи. Разрешающие уравнения

Восстановленную колебательную систему среднего уха будем моделировать как систему, состоящую из круглой пластинки радиуса a, изготовленной из хрящевого имплантата, и сопряженного с ней твердого тела, моделирующего протез тира TORP (рис. 1*а*).

В статье [3] показано, что наиболее предпочтительной технологией установки протеза, с точки зрения минимизации начальных напряжений, является такая технология, когда основание протеза размещается на восстановленной тимпанальной мембране (ТМ) как можно ближе к центру. Рассмотрим здесь случай, когда центры восстановленной ТМ и основания протеза совпадают. Будем считать, что основание протеза и хрящевой имплантат жестко склеены, при этом пластину рассматриваем как кольцевую с внутренним радиусом b и внешним радиусом a. Пусть ствол протеза изогнут и составляет некоторый угол γ с исходным положением. Введем глобальную декартову систему координат (СК) $Oxyz$, связанную с центром пластины (см. рис. 1*б*). Уравнение колебаний предварительно напряженной ТМ запишем в виде [4]:

$$D\Delta^2 W(r,t) - \Delta_T W(r,t) + \rho h \frac{\partial^2 W(r,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$r\frac{\partial T_1}{\partial r}+T_1-T_2+\frac{\partial S}{\partial \varphi}=\rho h\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

$$r\frac{\partial S}{\partial r}+2S+\frac{\partial T_2}{\partial \varphi}=\rho h\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \qquad (2)$$

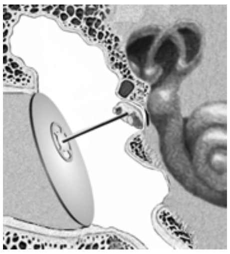
где

$$T_1=K\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\nu}{r}U+\frac{\nu}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right),$$

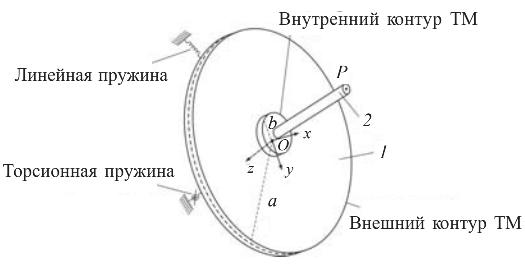
$$T_2=K\left(\nu\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r}U+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right),$$

$$S=\frac{K(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{1}{r}V+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)$$

– мембранные усилия в ТМ; D и K – жесткости пластины; h – толщина хрящевой пластины; ρ – плотность хрящевой ткани; W, U, V – нормальное, радиальное и касательное перемещения точек ТМ; Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат r, φ; Δ_T – оператор, учитывающий наличие начальных напряжений $T_1^\circ, T_2^\circ, S^\circ$ в пластинке, обусловленных вводом протеза [3].



а)



б)

Рис. 1

Рассматривается случай радиально-симметричных колебаний пластинки. На внутреннем контуре сопряжения пластины с основанием протеза принимаются условия жесткой заделки:

$$W\big|_{r=b}=W_p, \quad \left.\frac{\partial W}{\partial r}\right|_{r=b}=0,$$

$$U_{r=b}=-U_p\cos\varphi, \quad V\big|_{r=b}=U_p\sin\varphi, \qquad (3)$$

где U_p, W_p – тангенциальные перемещение основания протеза в плоскости ТМ.

На внешнем контуре восстановленной ТМ рассмотрены условия упругой заделки [3]:

$$(k_l w+Q_1)\big|_{r=a}=0, \quad \left.\left(k_t\frac{\partial W}{\partial r}+M_1\right)\right|_{r=a}=0,$$

$$U\big|_{r=a}=0, \quad V\big|_{r=a}=0. \qquad (4)$$

Рассматривается техника фенестрации овального окна, при которой подвижность протеза ограничивается направляющей перфорации подножной пластинки стремени. Уравнение движения протеза имеет вид:

$$Q_p-F_{st}\cos\gamma-R\sin\gamma=m\frac{\partial^2 W_p}{\partial t^2},$$

$$T_p-F_{st}\sin\gamma+R\cos\gamma=m\frac{\partial^2 U_p}{\partial t^2}, \qquad (5)$$

где Q_p – равнодействующая перерезывающих сил, возникающих вдоль внутреннего контура $r=b$ со стороны ТМ, а

$$F_{st}=k\delta \qquad (6)$$

– сила, являющаяся мерой взаимодействия внутреннего уха и основания стремени и возникающая в результате деформации мембраны круглого окна, δ – перемещение стержня, k – коэффициент «жесткости» системы «кохлеарная жидкость – мембрана круглого окна».

Ввиду того, что жесткость колебательной системы реконструированного среднего уха при фенестрации овального окна определяется исключительно степенью натяжения мембраны круглого окна [2], начальные мембранные усилия $T_1^\circ, T_2^\circ, S^\circ$ в ТМ невелики. Данное обстоятельство позволяет воспользоваться методом возмущения для интегрирования поставленной краевой задачи (1)–(5).

Исследовано влияние физических характеристик хрящевого имплантата, его толщины, а также размеров вводимого протеза и его ориентации в полости среднего уха на собственные частоты и формы свободных колебаний реконструированного среднего уха.

Список литературы

1. Huttenbrink K.-B. Mechanical aspects of middle ear reconstruction // Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery / Ed. K. B. Huttenbrink. Dresden: Univ. of Technology, 1997. P. 165–168.

2. Вульштейн Х. Слухулучшающие операции. М.: Медицина, 1972.

3. Mikhasev G., Ermochtnko S., Bornitz M. On the strain-stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus-incus prosthesis // Mathematical Medicine and Biology. 2010. Vol. 27(4). P. 289–312.

4. Михасев Г.И., Товстик П.Е. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы. М.: Физматлит, 2009.

MODELING OF FREE VIBRATIONS OF THE RECONSTRUCTED MIDDLE EAR SUBJECTED TO TYMPANOSTAPEDOPLASTY AND THE STAPES FOOTPLATE PERFORATION

I.L. Slavashevich, G.I. Mikhasev

A biomechanical model of the reconstructed middle ear subjected to tympanostapedoplasty and the stapes footplate perforation is presented. The basic aim of this study is to clear up the influence of the tangential displacements in an eardrum at the modes and fundamental frequencies of the reconstructed middle ear. The reconstructed tympanic membrane is modeled as a prestressed annular plate.

Keywords: middle ear, free vibration, sound-transmitting system, reconstruction, natural frequencies.

УДК 539.4:620.22

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ И ТОНКИХ ПОКРЫТИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СОВРЕМЕННЫХ НАНОМЕХАНИЧЕСКИХ ИСПЫТАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ: НОВЫЕ МЕТОДИКИ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

С.В. Смирнов

Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург

svs@imach.uran.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Предложены новые методики определения сопротивления деформации поверхностных слоев металлических материалов и покрытий, адгезионной прочности тонких покрытий в испытаниях на вдавливание и царапание пирамидальным индентором Берковича с использованием современных зондовых наномеханических систем. По разработанным методикам получены диаграммы деформационного упрочнения для поверхностных слоев ряда металлических материалов (алюминий, медь, железо, их сплавов и окислов), а также адгезионная прочность нанесенных на них металлических и полимерных покрытий.

Ключевые слова: поверхность металлов, покрытия, наноиндентирование, наноскретч-тест, наномеханические зондовые системы, сопротивление деформации, адгезионная прочность.

Введение

Поверхностный слой подвергается наиболее интенсивным внешним воздействиям, поэтому его структура и свойства оказывают определяющее влияние на работоспособность изделия в целом. Особое значение свойства поверхностного слоя приобретают в процессах контактного взаимодействия твердых тел, а также при воздействии на них окружающей среды. В настоящее время созданы наномеханические испытательные системы, основанные на использовании принципа зондовой сканирующей микроскопии, которые позволяют осуществлять программируемое силовое воздействие на поверхность исследуемого материала с нанометровым разрешением. В качестве зонда обычно используются алмазные инденторы. Следует отметить, что развитие приборной базы опережает научно-методические разработки, что не позволяет в должной мере использовать возможности этих приборов. Поэтому актуальной становится задача определения характеристик сопротивления деформированию, пластичности и адгезионной прочности и других свойств в категориях механики с использованием инструментария современных наномеханических испытательных систем, которая позволила бы получать эмпирические данные, необходимые для адекватного моделирования механического поведения материалов на мезо- и микроуровне, в том числе при проектировании материалов с качественно новыми характеристиками поверхности, а также для разработки технологических процессов поверхностного пластического упрочнения.

Разработка методик исследования

Основным инструментом в зондовых наномеханических испытательных системах является алмазный индентор Берковича, представляющий собой правильную трехгранную пирамиду с углом 65.3° между гранью и основанием. Параметры управления: нормальная нагрузка, тангенциальное и нормальное перемещение. Они же, плюс тангенциальное усилие на индентор, являются и регистрируемыми параметрами. Обычно предусмотрена возможность автоматизированного определения модуля Юнга и кинетической твердости. Зондовые испытательные системы обладают также функцией атомно-силовой микроскопии, что позволяет с нанометровой точностью определять профиль изучаемой поверхности до и после испытаний.

При вдавливании индентора реализуется схема объемного напряженно-деформированного состояния, вследствие чего непосредственно из результатов испытаний нельзя определить диаграмму деформационного упрочнения, связывающую сопротивление деформации при одноосном нагружении со степенью деформации, которое обычно изучается при растяжении и сжатии образцов. Известны методики определения диаграммы деформационного упрочнения, основанные на понятии репрезентативной деформации из формулы Тейбора [1, 2 и др.] и анализе диаграмм вдавливания инденторов [3–5 и др.]. Так как диаграммы деформационного упрочнения могут быть описаны аппроксимирующими функциями с числом эмпирических коэффициентов не менее двух, то необходимо провести не меньшее количество независимых испытаний. Поэтому указанные методики не могут быть использованы при исследовании объектов размером менее 50 мкм, так как только для индентора Берковича можно получить радиус притупления острия размером менее 200 нм. В связи с этим в качестве базовых испытаний, анализ результатов которых может быть положен в основу методики определения диаграммы вдавливания, логично было выбрать испытания на вдавливание и царапание индентором Берковича, которые реализуются в зондовых наномеханических испытательных системах. Анализ научно-технической литературы показал, что в подобном сочетании эти методы для определения диаграмм вдавливания ранее не использовались.

Для разработки методик было осуществлено 3D конечно-элементное моделирование процессов вдавливания и царапания поверхности упругопластического материала индентором Берковича с нормальной нагрузкой 5 мН, которая соответствует рабочему диапазону зондовых наномеханических систем. Выбор этой величины нагрузки обусловлен также тем, что при ней глубина проникновения в поверхность металлических материалов превышает 150 нм и, как показали специальные исследования, в этом случае можно не учитывать влияние радиуса вершины индентора Берковича на диаграммы вдавливания и царапания. Было принято, что на стадии пластической деформации сопротивление деформации является степенной функцией от величины полной деформации. Для этих условий были рассчитаны диаграммы вдавливания и царапания для разных сочетаний эмпирических коэффициентов в степенной функции, определены контрольные параметры – глубина проникновения индентора на стадии вдавливания $h_в$ и царапания $h_ц$. Таким образом, для определения диаграммы деформационного упрочнения поверхностного слоя необходимо провести эксперименты при нагрузке 5 мН и определить искомые эмпирические коэффициенты в принятой аппроксимации диаграммы деформационного упрочнения, используя статистическую процедуру сравнения расчетных и экспериментальных результатов. В соответствии с методикой было определено сопротивление деформации поверхностных слоев ряда металлических материалов на основе алюминия, меди и железа, а также их окисных пленок на них.

Обычно для оценки адгезионной прочности покрытия на отрыв в испытаниях на индентирование используют условие потери устойчивости Эйлера при сжатии стержня или его аналоги. Это является весьма грубым приближением и поэтому полученные результаты могут быть использованы только для сравнительных испытаний. Опробованы два варианта методик проведения экспериментов. В соответствии с первым вариантом предварительно осуществляется серия вдавливаний с глубиной больше толщины покрытия таким образом, чтобы отпечатки были расположены на разных расстояниях от 1 до 10 размеров отпечатка с целью спровоцировать отслоение покрытия. После этого посередине между отпечатками осуществляются вдавливания с малой глубиной проникновения индентора (около 0.1 толщины покрытия), чтобы исключить влияние основы. О факте нарушения адгезионной прочности предлагается судить по изменению нормального модуля упругости, определенного по методу Оливера Фарра на основе анализа разгрузочной ветви диаграммы вдавливания. По второму варианту предварительное повреждение покрытия производится путем нанесения царапин по сходящимся направлениям. Для количественной оценки напряжений, соответствующих адгезионной прочности покрытия на отрыв, используются результаты конечно-элементного моделирования и сопоставления их с результатами экспериментов. Методики были апробированы при исследовании покрытий из нитридов и боридов легких и переходных металлов, оксидных металлических и полимерных покрытий.

Заключение

Разработаны новые методики определения сопротивления деформации поверхностных слоев мателлических материалов и покрытий, адгезионной прочности тонких покрытий в испытаниях на вдавливание и царапание пирамидальным индентором Берковича с использованием современных зондовых наномеханических систем. По разработанным методикам получены диаграммы деформационного упрочнения поверхностных слоев для ряда металлических материалов (алюминий, медь, железо, их сплавов и окислов), а также адгезионная прочность нанесенных на них металлических и полимерных покрытий.

Исследования выполнены совместно с П.П. Матафоновым, Е.О. Смирновой и И.А. Голубковой.

Работа выполнена рамках интеграционного проекта с ИТПМ СО РАН 09-С-1-1003 и гранта РФФИ 10-08-96050.

Список литературы

1. Васаускас С.С., Жидонис В.Ю. // Заводская лаборатория. 1962. №5. С. 605–608.

2. Atkins A.G. // J. Mech. Phys. Solids. 1965. No 13. P. 149.

3. Смирнов С.В., Швейкин В.П. // Физика металлов и металловедение. 1995. Т. 80, вып. 1. С. 145–151.

4. Коновалов Д.А., Смирнов С.В., Вичужанин Д.И. // Изв. вузов. ЧМ. 2007. №3. С. 69–70.

5. Bucaille J.L., Stauss S., Felder E., Michler J. // Acta materialia. 2003. Vol. 51. P. 1663–1678.

AN INVESTIGATION OF THE MECHANICAL PROPERTIES OF METAL SURFACES AND COATINGS USING MODERN NANOMECHANICAL TEST SYSTEMS: NEW METHODOLOGIES AND RESULTS OF RESEARCHES

S.V. Smirnov

The original methodologies of strain resistance of metal surfaces and coatings, adhesive strength of thin coatings using nanoindentation and nanoscratch-test by Bercovich indenter are described. Strain resistance diagrams of metal surface (aluminum, copper, iron and some its alloys) and adhesive strength of thin metal and polymer coatings defined with use this methodologies are demonstrated. Diagrams of metal surfaces (aluminum, copper, iron and some its alloys) and adhesive strength of thin metal and polymer coatings defined with use this methodologies are represented.

Keywords: metal surfaces, coatings, nanoindentation, nanoscratch-test, nanomechanical probe systems, strain resistance, adhesive strength.

УДК 620.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИАГРАММ ДЕФОРМАЦИОННОГО УПРОЧНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЛОЕВ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ НА ВДАВЛИВАНИЕ И ЦАРАПАНИЕ ИНДЕНТОРОМ БЕРКОВИЧА

Е.О. Смирнова

Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург

evgeniya@imach.uran.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Разработана методика определения диаграмм сопротивления деформации поверхностных слоев металлических материалов по результатам испытаний на вдавливание и царапание трехгранным индентором Берковича при заданной постоянной нагрузке. Методика разработана на основе результатов моделирования методом конечных элементов внедрения индентора в упругопластический материал с последующим царапанием. Методика адаптирована под возможности проведения испытаний на атомно-силовом микроскопе с функцией силового сканирования и нанотвердомерах.

Ключевые слова: диаграмма деформационного упрочнения, индентирование, царапание, конечно-элементный расчет.

Введение

Механические свойства традиционно являются важнейшими показателями качества конструкционных металлических материалов. Одно из фундаментальных механических свойств металлических материалов – это их способность упрочняться под действием пластической деформации. Сопротивление пластической деформации обычно характеризуют диаграммами деформационного упрочнения, которые, в соответствии с определением, должны быть получены в условиях одноосного нагружения. В связи с миниатюризацией объектов техники, созданием новых микрокомпозиционных, градиентных материалов и покрытий в последние десятилетия отмечается значительный интерес к исследованию механических свойств на субмикро- и наномасштабных уровнях. Однако малый размер исследуемых объектов не позволяет применять традиционные методы определения механических свойств, и более перспективными являются методы, основанные на восстановлении кривой сопротивления деформации по результатам кинетического индентирования с привлечением метода конечных элементов. В основном методики разработаны для конических и сферических инденторов, которые ограниченно могут быть использованы при индентировании на микромасштабном уровне и не могут быть применены при исследованиях металлических объектов размером менее 50 мкм.

Материалы и методы исследования

Предложен метод определения диаграмм деформационного упрочнения поверхностных слоев металлических материалов на микро- и более низких масштабных уровнях. Рассматриваемый метод основан на восстановлении кривой сопротивления деформации материала по результатам анализа испытаний по индентированию и склерометрии совместно с результатами численного эксперимента на детальной конечно-элементной модели процесса испытания. Выбор трехгранной алмазной пирамиды Берковича обусловлен наименьшим радиусом скругления вершины по сравнению с другими инденторами. Моделирование процесса испытания проводили с применением программного комплекса ANSYS. Алмазный индентор рассматривали как линейно-упругий изотропный материал с модулем Юнга E = 1140 ГПа и коэффициентом Пуассона ν = 0.07. Материал, в который осуществляется внедрение индентора, – упругопластический. Чисто упругая деформация имеет место только в начале процесса индентирования и подчиняется закону Гука. В пластическом состоянии материал подчиняется условию текучести Мизеса в виде степенной зависимости

$$\sigma = a\varepsilon^{b}, \qquad (1)$$

где σ – напряжение текучести Мизеса (сопротивление деформации); ε – полная деформация по Мизесу; a и b – числовые эмпирические коэффициенты.

Эксперименты на вдавливание и царапание проводили на многофункциональном комплексе для наноиспытаний Hysitron TriboIndenter TI 900. Исследовали образы из меди М0б. Максимальная нагрузка в конце испытания составила 5 мН.

Результаты исследования и их обсуждение

На основе результатов моделирования получили необходимый объем расчетных данных для выбранной совокупности значений коэффициентов a и b. Зависимости $h_В(a)$ и $h_Ц(a)$ при фиксированных значениях b описали степенной функцией вида $h = ca^d$. Коэффициенты аппроксимации c и d приведены в таблице.

Таблица

b	Вдавливание		Царапание	
	c, МПа	d	c, МПа	d
0.1	7.0927	–0.473	5.1538	–0.441
0.15	7.9043	–0.478	6.1168	–0.458
0.2	8.4998	–0.474	9.8364	–0.512
0.3	13.441	–0.52	15.562	–0.563
0.4	15.606	–0.511	31.767	–0.657
0.5	19.344	–0.515	46.631	–0.687
0.6	23.582	–0.517	82.403	–0.749

Последовательность определения сопротивления деформации, описываемой степенным законом упрочнения (1), заключается в следующем. На образцах с подготовленной поверхностью проводим эксперименты по вдавливанию и царапанию ребром индентором Берковича при фиксированной нагрузке 5 мН.

Затем при известном из эксперимента значении $h_В$, коэффициентах c и d при разных значениях b из таблицы, по формуле

$$a = (h/c)^{1/d}, \qquad (2)$$

определяем значения коэффициента a. Полученный набор значений $a(b)$ представляет собой возможные сочетания коэффициентов в степенном законе упрочнения (1), которые удовлетворяют условиям данного эксперимента. Зависимость $a(b)$ описывается аналитически или графически. По аналогичному алгоритму определяется зависимость $a(b)$, удовлетворяющая результату эксперимента по определению величины $h_Ц$. Тогда точка пересечения этих двух зависимостей определит искомую пару значений коэффициентов a и b.

На рис. 1 показана схема определения эмпирических коэффициентов в степенном законе упрочнения (1) (кружочки – вдавливание; треугольники – царапание).

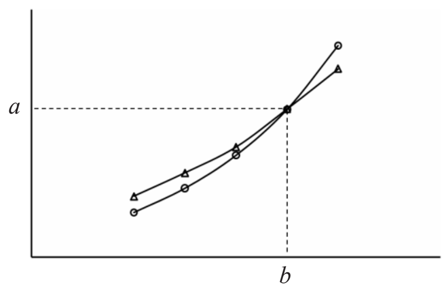


Рис. 1

Для меди М0б рассчитанные из полученных результатов коэффициенты в степенной зависимости (1), описывающей диаграмму деформационного упрочнения на стадии пластической деформации, равны: a = 1013 МПа, b = 0.229.

Таким образом, разработана методика определения диаграмм деформационного упрочнения поверхностных слоев по результатам испытаний на вдавливание и царапание трехгранным индентором Берковича на субмикро- и наноуровне.

Работа выполнена в рамках интеграционного проекта с ИТПМ СО РАН №09-С-1-1003 и гранта РФФИ 10-08-96050.

CONSTRUCTION OF STRESS-STRAIN CURVE OF A METAL SURFACE BY INDENTATION AND SCRATCH TESTING USING BERKOVICH INDENTER

E.O. Smirnova

The method of construction of the stress-strain curve of a metal surface by indentation and scratch testing using the three-sided pyramid (Berkovich) indenter under fixed load was developed. It was based on the results of finite-element simulation of penetration and following scratching of elastoplastic material. The method was adapted to test operation using atomic-force microscope and nanohardness testing instruments.

Keywords: stress-strain curve, indentation test, scratch test, finite element simulation.

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ СОВМЕЩЕННОГО ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО ПОДХОДА

***А.Ю. Смолин*[1,2]*, Н.В. Роман*[2]

[1]Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск
[2]Томский госуниверситет

asmolin@ispms.tsc.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Совмещенный дискретно-континуальный подход позволяет объединить преимущества обоих методов за счет использования сеточного метода для областей с малыми деформациями и метода частиц в области сильных деформаций. В качестве дискретного метода предлагается использовать метод подвижных клеточных автоматов. В качестве сеточного метода может использоваться как метод конечных элементов, так и конечных разностей, при этом важно, чтобы конечно-разностный аналог уравнений движения сеточного метода можно было записать в терминах сил, действующих на узлы сетки со стороны окружающих ячеек. Граница совмещения методов полагается плоской и задается на этапе формулировки задачи. Центры частиц на границе совмещения жестко связаны с соответствующими гранями сетки. Обмен информацией между методами осуществляется путем передачи координат и скоростей из сеточной части образца автоматам на границе, а также использования сил, действующих на эти автоматы со стороны дискретной части, для вычисления ускорения соответствующих узлов. Рассмотрено применение предложенного подхода для изучения процессов в пятне контакта при трении скольжения.

Ключевые слова: континуальное и дискретное описание среды, методы моделирования, совмещение методов.

Для численного моделирования материалов и сред широко используются методы континуальной механики. Однако в последнее время стали интенсивно развиваться методы, основанные на дискретном подходе, в котором не используется гипотеза сплошности. В первую очередь, это вызвано возможностями, которые эти методы дают при явном описании интенсивной деформации материалов, процессов разрушения и перемешивания вещества. Методы дискретного моделирования можно условно разделить на два класса: 1) метод частиц, в котором рассматривается движение взаимодействующих частиц в пространстве [1]; 2) метод клеточных автоматов [2], в котором изучается изменение во времени свойств элементов неподвижной сетки в зависимости от состояния окружающих элементов. Перспективным является объединение возможностей указанных классов в рамках метода подвижных клеточных автоматов (МСА) [3]. Его использование позволило получить ряд новых научных результатов при моделировании наноматериалов, керамик, высокопористых материалов, геологических сред и др. [4, 5].

При стремлении размера подвижных клеточных автоматов к нулю модельная среда будет описывать некий континуум. Анализ соответствующих соотношений показал, что в случае линейных функций отклика этот континуум описывается законом Гука [6]. Это дает основание для совместного использования метода МСА и численных методов континуальной механики. Такой комбинированный подход позволяет объединить преимущества каждого из методов для задач, в которых можно априори выделить области локализованных деформаций с перемешиванием вещества, описываемые методом МСА, а также протяженные области малых упругих деформаций, где численно решаются уравнения континуума.

Сущность совмещенного дискретно-континуального подхода представлена на рис. 1. Центры автоматов, лежащих на границе совмещения, предполагаются жестко связанными с граничными ребрами сетки. В ходе расчета со стороны сеточного метода (главной программы) в дискретный передаются скорости и положения узлов-автоматов, а возвращаются силы, действующие со стороны МСА-области на узлы сетки, лежащие на границе совмещения. Двумерная МСА-программа объединялась с программой, реализующей метод конечных разностей (метод Уилкинса) [7], а трехмерная – метод конечных элементов (модификация Джонсона) [8].

Анализ частотного спектра регистраций компонент скорости (V_X, V_Y), давления (P) и интенсивности напряжений (I) в определенных точках

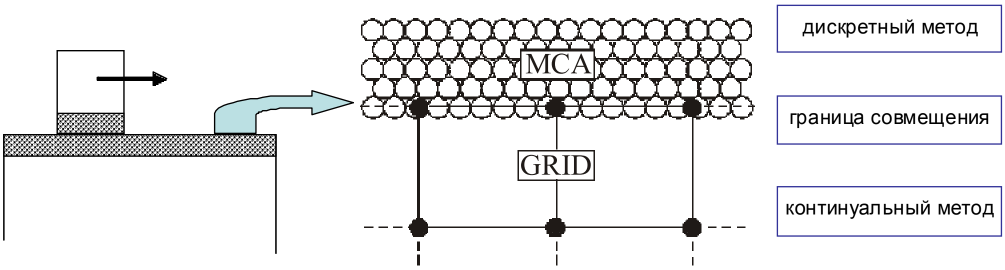


Рис. 1

дискретной области модели показал, что наиболее интенсивные пики соответствуют собственным частотам системы. На рис. 2*б* показаны спектры регистраций вертикальной составляющей скорости в точке, отмеченной черным кружком на рис. 2*а*, при различных критериях переключения пар в состояние «связанные». Небольшой размытый пик на спектрах вертикальной составляющей скорости и интенсивности напряжений соответствовал среднему времени существования связанных пар автоматов в «квазижидком» слое, в котором наблюдается интенсивное перемешивание автоматов, разделяющем взаимодействующие поверхности. Положение этого пика изменяется при варьировании параметров, отвечающих за переход пар из состояния «несвязанные» в состояние «связанные» (рис. 2*б*), что может быть вызвано, например, повышением температуры в области контакта. Соответствующую этому пику частоту можно интерпретировать как характеристику колебательного движения на микроуровне в режиме «stick-slip».

Авторы благодарны С.Г. Псахье за инициацию темы, ценные замечания и обсуждения.

Для тестирования разработанных алгоритмов решались задачи о распространении упругих волн от точечного источника на свободной поверхности «совмещенной» среды.

На основе предложенного подхода в плоской постановке были исследованы закономерности генерации упругих волн в зоне трибологического контакта при трении стальных образцов. Структура расчетной области и используемая схема нагружения представлены на рис. 2*а*. Здесь область I моделировалась методом МСА, а область II – сеточным методом (для уменьшения вертикальных размеров рисунка показана только часть сетки). На внешних поверхностях областей задавалась горизонтальная скорость V, постепенно наращиваемая от 0 до 10 м/с. Одновременно на верхнюю поверхность действовало давление, наращиваемое до максимальной величины P_m = 127.5 МПа. Нижняя поверхность была зафиксирована по оси Y. На вертикальных границах областей в горизонтальном направлении задавались периодические граничные условия. Диаметр автомата равен 2.5 нм, шаг сетки 10 нм.

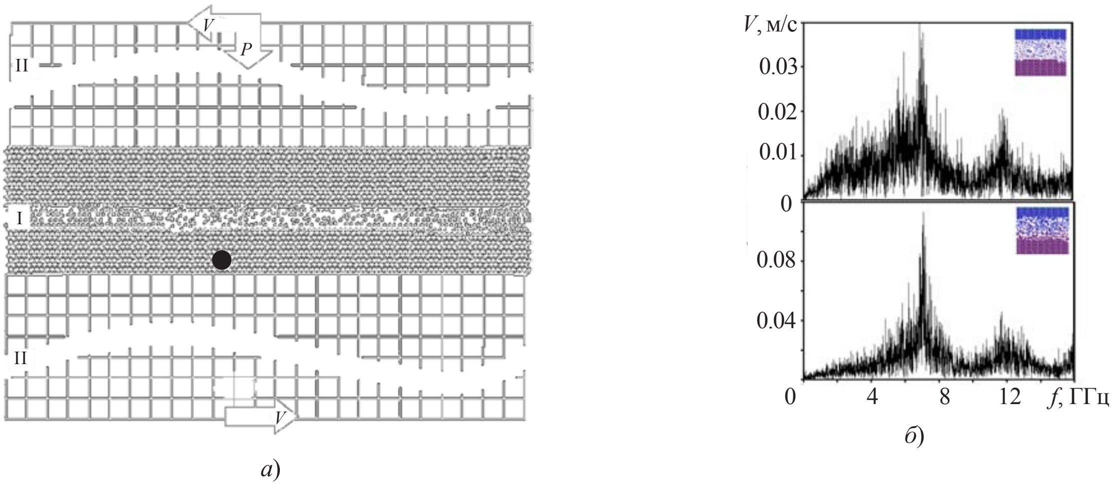


Рис. 2

Работа проведена при финансовой поддержке проекта 13.13.3 Программы фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН 4.13 и интеграционных проектов СО РАН №113 и №127.

Список литературы

1. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987. 640 с.

2. Ilachinski A. Cellular automata. A Discrete Universe, Singapore: World Scientific, 2001. 808 c.

3. Псахье С.Г. и др. // Физическая мезомеханика. 2000. Т. 3, №2. С. 5–13.

4. Psakhie S.G. et al. // Theoretical and applied fracture mechanics. 2001. V. 37, №1-3. P. 311–334.

5. Псахье С.Г. и др. Механика – от дискретного к сплошному. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. Гл. 2. С. 88–128.

6. Псахье С.Г., Чертов М.А., Шилько Е.В. // Физическая мезомеханика. 2000. Т. 3, №3. С. 93–96.

7. Псахье С.Г. и др. // Физическая мезомеханика. 2003. Т. 6, №6. С. 11–21.

8. Смолин А.Ю., Роман Н.В., Добрынин С.А. // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики: Матер. VI Всерос. конф. Томск: Изд-во ТГУ, 2008. С. 298–299.

MODELING THE DEFORMATION AND FAILURE OF MATERIALS BASED ON COUPLED DISCRETE-CONTINUAL APPROACH

A.Yu. Smolin, N.V. Roman

Coupled discrete-continua simulation makes it possible to combine the advantages of the both approaches by using the grid method for domains with small deformation and the method of particles in the region of strong deformation. The coupling interface is assumed to be plane and is given at the stage of problem formulation. Centers of particles at the interface are rigidly connected to the corresponding edges of the grid. Information exchange between the methods is performed by passing the positions and velocities of the grid region of the sample to the particles at the interface, as well as by using the forces acting on these particles from the discrete part, to calculate the acceleration of the nodes. The application of the proposed approach for studying the processes in the contact zone in sliding friction is discussed.

Keywords: continual and discrete description of materials, modeling methods, coupling of different methods.

УДК 539.2

МИКРО- И НАНОГИДРОДИНАМИКА МНОГОМАСШТАБНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В НАНОТЕХНОЛОГИЯХ НА ОСНОВЕ МОЛЕКУЛЯРНО-СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Г.А. Тирский[1]***, Ю.К. Товбин***[2]

[1]НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова
[2]НИФХИ им. Л.Я. Карпова, Москва

tirskiy@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Излагаются основы подхода к теории многомасштабных атомно-молекулярных процессов на базе простейшей модели решеточного газа (МРГ), который решает задачу многомасштабного моделирования физико-химических процессов в наноразмерных системах. Теория объединяет расчет равновесных и динамических характеристик микронеоднородных систем с характерным масштабом неоднородностей от атомного до макроскопического во всем диапазоне времени от одной пикосекунды до секунд. Построенная система уравнений является системой в конечных разностях по приращениям координат (вместо дифференциальных уравнений). Коэффициенты переноса учитывают нелокальные свойства флюида. Модель отражает изменения концентраций флюида от газообразного до жидкого состояния и широкий диапазон температур, включая критическую область, что позволяет рассматривать динамику течений пара (газа), жидкости и парожидкостных флюидов при наличии капиллярной конденсации. При увеличении размера пор уравнения переходят в гидродинамические уравнения сохранения для потоков массы, импульса и энергии газа или жидкости, сохраняя связь коэффициентов переноса с межмолекулярными потенциалами. Приводятся примеры применения теории для описания широкого круга микронеоднородных систем: адсорбции, катализа, мембранных процессов, полислоистых пленок и др., а также возможности широкого варьирования временного диапазона. Точность теории превосходит точность методов Монте-Карло (МК) и молекулярной динамики (МД). Обсуждается возможность исследования малых систем с учетом флуктуаций локальных плотностей.

Ключевые слова: наноразмерные системы, атомно-молекулярные процессы, решеточный газ, капиллярная концентрация, адсорбция, катализ, мембранные процессы, флуктуации локальных плоскостей.

Современные нанотехнологии требуют развития методов молекулярного моделирования микропроцессов, что приводит к необходимости отказа от гипотезы сплошной среды и ее главного понятия – жидкой частицы. Уравнения гидродинамики, наиболее общей моделью которой являются уравнения Навье – Стокса, выведенные из кинетической теории газов (уравнения Больцмана), имеют нижний предел применимости по времени от 10^{-5} до 10^{-4} с и более. На меньших временах нужно пользоваться решениями уравнений Больцмана, которые описывают движения газа на временах с нижним пределом до 10^{-9} с. На временах, меньших 10^{-9} с, процессы (столкновения частиц) по Больцману протекают мгновенно и в точке. Последнее означает, что по пространству не учитываются линейные масштабы меньше средней длины свободного пробега ($l \sim 10^{-5}$ см для газа при нормальных условиях).

Более детальное описание молекулярных процессов может быть получено методом МД, который применим для времен порядка 10^{-15} с с шагом $(1\div2)10^{-13}$ с, чтобы учесть в дифференциальных уравнениях резкое изменение потенциала на расстояниях порядка 10^{-13} см – характерное расстояние резкого возрастания отталкивательной ветви потенциала. Соответственно время прохождения молекулой своего диаметра при комнатной температуре составляет порядка 10^{-13} с. Метод МД применяется до времен $10^{-8}\div10^{-7}$ с. Далее его использование невыгодно, и поэтому переходят к броуновской или ланжевеновской динамике. В [1] разработана молекулярная кинетическая теория, которая является микроскопическим аналогом классической гидродинамики и поэтому может быть названа как микро-наногидродинамика (МНГД), она обеспечивает микроскопическое описание динамики процессов переноса массы, импульса и энергии молекул на пространственных масштабах от 1 до 10^3 нм и на временных интервалах от 10^{-2} с до 10^4 наносекунды. Теория применима в широких диапазонах изменения плотности флюида (от плотности газа порядка одной атмосферы до плотности жидкой фазы $1\div2\cdot10^{-9}$ атмосфер) и температур от докритических до закритических, находящихся в сильных полях поверхностных сил твердой стенки, повышающих на порядок межмолекулярные силы в самом флюиде.

Процедура построения кинетических уравнений «стартует» с уравнения Лиувилля для полной функции распределения, которое редуцируется на всю совокупность локальных одночастичных и парных функций распределения, определенную для всех ячеек решеточного газа. Всю процедуру редуцирования уравнения Лиувилля можно представить в виде следующих пяти этапов: 1) пространство поры разбивается на ячейки, как это обычно делается в модели решеточного газа; 2) полная функция распределения расцепляется через всю совокупность локальных одночастичных и парных функций распределений, определенную для всех ячеек системы; 3) для одночастичных функций, описывающих состояние занятости узлов решетки, записываются уравнения сохранения массы, импульса и энергии, которые по своей форме совпадают с разностной формой записи уравнений Навье – Стокса; 4) строятся уравнения для парных функций распределений; 5) на основе молекулярных моделей строятся коэффициенты переноса (диссипативные коэффициенты), которые учитывают нелокальные свойства флюида.

В целом, полученные уравнения существенно отличаются от обычных гидродинамических уравнений:

1. Система уравнений для каждой ячейки не ограничивается только уравнениями на уровне одночастичной функции распределения, а включает в себя уравнения на основе парных корреляционных функций (которые всегда нелокальны, так как относятся к разным ячейкам).

2. Уравнения содержат нелокальные коэффициенты переноса, отражающие влияние многочастичных конфигураций соседних молекул.

3. Полученная система уравнений оперирует в качестве исходной информации только с параметрами межчастичных потенциалов. Для замыкания уравнений необходимо построить кинетические уравнения для парных функций распределения. Этот этап отсутствует в рамках гидродинамического подхода, так как предполагается выполненным локально-равновесное распределение молекул.

Уравнения сохранения относятся к парным функциям распределения. В обычных уравнениях гидродинамики локальные объемы и потоки относятся к масштабу расстояний, превышающих радиус корреляций между молекулами, поэтому внутри локальных объемов предполагается всегда выполненным условие локального равновесия. Как следствие, такие уравнения не меняют парные функции и переносят их как «целое».

Полученные коэффициенты переноса обеспечивают самосогласованные описания потоков массы, импульса и энергии в широком диапазоне концентраций и температур, включая области фазовых переходов, в том числе и критическую область, что позволяет использовать их для расчетов потоков в условиях капиллярной конденсации частиц в узких порах. Эти коэффициенты согласуются с известными выражениями кинетической теории газов (в случае предельно малой области концентраций $\theta \sim \sim 10^{-4}\div10^{-3}$) и жидкостей ($\theta \sim 10$), а также обеспечивают правильные температурные зависимости коэффициентов переноса в разреженных газах и жидкостях. Предложенный подход применим как для случая узких пор, так и для широких пор, вплоть до объемных фаз.

Проводится сравнение результатов расчетов предложенным методом с методом МД для равновесных и динамических характеристик молекул в узких порах. Этот метод по точности сопоставим с методом МД, а по скорости расчетов не менее чем на два-три порядка превосходит его.

Приводятся решение плоской и осесимметричной задач Пуазейля о течении в канале последовательно четырьмя методами: континуальным с учетом и без учета скольжения Максвелла, кинетическим (больцмановским) методом МД и методом МНГГ. Решена задача о течении крови в капиллярах с помещенным в них микротелом [2].

Работа поддержана РФФИ (грант 09-03-00035а) и Роснаукой (госконтракты 02.740.11.00615 и П594).

Список литературы

1. Товбин Ю.К. Молекулярно-статистическая теория и многомасштабное моделирование физико-химических процессов в нанотехнологиях // Российские нанотехнологии. 2010. Т. 5, №11–12. С. 1–22.

2. Тирский Г.А. Модели молекулярных течений внутри наноканалов и в узких порах вблизи обтекаемых поверхностей // Современные проблемы аэрогидродинамики: Тез. докл. XVI школы-семинара. Сочи, 5–15 сент. 2010 г. М.: Изд-во МГУ. 2010. С. 97–99.

MICRO- AND NANOHYDRODYNAMIC OF MULTISCALE MODELING OF PHYSICAL AND CHEMICAL PROCESSES IN STATISTICAL MOLECULAR THEORY-BASED NANOTECHNOLOGY

G.A. Tirskiy, Yu.K. Tovbin

The fundamentals of the approach to the theory of multiscale atom-molecule processes based on the simplest model of lattice gas (MLG) is presented, to solve the problem of multiscale modeling of physical and chemical processes in nanoscale systems. The theory combines the calculation of equilibrium and dynamic characteristics of micro-heterogeneous systems with inhomogeneous characteristic on the atomic scale up to macroscopic one in the whole range of time from one picosecond to seconds. The developed system of equations is a system in finite differences in increments of coordinates (instead of differential equations). The transfer coefficients take into account the nonlocal fluid properties. The model reflects the changes of concentrations of the fluid from the gaseous to liquid state and a wide range of temperatures including the critical region that allows us to consider dynamo currents couple (gas), liquid and vapor-liquid fluids in the presence of capillary condensation. When increasing the pore size, the equations become hydrodynamic equations of conservation for fluxes of mass, momentum and energy of the gas or liquid, keeping the connection for transport coefficients with intermolecular potentials. Examples illustrate the application of the theory to describe a wide range of microscopically systems: adsorption catalysis, membrane processes, poly-layer films, etc., as well as the possibility of a wide varying the time range. The accuracy of the theory exceeds the accuracy of the Monte Carlo (MC) and molecular dynamics (MD). We discuss the possibility of studying small systems taking into account fluctuations in local densities.

Keywords: nanoscale systems andatomic-molecular processes, lattice gas, capillary concentration, adsorption, catalysis, membrane processes, fluctuations in local planes.

УДК 539.3; 539.4; 519.6

РЕШЕНИЕ СВЕРХБОЛЬШИХ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ СЕЙСМИКИ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ НА MULTIGPU СИСТЕМЕ С ПОМОЩЬЮ CAE FIDESYS

А.В. Траченко, А.С. Прокопенко

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

guiper@mail.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Рассматривается задача сейсмики о нахождении конфигурации и параметров слоистой среды. Для этой обратной задачи требуется решить большое количество прямых задач с различными параметрами исследуемой среды и найти такие, при которых результат численного моделирования будет наиболее близок к экспериментальным данным. Для проведения эксперимента на поверхности среды устанавливаются источник возмущений и приемники, собирающие экспериментальные данные. Поскольку каждый раз моделируется поведение среды большого размера (порядка километров), предлагается использовать эффективный численный метод решения, реализованный на высокопроизводительной массивно-параллельной архитектуре.

Ключевые слова: сейсмика, метод спектральных элементов, графический процессор, NVIDIA CUDA.

Постановка задачи

Рассматривается задача о распространении возмущений в нелинейно-упругой слоистой среде [1]:

$$\nabla \cdot \sigma = \rho \ddot{\mathbf{u}}.$$

Для описания свойств нелинейно-упругой среды используется определяющее соотношение Мурнагана:

$$\Sigma = \lambda(E:I) + 2GE + 3C_3(E:I)^2 I + \\ + C_4[E^2:I]I + 2C_4(E:I)E + 3C_5E^2.$$

На практике размеры среды, по которой распространяются возмущения, много больше размеров рассматриваемой области; поэтому нежелательно, чтобы на несвободной границе области происходило отражение волн. Для этого применяются приближенные неотражающие граничные условия. Предлагается использовать сочетание нелокального граничного условия в виде зоны затухания (damping zone) и характеристических условий [2]. Это позволяет, с одной стороны, сократить размер зоны затухания, а с другой, – компенсировать неточности характеристических граничных условий.

В зоне затухания используются модифицированное волновое уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + b\right)^2 \Phi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

и характеристические граничные условия

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \rho(v_P(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n} + v_{SV}(\mathbf{t}_1\cdot\mathbf{v})\mathbf{t}_1 + v_{SH}(\mathbf{t}_2\cdot\mathbf{v})\mathbf{t}_2).$$

Предлагаемые граничные условия устойчивы в случае анизотропии.

Численное моделирование. Результаты

Для решения задачи используется метод спектральных элементов (МСЭ). МСЭ хорошо зарекомендовал себя при решении задач сейсмики [2], поскольку обладает следующими преимуществами перед методами конечных разностей и конечных элементов:

– высокой точностью и незначительной дисперсией даже при малом числе узлов сетки на длину волны;

– возможностью решать задачи со сложной геометрией и различными параметрами материала;

– возможностью эффективной параллельной реализации.

МСЭ основан на использовании полиномов Лежандра в качестве базисных функций:

$$f(\mathbf{x}(\xi,\eta,\zeta)) \approx \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{n_l} f^{\alpha\beta\gamma} l_\alpha(\xi) l_\beta(\eta) l_\gamma(\zeta).$$

Элементы расчетной сетки – гексаэдры, реализующие восьмой порядок аппроксимации по пространству. Для дискретизации по времени используется неявная схема. Для интегрирования по элементам применяется кубатура Гаусса–Лежандра

– Лобатто (GLL) [3]:

$$\int_{\Omega} uw\,d\Omega = \sum_{e=1}^{n} \int_{\Omega_e} u^e w^e d\Omega \cong$$

$$\cong \sum_{e=1}^{n} \sum_{i=0}^{N} \omega_i \times \sum_{j=0}^{N} \omega_j J_e(\xi_i, \eta_j) u^e(\xi_i, \eta_j) w^e(\xi_i, \eta_j).$$

Дискретизация по времени производится с использованием явной схемы Ньюмарка [3].

В качестве целевой расчетной системы выбрана рабочая станция с многоядерным процессором и несколькими графическими процессорами (GPU), поддерживающими технологию CUDA [4]. Поскольку у каждого GPU отдельная память, такую систему можно рассматривать как систему с распределенной памятью.

Перед началом расчета сетка разбивается на домены по количеству используемых GPU. Для минимизации передачи данных необходимо, чтобы площадь контакта доменов была минимальной. Разбиение на домены осуществляется с помощью пакета METIS [5].

Каждому спектральному элементу соответствует один поток на GPU, который его обсчитывает. Возможна ситуация, когда несколько потоков записывают данные в одну ячейку массива одновременно и возникает гонка данных. Поэтому требуется упорядочить параллельный доступ к массивам в глобальной памяти. Для этого применяется раскраска узлов расчетной сетки: соседние узлы получают различные номера (цвета). Среди узлов с одинаковым цветом можно осуществлять запись в массивы одновременно.

Тестирование производилось на рабочей станции с четырехъядерным процессором Intel Xeon и двумя устройствами NVIDIA Tesla C2050 на базе архитектуры Fermi с использованием CAE FIDESYS. Пример решения приведен на рис. 1.

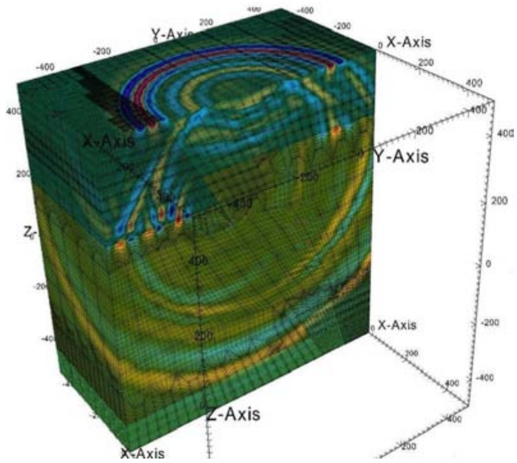


Рис. 1

Работа выполнена при частичной поддержке Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере и корпорации NVIDIA.

Список литературы

1. Левин В.А. и др. Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование / Под ред. В.А. Левина. М.: Физматлит, 2007. 392 с.

2. Chaljub E. et al. Spectral element analysis in seismology, in advances in wave propagation in heterogenous media. In: Advances in Geophysics / Eds. Ru-Sh. Wu, V. Maupin. Netherland: Elsevier, 2007. V. 48. P. 365–419.

3. Komatitsch D., Vilotte J.P. The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures // Bulletin of the Seismological Society of America. 1998. V. 88(2). P. 368–392.

4. Corporation NVIDIA (2010) NVIDIA CUDA Programming Guide Version 3.2. Santa Clara, California, USA.

5. Karypis G., Kumar V. METIS: Unstructured graph partitioning and sparse matrix ordering system. The University of Minnesota, 2.

SOLUTION TO LARGE THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF SEISMICITY IN LAYERED MEDIA ON A MULTI-GPU SYSTEM USING CAE FIDESYS

A.V. Trachenko, A.S. Prokopenko

We consider a seismic problem of finding a configuration and parameters of a layered medium. The problem is inverse; to solve it one should solve a large number of direct problems with different parameters of the medium under consideration and select such of them, for which the results of numerical simulation are the closest to the experimental data. To run the experiment a seismic source and receivers are installed on the surface of the ground and collect the experimental data. Since the behavior of a large volume of a medium is simulated every time, we suggest applying an effective numerical solver implemented on a high-performance massively parallel architecture.

Keywords: seismicity, spectral element method, graphical processor unit, NVIDIA CUDA.

УДК 539.231

ИССЛЕДОВАНИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ НАНОКЛАСТЕРОВ С ПОДЛОЖКОЙ МЕТОДОМ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

А.В. Уткин

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

utkin@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

При помощи метода молекулярной динамики проведено численное моделирование столкновения нанокластеров с подложкой. Исследовано влияние размера нанокластера, скорости и угла удара на процесс формирования связанного состояния кластер–подложка.

Ключевые слова: численное моделирование, метод молекулярной механики, нанокластеры.

Метод исследования и физическая система

В рамках метода молекулярной динамики было проведено исследование влияния скоростей и углов падения кластера на процесс осаждения на подложку.

Материал нанокластеров и подложки был выбран одинаковым (медь), а взаимодействие атомов как внутри подложки и нанокластера, так и между атомами подложки и нанокластера, описывалось многочастичным EAM (метод внедренного атома) потенциалом [1]. В численных экспериментах моделирование проводилось для кластеров диаметром 50 Å в интервале скоростей от 10 до 800 м/с. Моделируемая подложка должна удовлетворять следующим требованиям. Ее масса должна быть много больше массы кластеров (в пределе – бесконечность). Ее размеры должны быть таковы, что волна разгрузки в подложке возвращается в область контакта через время, много большее времени столкновения кластера с подложкой. В приводимых численных экспериментах подложка состояла из 111656 атомов. Для имитации бесконечной подложки, положение которой в пространстве не меняется, использовался хорошо апробированный в численных экспериментах прием искусственной вязкости, которая действовала на атомы подложки. Это также позволило имитировать диссипацию энергии, приносимой кластером, в бесконечную подложку. В начальный момент времени задавалась скорость кластера, которая являлась контролируемым внешним параметром. В качестве основных характеристик, позволяющих проанализировать процесс осаждения кластеров на подложку, были выбраны следующие физические параметры: кинетические температуры (этот термин используется для подчеркивания неравновесности состояния кластера в процессе столкновения), определяемые из кинетической энергии хаотического движения атомов; кинетическая температура в области контакта и компоненты скорости центра масс кластера. Оценка величины кинетической температуры в области контакта позволяет определить наличие плавления вещества после ударного взаимодействия с подложкой и определяется на основе физического анализа системы атомов кластера, попавших в полусферу радиусом 7 Å с центром в точке контакта нанокластера и подложки. Для решения поставленной задачи был создан и программно реализован параллельный масштабируемый алгоритм, основанный на одномерной параллелизации с дополнительной функцией динамической балансировки.

Результаты

В результате численных экспериментов было выявлено, что нанокластеры и подложка образуют связанное состояние при нормальном ударе во всем исследуемом интервале скоростей.

В качестве иллюстрации на рис. 1 представлены зависимости полной кинетической температуры кластера (А) и температуры в области контакта кластера (В) от числа шагов по времени для скорости кластера 500 м/с. Следует отметить, что в области контакта наблюдается быстрый рост температуры (почти 900 К) в момент столкновения, а затем ее резкое падение (времена порядка 0.1–1 пс) за счет теплопередачи в подложку. Было проведено численное моделирование взаимодействия кластера с подложкой при различных скоростях и углах падения, отличных от нормального.

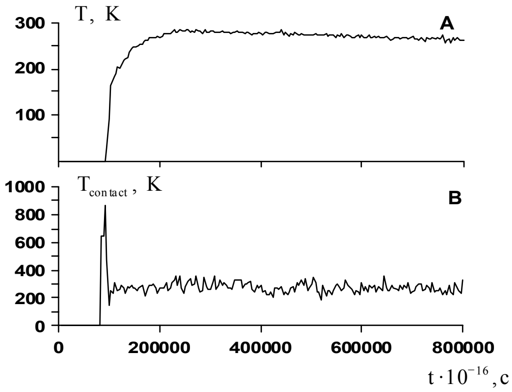


Рис. 1

Как и в проведенных исследованиях по осаждению кластера, который двигался перпендикулярно подложке, было установлено существование режимов, при которых образуется связанное состояние между кластером и материалом подложки, что подтверждается зависимостями скорости центра масс кластера от времени. Детализированные исследования влияния угла падения в широком диапазоне значений позволили обнаружить критический минимальный угол между вектором скорости и поверхностью, меньше которого осаждение кластеров не происходит. Численные эксперименты показали, что увеличение скорости напыляемого кластера ведет к уменьшению критического угла. Так, для скорости кластера 500 м/с критический угол падения $\alpha = 24°$, для скорости 300 м/с – $\alpha = 32°$, для 400 м/с – $\alpha = 30°$, для 700 м/с – $\alpha = 22°$, а для 800 м/с – $\alpha = 17°$.

Выводы

В рамках метода молекулярной динамики было проведено исследование влияния скоростей и углов падения кластера на процесс осаждения на подложку.

Численные эксперименты по осаждению кластера, который двигался перпендикулярно подложке, показали, что во всем исследуемом интервале скоростей образуется связанное состояние между кластером и материалом подложки.

Молекулярно-динамические расчеты показали, что касательное падение кластера на поверхность подложки приводит к возникновению плоского следа на поверхности из вещества кластера. Это приводит к лучшему покрытию поверхности, что подтверждается различными экспериментальными данными по высокоскоростному напылению.

Детализированные исследования влияния угла падения в широком диапазоне значений позволили обнаружить критический минимальный угол между вектором скорости и поверхностью, меньше которого осаждение кластеров не происходит. Было установлено, что увеличение скорости напыляемого кластера ведет к уменьшению критического угла.

Проведенный анализ поверхности подложки после осаждения кластеров позволил сделать вывод о появлении областей концентраторов напряжений как под адсорбированными кластерами, так и под «следами», оставленными кластерами на поверхности. Образование таких структур при внешних механических нагрузках может приводить к снижению механических характеристик материала и к зарождению в этих местах очагов разрушения материала.

Список литературы

1. Johnson R.A. // Phys. Rev. B. 1989. V. 39. P. 12554–12559.

THE SIMULATION OF HIGH-VELOCITY NANOCLUSTER DEPOSITION USING MOLECULAR DYNAMICS

A.V. Utkin

In the present study molecular dynamics simulations were performed for collisions of nanoclusters with the substrate to determine the mechanism of formation of bound states depending on the cluster size, impact velocity and angle of incidence.

Keywords: computer simulations, molecular dynamics, nanoclusters.

УДК 539.3

ПЕРЕХОДНЫЕ СЛОИ В КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛАХ КАК ОБЛАСТИ НОВОЙ ФАЗЫ

Р.А. Филиппов

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

rmnfilippov@gmail.com

Поступила в редакцию 16.06.2011

Исследуются изменения эффективных модулей упругости композита с малым относительным содержанием наночастиц за счет формирования вокруг частиц переходных слоев новой фазы. Развивается модель, описывающая возникновение и развитие переходных слоев как областей новой фазы, увеличивающих объем составных включений, каждое из которых образовано ядром – исходной наночастицей и оболочкой – переходным слоем новой фазы. Рассматривается задача о возникновении слоя новой фазы вокруг изолированного включения. Затем в приближении эффективного поля исследуется развитие областей новой фазы вокруг распределенных в пространстве включений. В зависимости от механических воздействий определяются объемная доля новой фазы и эффективные модули упругости полученного композита.

Ключевые слова: переходные слои, фазовое превращение, композитные материалы, эффективное поле, эффективные модули.

Изолированное включение в матрице, претерпевающей фазовое превращение

Рассматривается изолированное сферическое включение в неограниченной матрице, способной претерпевать бездиффузионное фазовое превращение, сопровождающееся изменением модулей упругости и собственной деформацией превращения, в условиях всестороннего растяжения/сжатия. Материалы включения и фаз матрицы изотропные. Помимо условий механического равновесия, обычных для составного тела, на межфазной границе ставится дополнительное условие термодинамического равновесия [1]. Используется приближение малых деформаций, развитое в работах [2–5].

Детально рассмотрено фазовое превращение вокруг сферического изолированного включения при всестороннем растяжении/сжатии:

– определена зависимость равновесного радиуса межфазной границы от внешней деформации;

– исследованы перераспределения напряжений и сбросы энергии в результате развития области новой фазы;

– исследована устойчивость межфазной границы по отношению к аксиально-симметричным возмущениям; показана невозможность одновременного увеличения объемного модуля упругости и модуля сдвига в результате устойчивого роста новой фазы;

– показано, что формирование устойчивой области новой фазы вокруг жесткого включения должно сопровождаться уменьшением модуля сдвига, в то время как гомогенное зародышеобразование должно сопровождаться увеличением модуля сдвига;

– развит метод отбраковки равновесных, но неустойчивых решений, с помощью соотнесения деформаций на межфазной границе с зоной фазовых переходов.

Композит с матрицей, претерпевающей фазовое превращение

Рассматривается композит, состоящий из матрицы, способной претерпевать фазовое превращение, и изотропно распределенных сферических включений. Для определения напряженного состояния композита используется метод эффективного поля [6–8]. Предполагается, что каждое включение ведет себя как изолированное включение в однородной среде с модулями упругости матрицы под действием эффективного внешнего поля, которое складывается из внешнего поля и полей, наведенных окружающими неоднородностями.

В приближении эффективного поля рассмотрен рост новой фазы в композитном материале в условиях гидростатического нагружения (рис. 1):

– определена зависимость объемной концентрации новой фазы от внешней деформации, параметров материала и начальной концентрации включений;

– исследованы энергетические изменения вследствие формирования областей новой фазы и устойчивость межфазных границ;

– определены эффективные упругие свойства сформировавшегося композита с составными включениями в зависимости от управляющей внешней деформации;

– на примере деформации всестороннего растяжения/сжатия композита со сферическими частицами продемонстрирована возможность увеличения одного из эффективных модулей упругости (объемного модуля) при условии уменьшения другого эффективного модуля (модуля сдвига).

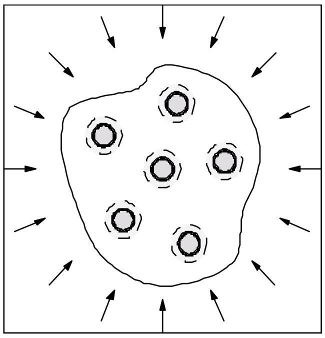


Рис. 1

Представленные результаты получены совместно с Е.Н. Вильчевской, А.Б. Фрейдиным.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-01-00670), в рамках программы фундаментальных исследований госакадемий РФ №22 и гранта для государственной поддержки ведущих научных школ РФ НШ 3776.2010.1.

Список литературы

1. Гринфельд М.А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука, 1990. 312 с.
2. Кубланов Л.Б., Фрейдин А.Б. // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 493–501.
3. Морозов Н.Ф., Фрейдин А.Б. // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1998. Т. 223. С. 220–232.
4. Фрейдин А.Б. // Прочность и разрушение материалов и конструкций: Межвуз. сб. / Под ред. Н.Ф. Морозова (Исследования по упругости и пластичности.) СПб.: Изд-во СПбГУ, 1999. Вып. 18. С. 266–290.
5. Freidin A.B. // ZAMM. 2007. V. 87. No 2. P. 102–116.
6. Kunin L.A. Elastic media with Microstructure. II. Three Dimensional Models // Springer Series in Solid State Sciences. V. 44. Berlin-NY: Springer-Verlag, 1983. 272 p.
7. Канаун С.К., Левин В.М. Метод эффективного поля в механике композитных материалов. Петрозаводск: Изд-во Петрозаводс. ун-та, 1993. 538 с.
8. Kanaun S.K., Levin V.M. Self-consistent methods for composites. Vol. 1: Static Problems. Dordrecht: Springer, 2008.

TRANSITION LAYERS IN COMPOSITE MATERIALS AS NEW PHASE DOMAINS

R.A. Filippov

We investigate a changing effective elastic modulus of a composite with low concentration of nanoparticles resulting from the formation of transition layers around particles.

We develop a model of the transition layers as new phase domains which appear and grow around the particles that increase the effective size of the particles consisting of kernels (the initial nanoparticles) enclosed by a transition layerof a new phase.

We study formation of a new phase around an isolated inclusion. Then, based on the effective field (selfconsistent) approach we describe new phase formation around spatially distributed particles. The dependence of the microstructure on the mechanical action is studied, and effective elastic properties of the composite are determined.

Keywords: transition layers, phase transition, composite materials, effective field, effective moduli.

УДК 539.3

МЕТОД МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

В.М. Фомин

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

fomin@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Разбираются возможности применения метода молекулярной динамики к решению задач наномеханики и механики сплошных сред. Изучены особенности этого метода как метода расчета дискретных характеристик системы, состоящей из взаимодействующих атомов и молекул. Усредняя по ансамблю найденные фазовые траектории атомов или молекул, удается определить необходимые термомеханические характеристики, которые обычно задаются экспериментально и используются для замыкания уравнений механики сплошных сред. На конкретных примерах показаны особенности, которые имеют место при решении задач наномеханики и переносе этих результатов на задачи механики сплошных сред.

Ключевые слова: молекулярная динамика, наномеханика, механика сплошных сред.

Разбирается применение метода молекулярной динамики (ММД) к решению задач наномеханики и механики сплошных сред. ММД – это дискретный численный метод, позволяющий рассчитывать характеристики системы, которая рассматривается как совокупность взаимодействующих атомов или молекул. Изучены четыре взаимосвязанных раздела ММД:

– формирование начального состояния системы, адекватного поставленной физической задаче;

– численный метод расчета фазовых траекторий системы;

– способы усреднения фазовых траекторий.

Ввиду ограниченных возможностей современных многопроцессорных ЭВМ метод молекулярной динамики позволяет проводить расчеты систем с достаточно небольшим числом атомов или молекул, то есть порядка 10^8–10^9 атомов, что соответствует длине ребра куба порядка 0.2 микрона, поэтому переносить результаты на задачи механики сплошной среды необходимо с большой осторожностью [1].

Молекулярно-динамическое исследование термодинамических свойств наноструктур проведено на следующих примерах.

1. Одноосное растяжение наноструктуры с постоянной скоростью деформации.

Построены динамические диаграммы напряжение–деформация в зависимости от скорости нагружения. Вычислена скорость звука, которая для меди совпала с данными экспериментов.

2. Динамическое хрупкое разрушение бездефектных твердых тел.

По результатам расчетов вычислены экспериментальные константы в критериях разрушения, предложенных Нейбером – Новожиловым, Никифоровским – Шемякиным и др.

3. Растяжение гетероструктур с постоянной скоростью.

В результате исследований получены полосы Людерса – Чернова.

4. Молекулярно-динамическое моделирование формирования InCa/GaAs нанотрубок.

Сравнение данных экспериментов и результатов расчетов позволило установить границы применимости ММД и механики сплошной среды.

5. Расчет уравнения состояния и термодинамических свойств наноструктур при умеренных давлениях и температурах.

Список литературы

1. Фомин В.М. и др. Механика – от дискретного к сплошному. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. 344 с.

THE MOLECULAR DYNAMICS METHOD AND ITS APPLICATION TO THE PROBLEMS OF CONTINUUM MECHANICS

V.M. Fomin

The possibility of applying the molecular dynamics method to the problems of nanomechanics and continuum mechanics is considered. The characteristics of this method as an approach for calculation of discrete properties of a system composed of interacting atom and molecules are studied. Using ensemble averages for the calculated phase trajectories of atoms or molecules allows us to determine required thermo-mechanical characteristics which ordinary can be specified in an experiment and employed for closing of continuum mechanics equations. The peculiarities arising when solving nanomechanics problems and with a transfer of these results to continuum mechanics problems are demonstrated on several examples.

Keywords: molecular dynamics, nanomechanics, continuum mechanics.

УДК 577.353

РЕНТГЕНОДИФРАКЦИОННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАНОМЕХАНИКИ МЫШЕЧНОГО СОКРАЩЕНИЯ

А.К. Цатурян[1], Н.А. Кубасова[1], С.Ю. Бершицкий[2], М.А. Ференцзи[1]

[1]НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова
[2]Институт иммунологии и физиологии УрО РАН, Екатеринбург
[3]Имперский колледж, Лондон (Великобритания)

tsat@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Представлены результаты экспериментальных исследований структурных изменений в сокращающихся клетках скелетной мышцы в ответ на различные механические воздействия. Эксперименты были проведены на станции ID02 Европейского источника синхротронного излучения (Гренобль, Франция) и включали в себя одновременную регистрацию двухмерной дифракционной рентгенограммы с временным разрешением до 1 мс и макроскопических механических величин (напряжения и деформации) в ответ на различные импульсные воздействия. Для анализа и количественной интерпретации экспериментальных данных использован метод прямого моделирования, основанный на известных атомных структурах сократительных белков и предложенном нами методе параметризации (принцип минимума упругой энергии). Обсуждаются метод рентгенодифракционной интерферометрии для определения субнанометровых перемещений сократительных белков в сокращающейся мышце и соответствующие математические модели, а также возможности использования рентгенодифракционных данных для изучения крутильных и сдвиговых компонент деформации белковых компонентов сокращающейся мышцы.

Ключевые слова: мышца, напряжение, рентгеновская дифракция, моделирование.

В основе мышечного сокращения лежит взаимодействие двух моторных белков – актина и миозина, которые организованы в микроскопические нити. Мышца совершает механическую работу путем прямого преобразования свободной энергии гидролиза аденозинтрифосфорной кислоты (АТФ) в активном центре миозина. Молекулярные механические процессы, лежащие в основе мышечного сокращения, остаются, во многом, неизвестными, а их выяснение представляет собой фундаментальную проблему молекулярной биомеханики, имеющую потенциальные приложения.

В скелетных и сердечных мышцах актиновые и миозиновые нити образуют высокоупорядоченные структуры – саркомеры – с правильной, близкой к кристаллической, упаковкой. Благодаря такой упорядоченности, нанометровые перемещения и пиконьютонные силы отдельных моторных молекул складываются в макроскопические деформации и напряжения, а при прохождении через мышцу монохроматических рентгеновских лучей возникает богатая дифракционная картина, по изменениям которой можно исследовать молекулярные движения, лежащие в основе макроскопического механического ответа мышцы на те или иные воздействия [1].

Представлены результаты исследований, проведенных в 2006–2010 гг. на станции ID02 Европейского источника синхротронного излучения в Гренобле (ESRF, Франция), в которых одновременно регистрировали изменения макроскопических механических характеристик и рентгенодифракционной картины сокращающихся мышц в ответ на различные воздействия.

Для количественной интерпретации рентгенодифракционных картин мы использовали метод прямого математического моделирования, который основан на имеющейся структурной информации (атомные структуры миозиновых и актиновых молекул, полученные с помощью белковой кристаллографии, данные электронно-микроскопических исследований) и эффективной параметризации выбора актиновых мономеров, к которым присоединяются миозиновые молекулы. Расчетные рентгенодифракционные картины получали путем осреднения квадрата амплитуды преобразования Фурье модельных карт электронной плотности и сравнивали их с экспериментальными рентгенограммами. При минимальном числе произвольных параметров модель хорошо описывает всю двумерную дифракционную диаграмму в различных состояниях мышц [2, 3].

В результате измерений интенсивности внемеридиональных слоевых линий в мышечных волокнах показано, что в развитии силы максимального изометрического (при постоянной деформации) сокращения принимает участие около 40% общего числа головок молекул, каждая из которых развивает при температуре, близкой к физиологической, силу примерно в 6 пН. Показано, что в ходе укорочения мышцы происходит поворот «шейных» участков миозиновых молекул относительно глобулярных «головок», прочно связанных с актином, а в ответ на растяжение мышцы под действием внешней силы число присоединенных к актину головок возрастает, но характер их связи с актином меняется с прочной, стерео-специфической на слабую, нестерео-специфическую.

Хотя пространственное разрешение рентгеновской дифракции на мышечных волокнах не превосходит 2.5 нм [4], метод интерферометрии [5, 6], основанный на анализе тонкого высокочастотного расщепления миозиновых меридиональных рефлексов на рентгенограмме сокращающегося мышечного волокна дает возможность исследования осевых перемещений с точностью до 0.1–0.2 нм. Такое расщепление обусловлено интерференцией рентгеновских лучей, рассеянных двумя половинами саркомера.

Для анализа и интерпретации данных, полученных этим методом, разработана математическая модель интерференционного расщепления меридионального миозинового рефлекса М3, который возникает при дифракции рентгеновских лучей на линейной решетке, образованной ярусами миозиновых головок, выступающими с осевым периодом ~14.5 нм из толстой миозиновой нити. Модель учитывает возможные изменения формы головок и растяжимость миозиновых нитей. С помощью этой модели удалось объяснить как результаты собственных экспериментов, в которых было проведено измерение изменений тонкой структуры М3 в ответ на скачок температуры в сокращающемся мышечном волокне [6], так и казавшиеся парадоксальными результаты экспериментов других авторов.

Обсуждаются вопросы об использования данных малоугловой рентгеновской дифракции на мышечных волокнах для изучения деформаций белковых компонент саркомеров мышц, таких как кручения и растяжения актиновых нитей [4, 7] или сдвиговые деформации, обусловленные потерей устойчивости симметричной конфигурации саркомера при закритических нагрузках [8].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №№ 08-04-01111-а, 08-04-01085-а, 11-04-00908-а), Медицинского исследовательского совета (MRC) Великобритании, Европейского источника синхротронного излучения (ESRF).

Список литературы

1. Bershitsky S.Y., Ferenczi M.A., Koubassova N.A., Tsaturyan A.K. // Front. Biosc. 2009. V. 14. P. 3188–3213.
2. Koubsssova N.A., Tsaturyan A.K. // Biophys. J. 2002. V. 83. P. 1082–1097.
3. Koubsssova N.A., Bershitsky S.Y., Ferenczi M.A., Tsaturyan A.K. // Biophys. J. 2008. V. 95. P. 2880–2894.
4. Tsaturyan A.K., Koubassova N., Ferenczi M.A. et al. // Biophys. J. 2005. V. 88. P. 1902–1910.
5. Reconditi M., Koubassova N., Linari M. et al. // Biophys. J. 2003. V. P. 1098–1110.
6. Кубасова Н.А. и др. // Молек. биол. 2009. Т. 43. Т. 43. С. 689–699.
7. Метальникова Н.А., Цатурян А.К. // Биофизика. Т. 55. С. 892–898.
8. Shabarchin A.A., Tsaturyan A.K. // Biomech Model Mechanobiol. 2010. V. 9. P. 163–175.

X-RAY DIFFRACTION STUDY OF NANOMECHANICS OF MUSCLE CONTRACTION

A.K. Tsaturyan, N.A. Koubassova, S.Y. Bershitsky, M.A. Ferenczi

Some results of experimental study of structural changes in contracting muscle fibres in response to various mechanical, chemical and thermal perturbations are described. The experiments were performed on beamline ID02 at the European Synchrotron Radiation Facility (Grenoble, France). We simultaneously recorded a 2D x-ray diffraction pattern with the time resolution of up to 1 ms and macroscopic mechanical characteristics, tension and strain, upon various step perturbations. To analyze and quantitatively interpret the experimental data, we used a direct modeling approach based on available atomic structures of contractile proteins and a parameterization method named the «principle of minimum of elastic distortion energy».

Keywords: muscle, tension, x-ray diffraction, modeling.

УДК 519.6:532.516

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЗМА ОБРАЗОВАНИЯ ТЕРМОБАРА В ОЗЕРЕ БАЙКАЛ В ПЕРИОД ВЕСЕННЕ-ЛЕТНЕГО ПРОГРЕВАНИЯ

Б.О. Цыденов, А.В. Старченко

Томский госуниверситет

ba1r@sibmail.com

Поступила в редакцию 16.06.2011

Разработана математическая модель и построен вычислительный алгоритм, позволяющий воспроизвести процесс формирования и дальнейшего развития термобара в озере Байкал с учетом основных физических факторов. Полученные численные результаты демонстрируют возникновение циркуляционного течения вблизи берега и его смещение к центру озера с течением времени.

Ключевые слова: термический бар, температура максимальной плотности, приближение Буссинеска, конвекция, численный эксперимент.

Развитие научно-технического прогресса ставит перед человечеством все новые проблемы. Одной из них является проблема «чистой воды». По оценкам ученых, через несколько десятилетий чистая пресная вода станет важнейшим ресурсом, поскольку она незаменима в отличие от других природных богатств Земли. Озеро Байкал является самым крупным хранилищем пресной воды на планете (около 20% мировых запасов).

Термобаром называется узкая зона в глубоком озере умеренных широт, в которой происходит погружение имеющей наибольшую плотность воды от поверхности до дна. Он разделяет водоем на две термические зоны: теплоактивную и теплоинертную с разными видами вертикальной стратификации температуры. Термобар влияет на экосистемы крупных озер, так как он разделяет две зоны с разными характеристиками воды, что определяет пространственные различия планктонных сообществ. Для сохранения уникальности Байкала и его экосистемы необходимо понимание всех физических механизмов, участвующих в процессах водообмена и формировании качества его вод. Важность изучения термобара как явления заключается в том, что интенсивные нисходящие течения, возникающие между двумя конвективными ячейками, могут привести к быстрому распространению загрязнения из поверхностных слоев до очень больших глубин.

Модель, представленная в настоящем исследовании, использует гипотезу о двухмерности. Рассматривается взятый из [1] прибрежный профиль озера, соответствующий реальным условиям южного бассейна озера Байкал. В качестве уравнения состояния используется уравнение, связывающее плотность воды с температурой. На свободной поверхности ставятся граничные условия типа «твердой крышки» (отсутствие ветровых напряжений) и задается поток тепла. На дне, помимо условия непроницаемости, задается связь касательных напряжений с придонной скоростью, а также условие отсутствия теплообмена с дном.

Математическая постановка задачи основана на двумерной негидростатической модели в приближении Буссинеска для конвективного течения:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}=$$
$$=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial uv}{\partial x}+\frac{\partial v^2}{\partial y}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial v}{\partial y}\right)-g\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$
$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial uT}{\partial x}+\frac{\partial vT}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_y\frac{\partial T}{\partial y}\right),$$

где $\tilde{p}=p+gy\rho_0$, $\rho = \rho_0(1 - \gamma(T - T_m)^2)$, $\gamma = 8.572628\cdot10^{-6}$ град$^{-2}$; u, v – составляющие скорости по осям x и y соответственно, T – температура, $T_m \approx 4\,°\mathrm{C}$ – температура максимальной плотности (ТМП), $\rho_0 = 998.2$ кг/м^3 – характерная плотность воды, p – давление, g – ускорение свободного падения, коэффициенты K_x, K_y и D_x, D_y характеризуют интенсивность диффузионного переноса импульса и тепла в соответствующем направлении.

Начальные условия задаются в виде

$$u = v = 0, \quad T = T_0(y) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Граничные условия имеют вид:

– на дне

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \partial T / \partial n = 0;$$

– на правой границе

$$x = L_x: \quad u = 0, \quad v = 0, \quad \partial T / \partial x = 0;$$

– на поверхности

$$y = L_y: \quad \partial u / \partial y = 0, \quad v = 0,$$

$$c_{water} \rho_0 D_y \partial T / \partial y = Q,$$

где c_{water} – теплоемкость воды.

Решение конвективно-диффузионных уравнений основано на конечно-разностном методе конечного объема [2]. Численный алгоритм нахождения поля течения и температуры опирается на разностную схему Кранка–Николсона. Конвективные слагаемые в уравнениях аппроксимируются по противопотоковой схеме Леонарда Quick 2-го порядка. Для согласования поля скорости и давления использована процедура SIMPLE Патанкара [2]. Системы разностных уравнений на каждом шаге по времени решаются методом нижней релаксации (вычисление компонент скорости) и явным методом Булеева (нахождение температуры и давления).

Путем блокировки некоторых конечных объемов прямоугольной неравномерной сетки расчетная область была приближена к прибрежному профилю озера. Используется неравномерная ортогональная сетка 126×90 с измельчением шагов у берега ($x = 0$). Шаг по времени $\Delta t = 60$ с. Начальные условия удовлетворяют состоянию покоя и заданным полям температуры, соответствующим измеренному его вертикальному распределению в мае, которое изменялось от 1.7 °C на водной поверхности до максимального значения 3.8 °C на глубине 900 м [1].

Представлены результаты расчетов линий тока, проведенных в условиях, близких к естественным. На рис. 1 показано образование циркуляционного течения через 7 суток вблизи берега, которое со временем продвигается к открытой границе, и после 30 суток от начала вычислительного эксперимента система циркуляционных течений за счет явления термобара продвигается на расстояние более 9 км от берега (рис. 2).

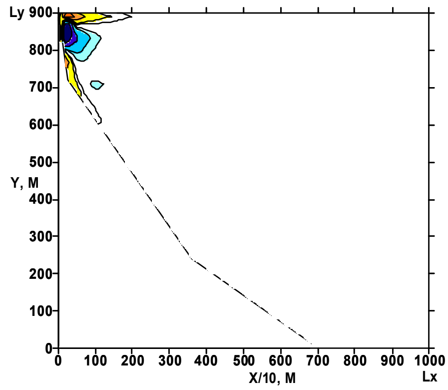


Рис. 1

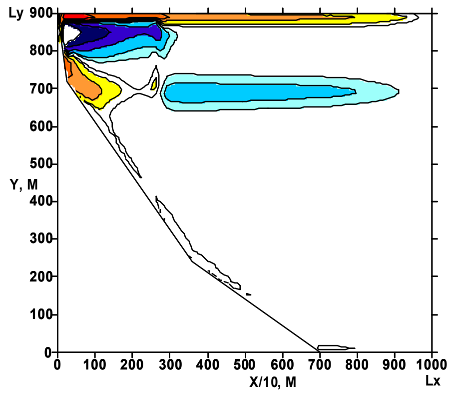


Рис. 2

Отметим, что типичные абсолютные значения скоростей, полученные в численных экспериментах, были следующими: компоненты u – 0.08–0.46 см/с, v – 0.09–0.45 см/с. Приведенные результаты показывают, что в условиях, близких к естественным, происходит проникновение поверхностных вод в глубокие слои при весеннем прогреве. Это согласуется с описаниями натурных наблюдений [1].

Список литературы

1. Shimaraev M.N. et al. Physical Limnology of Lake Baikal: a Review. Irkutsk-Okayama. 1994. 81 с.

2. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. С. 96–98.

NUMERICAL MODELLING OF THE MECHANISM OF THE THERMAL BAR FORMATION IN LAKE BAIKAL IN A SPRING-SUMMER WARMING PERIOD

B.O. Tsydenov, A.V. Starchenko

The developed mathematical model and numerical algorithm make it possible to reproduce a process of the thermal bar dynamics. The results presented here show the process of appearance of circulation flow off shore and its movement towards the central part of the lake with time.

Keywords: thermal bar, temperature of maximum density, Boussinesq approximation, convection, numerical experiment.

УДК 533.9

СОЛНЕЧНЫЙ ВЕТЕР ВБЛИЗИ ГЕЛИОСФЕРНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

С.В. Чалов

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

chalov@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

В рамках двухжидкостной модели солнечного ветра дается объяснение сверхзвуковому характеру течения тепловой плазмы за фронтом почти прямой гелиосферной ударной волны, обнаруженному на космическом аппарате «Вояджер-2».

Ключевые слова: космическая плазма, солнечный ветер, ударные волны.

Введение

В 2004 и в 2007 годах космические аппараты (КА) «Вояджер-1» и «Вояджер-2» на расстояниях 94 и 84 а.е. от Солнца пересекли гелиосферную ударную волну (УВ) УВ-торможения сверхзвукового потока солнечного ветра (СВ). Расстояния до УВ с точностью до нескольких процентов были предсказаны задолго до пересечения в численных расчетах, проведенных в рамках кинетико-газодинамической модели взаимодействия СВ с локальной межзвездной средой (ЛМС) [1]. На аппарате «Вояджер-1» все приборы, предназначенные для измерения плазменных параметров СВ, вышли из строя еще до пересечения УВ – работали только магнетометр и датчики космических лучей. На аппарате «Вояджер-2» плазменные приборы работали исправно, и было обнаружено, что течение тепловой плазмы СВ (энергия теплового движения равна нескольким эВ) за фронтом почти прямой УВ оставалось сверхзвуковым с числом Маха, близким к 2 [2]. В настоящем исследовании этот эффект объясняется в рамках двухжидкостной модели. Одна жидкость – тепловая плазма СВ, а другая моделирует «газ» энергичных протонов (энергия > 1 кэВ), поведение которого при прохождении УВ близко к адиабатическому. Энергичные протоны образуются в СВ в результате ионизации межзвездных атомов, проникающих во внутренние области гелиосферы. Сразу после образования эти протоны «захватываются» гелиосферными электрическими и магнитными полями и движутся вместе с СВ в направлении гелиопаузы. Расчеты показывают, что при пересечении УВ энергичным «захваченным» протонам передается большая часть кинетической энергии потока, так что тепловая плазма остается сверхзвуковой, хотя течение смеси, естественно, является дозвуковым. Плазменные приборы аппарата «Вояджер-2» способны регистрировать только тепловые протоны.

Формулировка проблемы

Тепловую плазму СВ можно рассматривать как столкновительную среду (кулоновские столкновения) с максвелловским распределением по скоростям. Энергичные протоны являются бесстолкновительными – рассеяние частиц происходит в результате их взаимодействия с альвеновскими флуктуациями электромагнитного поля. Измерения на КА и теоретические оценки показывают, что скоростные распределения «захваченных» протонов близки к изотропным (в системе координат, связанной с СВ), однако H-теорема Больцмана для них не справедлива и эти распределения далеки от максвелловских.

На прямой УВ выполняются следующие соотношения для смеси тепловой плазмы и энергичных «захваченных» протонов:

$$\rho U = \text{const}, \tag{1}$$

$$\rho U^2 + p_{SW} + p_{PUI} = \text{const}, \tag{2}$$

$$\frac{U^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_{SW} + p_{PUI}}{\rho} = \text{const}. \tag{3}$$

В соотношениях (1)–(3) введены обозначения: U и ρ – скорость и плотность смеси, p_{SW} и p_{PUI} – давление тепловой плазмы солнечного ветра (протоны + электроны) и энергичных «захваченных» протонов. Динамическое воздействие магнитного поля на течение не учитывается, хотя оно может влиять на кинематику энергичных протонов. Очевидно, что система (1)–(3) будет замкнутой, если интересоваться только полным давлением смеси. Однако, как отмечалось, «Вояджер-2» измеряет только тепловые протоны, и для интерпретации этих измерений необходимо рассматривать тепловые и энергичные компоненты раздельно. Иными словами, для разрешения условий на УВ необходимо одно дополнительное соотношение. Для получения этого соотношения можно использовать следующие соображения. Ларморовский радиус «захваченных» протонов на порядок превышает толщину гелиосферной УВ [2]. Оценки показывают, что за время пересечения фронта УВ их ларморовскими орбитами рассеянием можно пренебречь. В этих условиях для перпендикулярной УВ сохраняются 1-й и 2-й адиабатические инварианты:

$$v_\perp^2/B = \text{const}, \quad v_\parallel = \text{const}, \tag{4}$$

где $v_\perp$ и $v_\parallel$ – компоненты скорости протонов в сопутствующей системе координат, перпендикулярные и параллельные вектору магнитного поля **B**. Из (4) очевидно, что после прохождения разрыва изотропное распределение энергичных протонов по скоростям становится анизотропным. Предполагаем далее, что на относительно малом (по отношению к кривизне УВ) расстоянии L от разрыва анизотропное распределение становится изотропным вследствие рассеяния частиц на альвеновских волнах (рис. 1).

Тогда можно показать [3], что необходимое дополнительное соотношение имеет вид:

$$p_{PUI,2} = \frac{s(2s+1)}{3} p_{PUI,1}, \tag{5}$$

где s – скачок плотности на разрыве. Здесь «1» относится к давлению перед разрывом, «2» – к давлению на расстоянии L за разрывом (рис. 1).

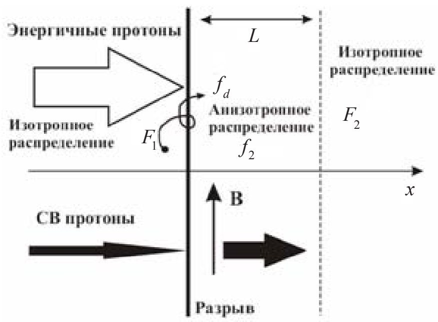


Рис. 1

Результаты

На рис. 2 показаны числа Маха тепловой плазмы СВ за фронтом УВ как функции числа Маха энергичных протонов перед фронтом: $M_{SW} = (\rho_{SW}U^2/\gamma p_{SW})^{1/2}$, $M_{PUI} = (\rho_{PUI}U^2/\gamma p_{PUI})^{1/2}$. Кривые соответствуют различным значениям концентрации «захваченных» протонов $\chi = \rho_{PUI}/\rho_{SW}$; вблизи гелиосферной УВ $0.2 \le \chi \le 0.3$. Согласно измерениям [2], $M_{SW,1} \approx 10$. В момент образования «захваченных» протонов вследствие ионизации межзвездных атомов водорода их скорости в подвижной системе координат (тепловые скорости) равны локальной скорости СВ. Таким образом, число Маха «захваченных» протонов близко к единице. Поэтому на рис. 2 ограничились довольно узким диапазоном изменения $M_{PUI,1}$. Из рисунка видно, что для наиболее вероятных значений параметра (прямых измерений нет) течение тепловой плазмы СВ за гелиосферной УВ остается сверхзвуковым, если $M_{PUI,1} \le 1$. При этом, как легко показать, течение смеси тепловой плазмы и «захваченных» протонов, естественно, является дозвуковым.

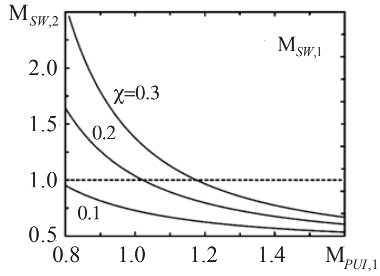


Рис. 2

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №10-01-00258, 10-02-01316) и Пр. ФИ ОЭММПУ РАН.

Список литературы

1. Baranov V.B., Malama Y.G. // J. Geophys. Res. 1993. V. 98. P. 15157–15163.
2. Richardson J.D. et al. // Nature. 2008. V. 454. P. 63–66.
3. Fahr H.J., Chalov S.V. // Astron. Astrophys. 2008. V. 490. L35–L3.

SOLAR WIND IN THE VICINITY OF THE HELIOSPHERIC TERMINATION SHOCK

S.V. Chalov

An explanation of the supersonic nature of the thermal plasma flow behind the nearly perpendicular heliospheric termination shock detected at «Voyager-2» spacecraft is provided in the framework of a two-fluid model of the solar wind.

Keywords: cosmic plasma, solar wind, shock waves.

УДК 539.375, 539.32, 539.422.52

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КОМПОЗИТА ГРАФЕН – УГЛЕРОДНЫЕ НАНОТРУБКИ В РАМКАХ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО ПОДХОДА

 А.В. Ченцов

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

chentsov@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Выполнено моделирование механического поведения класса систем, содержащих одновременно углеродные нанотрубки и графеновые плоскости. Такой класс нанокомпозитов расширяет применения нанокомпозитов и иерархических систем на базе нанотрубок, комбинируя их с различными аллотропными формами углерода. В рамках дискретно-континуального подхода построена модель слоистой системы, представляющей собой набор массивов одностенных углеродных нанотрубок, разделенных графеновыми слоями. В ходе численных экспериментов энергетическим методом получены оценки эффективных упругих модулей для разработанной модели.

Ключевые слова: механические свойства, графен, нанотрубка, моделирование.

Механизм накопления энергии деформации с точки зрения атомной структуры материала зависит от типа определяющих потенциалов. Свой вклад дают ковалентные, ван-дер-ваальсовы, кулоновские, пи-электронные взаимодействия. Для построения приемлемых механических моделей можно воспользоваться определенными приближениями и ограничить учитываемые вклады. Описание поведения системы атомов возможно с помощью группы потенциалов, соответствующих разным видам взаимодействий. В основе моделирования механического поведения исследуемых нанообъектов лежит дискретно-континуальный подход [1, 2] с учетом условий связи между отдельными молекулами. В качестве нанообъектов используются углеродные нанотрубки, фрагменты графеновых плоскостей и их системы, деформационные и прочностные свойства которых требуется определять.

Введение в модель материала с нелинейной диаграммой деформирования вместе с алгоритмом построения пространственной сети связей позволили расширить методы дискретно-континуальной модели на молекулярные системы. В работе рассматриваются системы, содержащие одновременно массивы углеродных нанотрубок и графеновые плоскости, – так называемые этажерки.

Прототип модели

Прототипом модели стали исследования [3] и более поздние работы [4]. Разработанные группой В.А. Лабунова экспериментальные методики показали возможность создания наноструктур, состоящих из массива вертикально ориентированных углеродных нанотрубок и плоского графитового слоя, расположенного на нем сверху. Структура была получена высокотемпературным каталитическим пиролизом ацетилена при пониженном давлении (1000 Па) с использованием локализованного биметаллического катализатора кобальт – нитрид титана, нанесенного на подложку из кремния. Контролируя процесс производства, удается создавать упорядоченные системы углеродных нанотрубок и графеновых слоев.

Построение расчетных моделей

Каждая межатомная связь моделируется упругим стержнем с радиусом поперечного сечения 0.1 Å, соединяющим атомы молекулы. Коэффициент жесткости связи определяется видом описываемого взаимодействия нанотрубки с матрицей (ковалентного либо ван-дер-ваальсова) и рассчитывается из условия равенства энергии деформации связи и моделирующего ее стержня. Отметим, что значение жесткости стержня, представленной в виде эффективного модуля упругости, намного превосходит модуль упругости обычных конструкционных материалов, так как соответствует отдельным парным взаимодействиям атомов.

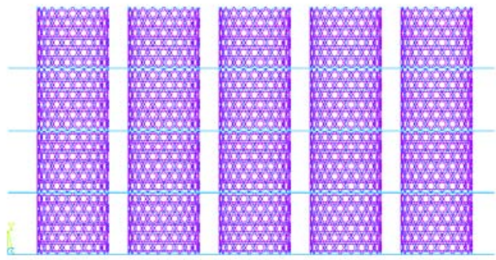
Силы ван-дер-ваальсова взаимодействия в системе молекул существенно ниже действующих в системе ковалентных сил. Эта особенность позволяет рассмотреть отдельно систему молекул, в которой элементы связаны друг с другом ковалентными взаимодействиями, опуская при этом нековалентные взаимодействия между молекулами. Ранее для массива нанотрубок строилась модель, учитывающая нековалентные взаимодействия между нанотрубками, однако в отличие от системы, рассматриваемой в настоящем исследовании, отсутствие графеновых слоев не позволяло тогда ввести какое-либо ковалентное взаимодействие между молекулами системы.

В системе, содержащей одновременно массивы углеродных нанотрубок и графеновые плоскости, – этажерке – для связывания молекул системы между собой вводятся следующие условия. Связываемые атомы объединяются по пространственным степеням свободы и деформируются как единое целое. Связывание попарно осуществляется между атомами, расположенными в пределах 0.8 Å друг от друга. Так как при построении массива нанотрубок и графеновых плоскостей, граничащих с ним, соответствующие плоскости строятся совпадающими с границами открытых концов нанотрубок, принятые условия связывания приводят к тому, что только атомы одного кольца, составляющие конец нанотрубки, участвуют в связывании с графеновой плоскостью. Такой способ связывания представляется альтернативным по сравнению с выделением отдельных ковалентных взаимодействий между нанотрубками и графеновым слоем, при котором могут возникать дефекты решетки и качество связывания сильно зависит от совпадения положений связываемых атомов.

Численные эксперименты

Расчеты проводились на моделях отдельных нанотрубок и моделях массивов нанотрубок различного размера и длины. Эффективные модули рассчитывались энергетическим методом. Полная энергия деформации модели суммировалась из вкладов отдельных конечных элементов. Принятая номенклатура позволяет определять нанотрубку тремя числами – двумя индексами хиральности, определяющими вектор хиральности в плоскости гексагональной графеновой решетки, и третьим – длиной (в межатомных расстояниях) вектора оси нанотрубки, нормального к вектору хиральности.

В заключение приведем результаты численного эксперимента по определению модуля Юнга для этажерки – массива 4 на 5 трубок (20,20):10, четыре слоя и 20 трубок в слое (рис. 1).



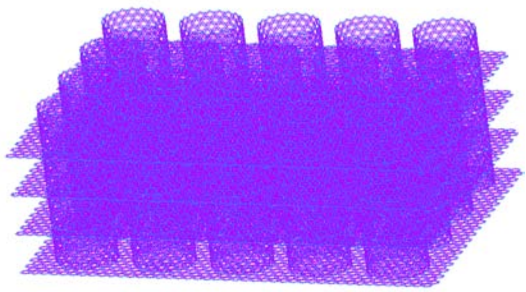


Рис. 1

Высота нагружаемой области $L = 53.96$ Å, радиус трубок $r = 7.869$ Å, расчетная толщина стенки $t = 3.4$ Å; перемещение верхнего края модели и деформация: $\Delta l = 0.05$ Å, $\varepsilon = \Delta l / L$; поперечное сечение нагружаемой области $L_x = 95.46$ Å, $L_z = 75.66$ Å. Количество трубок в слое n. Площадь сечения для модели эффективной трубки $S_t = 2\pi rtn$, площадь сечения для модели сплошного параллелепипеда $S_v = L_x L_z$. Энергия деформации равна W, тогда модуль Юнга для модели эффективной трубки $Y_t = \ = W/(S_t L\varepsilon^2)$, что составляет 947 ГПа, а модуль Юнга для модели сплошного параллелепипеда равен $Y_t = W/(S_v L\varepsilon^2) = 438$ ГПа.

Список литературы

1. Гольдштейн Р.В., Ченцов А.В., Кадушников Р.М., Штуркин Н.А. // Российские нанотехнологии. 2008. Т. 3, №1-2. С. 114–124.

2. Гольдштейн Р.В., Ченцов А.В. // Изв. РАН. МТТ. 2005. №4 С. 57–74.

3. Kondo D., Sato S., Awano Y. // Applied Physics Express. 2008. V. 1. P. 074003.

4. Labunov V.A. et al. // Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics. 2010. V. 13, No2. P. 137–141.

MODELING THE MECHANICAL PROPERTIES OF A COMPOSITE GRAPHENE–CARBON NANOTUBES IN THE FRAMEWORK OF A DISCRETE-CONTINUUM APPROACH

A.V. Chentsov

The mechanical behavior of a class of systems containing both carbon nanotubes and graphene planes is modeled. Such a class of composites expands the scope of application of nanocomposites and hierarchical systems based on nanotubes by combining them with various allotropic forms of carbon. Within the framework of a discrete-continuum approach a model of a layered system as a set of arrays of single-walled carbon nanotubes separated by graphene planes is constructed. In numerical experiments the estimates of effective elastic moduli for the constructed model are obtained.

Keywords: mechanical properties, graphene, nanotube, modeling.

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА ПЛАСТИНКУ РОСТА

Л.Л. Шарипова

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

sleah@yandex.ru

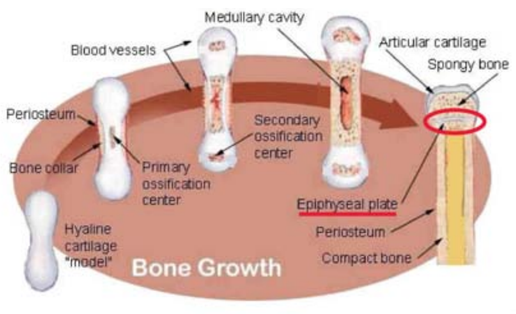
Поступила в редакцию 15.06.2011

Разработана модель для исследования влияния механических факторов и параметра биологического роста на стационарное движение границы окостенения в пластинке роста, ее ориентацию и устойчивость. Получены критические значения параметров нагружения, параметра биологического роста и скорости движения границы, при которых происходит смена ориентации и потеря устойчивости границы окостенения.

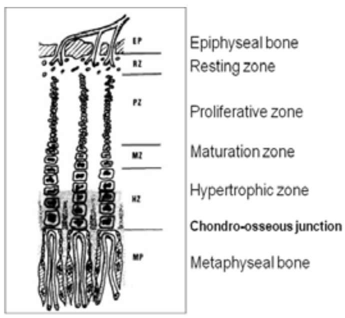
Ключевые слова: биомеханика, пластинка роста, объемный рост, окостенение, кинетика, влияние напряжений, моделирование.

Введение

Продольный рост костей позвоночных в основном осуществляется за счет процессов роста и окостенения в пластинке роста (рис. 1*а*). Пластинка роста представляет собой слой гиалинового хряща между метафизизом и эпифизом кости (рис. 1*б*).



а)



б)

Рис. 1

Рост кости в длину происходит за счет следующих процессов: а) благодаря поступлению вещества происходит деление и рост клеток хряща; б) во время роста клетка хряща выделяет вещество в окружающую ее матрицу, вследствие чего это матрица минерализуется.

При достижении определенного размера клетки хряща происходит ее отмирание с образованием лакун, окруженных кальцифицированным матриксом. Далее на это место прорастают кровеносные сосуды с клетками кости на них. Поверхность между живыми клетками хряща в матриксе и умершими клетками хряща в кальцифицированном матриксе образует границу окостенения.

Хорошо известно, что эти процессы регулируются в процессе жизни как различными биологическими, так и механическими факторами [1]. Разработка моделей описания влияния механических нагрузок на процессы роста костей может помочь в детской хирургической ортопедии, где при лечении отклонений в процессе роста костей применяются, в частности, механические нагрузки. При этом важно знать величину и вид нагрузок, при которых не происходит ни повреждения ткани, ни предварительного закрытия пластинки роста.

Влияние биологического роста на устойчивость стационарного движения границы между хрящом и костью

Условия на границе между хрящом и костью. Пластинка роста моделируется как упругий слой «хрящевая ткань» в упругой среде «костная ткань» (рис. 2). Рассматривается период роста кости, в котором одновременно имеют место два конкурирующих процесса: деление и увеличение в размере клеток хряща; отмирание клеток с их заменой костной тканью. При этом толщина пластинки роста остается постоянной. Первые два процесса будут описываться как объемный рост в хряще, второй – как стационарное движение границы окостенения.

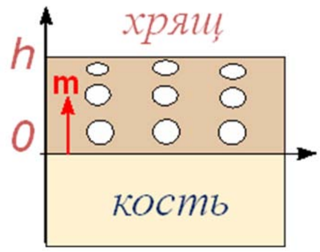


Рис. 2

Скорость стационарного движения границы V_m^Γ определяется кинетическим уравнением, задающим зависимость скорости от конфигурационной силы – аналога разности химических потенциалов на границе:

$$V_m^\Gamma = -k(\mu_{\text{кость}} - \mu_{\text{хрящ}}),$$
$$k = \text{const} > 0, \quad V_m^\Gamma = \text{const}, \tag{1}$$
$$\mu_{\text{кость}} - \mu_{\text{хрящ}} = \mathbf{m}\cdot[\mathbf{M}]\mathbf{m}, \tag{2}$$

где $\mathbf{M} = W\mathbf{I} - \mathbf{F}^T\mathbf{S}$ – тензор Эшелби, $\mu_{\text{кость}}$, $\mu_{\text{хрящ}}$ – химические потенциалы кости и хряща соответственно; $\mathbf{F}$, $\mathbf{m}$, W, $\mathbf{S} = \partial W/\partial \mathbf{F}$ – деформационный градиент, нормаль к границе окостенения в отсчетной конфигурации, энергия деформации и тензор напряжений Пиола соответственно. Квадратными скобками $[\cdot] = (\cdot)_- - (\cdot)_+$ обозначается скачок величины через границу, индексы «+» и «–» соответствуют кости и хрящу.

В результате на границе окостенения имеем следующую систему уравнений:

$$[\mathbf{u}] = 0, \quad [\mathbf{S}]\mathbf{m} = 0, \quad [W] - \mathbf{S}_\pm : [\mathbf{F}] + \frac{V_m^\Gamma}{k} = 0. \tag{3}$$

Объемный рост хрящевой ткани учитывается в декомпозиции деформационного градиента на произведение двух тензоров – одного, отвечающего за необратимые, связанные с ростом, деформации, и другого – отвечающего за упругие деформации. В случае объемного изотропного роста для хрящевой ткани $\mathbf{F} = \vartheta\mathbf{F}_e$, где ϑ – объемный изотропный рост клеток хряща, $\mathbf{F}_e$ – упругая составляющая.

Кинетическая устойчивость. Механизм закрытия пластинки роста состоит в том, что граница между хрящом и костью перестает быть плоской, становится бороздчатой, бороздки (костная ткань) развиваются в сторону верхней части пластинки роста, образуя мостики. Количество таких мостиков со временем увеличивается, и пластинка закрывается [2]. Чрезмерная нагрузка может приводить к преждевременному закрытию пластинки роста [3]. Исследуется влияние параметров нагружения, скорости границы и параметра объемного роста на потерю устойчивости границы окостенения. Исследования устойчивости найденных решений проводятся на основе разработанного ранее кинетического критерия, согласно которому возмущения в окрестности точек бифуркации линеаризованной системы уравнений равновесия развиваются, если состояние неустойчиво [4, 5].

Заключение

Для ряда определяющих соотношений хрящевой и костной тканей установлено следующее:

– анализ решения уравнений на границе окостенения показал, что растягивающие напряжения ведут к увеличению величины скорости движения границы окостенения, сжимающие – к уменьшению, что согласуется с экспериментальными данными [1];

– для меньших скоростей движения границы V_m^Γ потеря устойчивости происходит при меньших значениях параметров нагружения, что может интерпретироваться, как уменьшение скорости движения границы окостенения и приводить к более быстрому началу «мостикообразования», что согласуется с наблюдаемыми данными [3];

– увеличение объемного роста оказывает как стабилизирующий, так и дестабилизирующий эффекты в зависимости от выбранной энергии деформации.

Работа выполнена совместно с А.Б. Фрейдиным (Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург) и Ж. Моженом (Университет Пьера и Марии Кюри, Париж 6).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 09-01-00849).

Список литературы

1. Carter D.R., Beaupre G.S. Skeletal Function and Form: Mechanobiology of Skeletal Development, Aging, and Regeneration, Cambridge University Press, 2001. 330 p.

2. Martin E.A., Ritman E.L., Turner R.T. //Bone. 2003. V. 32. P. 261–267.

3. Bonnel F. et al. // Acta orthop. scand. 1983. V. 54. P. 730–733.

4. Еремеев В.А., Фрейдин А.Б., Шарипова Л.Л. //

Докл. РАН. 2003. Т. 48, №7. С. 359–363.
5. Freidin A.B., Fu Y.B., Sharipova L.L., Vilchevskaya E.N. // Int. J. Solids Structures. 2006. V. 43, No 14–15. P. 4484–4508.

MODELING THE INFLUENCE OF MECHANICAL FACTORS ON THE GROWTH PLATE

L.L. Sharipova

A model to investigate the influence of mechanical factors and a parameter of biological growth on the stationary movement of the ossification boundary in the growth plate, its orientation and stability is developed. Critical values of loading parameters, the parameter of biological growth and the rate of boundary movement at which the ossification boundary changes its orientation and loses stability are obtained.

Keywords: biomechanics, growth plate, volumetric growth, ossification, kinetics, stresses, modelling.

УДК 577.353

КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЫШЕЧНОГО СОКРАЩЕНИЯ: МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СОКРАЩЕНИЙ

Е.Н. Шворина

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

helena.shvorina@gmail.com

Поступила в редакцию 15.06.2011

Сила, развиваемая сокращающейся мышцей, возникает в результате циклического взаимодействия миозиновых поперечных мостиков с актиновой нитью за счет энергии, высвобождающейся в результате гидролиза АТФ. За последние 50 лет было разработано множество кинетических моделей мышечного сокращения, увязывающих в единую схему механические и биохимические процессы в цикле поперечных мостиков. Имеется, однако, ряд фактов, которые не воспроизводятся существующими моделями.

Цель работы – создание программного продукта для расчета кинетических моделей мышечного сокращения с разным количеством присоединенных и отсоединенных состояний поперечных мостиков и возможностью конструирования различных функций перехода между состояниями, возможностью включать в рассмотрение те или иные параметры, влияющие на макроскопическое поведение мышечного волокна, а также разработка конкретной кинетической модели, воспроизводящей результаты современных экспериментальных исследований. Реализован программный модуль, позволяющий рассчитать биомеханические характеристики мышечного волокна при изометрическом (т.е. при постоянной деформации) и стационарном (с разными постоянными скоростями деформации) сокращении. Разработана модель, включающая в себя 7 присоединенных и 3 отсоединенных состояния миозинового мостика, представляющая собой обобщение модели [1] для описания структурных изменений в сокращающихся мышечных клетках. Модельные расчеты воспроизводят экспериментальные зависимости динамической жесткости волокна, развиваемой им силы и скорости потребления АТФ от скорости деформации (укорочения) волокна при различных концентрациях АТФ, АДФ и неорганического фосфата и варьировании температуры.

Ключевые слова: мышца, модель.

Скелетная мышца состоит из пучков мышечных волокон. Каждое волокно – гигантская многоядерная клетка, вдоль оси которой расположены тысячи миофибрилл, состоящих из белковых нитей двух видов – тонких (актиновых) и толстых (миозиновых). Сокращение происходит в результате взаимного перемещения нитей с минимальными изменениями их длин (деформации < 0.003).

Сила, развиваемая сокращающейся мышцей, возникает в результате циклического взаимодействия миозиновых поперечных мостиков с актиновой нитью. Кинетическая схема такого взаимодействия состоит из нескольких присоединенных и нескольких отсоединенных состояний миозиновой головки и функций перехода из одного состояния в другое, зависящих от микроскопических перемещений мостика и от биохимических и термодинамических параметров: концентраций субстрата и продуктов реакции гидролиза АТФ и от температуры. Соответствующая математическая модель представляет собой систему дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных для плотностей распределения концентраций мостиков в каждом из состояний. За последние 50 лет было разработано множество кинетических моделей мышечного сокращения, увязывающих в единую схему механические и биохимические процессы в цикле поперечных мостиков. Имеется, однако, ряд фактов, которые не воспроизводятся существующими моделями.

Цель исследования – создание программного продукта для расчета кинетических моделей мышечного сокращения с разным количеством присоединенных и отсоединенных состояний поперечных мостиков и возможностью конструирования различных функций перехода между состояниями, возможностью включать в рассмотрение те или иные параметры, влияющие на макроскопическое поведение мышечного волокна, а также разработка конкретной кинетической модели, воспроизводящей результаты современных экспериментальных исследований.

В настоящее время реализован программный модуль, позволяющий рассчитать биомеханические характеристики мышечного волокна при изометрическом (т.е. при постоянной деформации) и стационарном (с разными постоянными скоростями деформации) сокращении. Разработана модель, включающая в себя 7 присоединенных и 3 отсоединенных состояния миозинового мостика, представляющая собой обобщение модели [1], предложенной для описания структурных изменений в сокращающихся мышечных клетках.

Произведен ряд расчетов и подобраны параметры модели, позволяющие воспроизвести результаты известных экспериментальных работ. Рассчитаны зависимости динамической жесткости волокна, развиваемой им силы и скорости потребления АТФ от постоянной скорости деформации волокна. Зависимости макроскопических параметров изометрического (при постоянной длине) сокращения, а также при стационарном укорочении находятся в хорошем соответствии с результатами экспериментов, описанными в [2, 3].

Проведены расчеты изменения характеристик тех же зависимостей при разных температурах. Результаты расчетов согласуются с экспериментальными данными, описанными в [4, 5] (зависимости от концентрации неорганического фосфата при разных температурах), [6] (зависимости от концентрации АДФ при разных температурах). Результаты расчетов показывают, что модель [1], изначально предложенную для описания структурных и механических изменений в сокращающихся мышечных волокнах при изменении температуры [7] можно дополнить таким образом, чтобы она описывала изменения макроскопических механических характеристик мышечного волокна при изменении концентраций субстрата и продуктов реакции гидролиза АТФ.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №11-04-00908-а).

Список литературы

1. Ferenczi M.A. et al. // Structure. 2005. Vol. 13. P. 131–141.
2. Cooke R., Pate E. // Biophys. J. 1985. Vol. 48. P. 789–798.
3. Pate E., Cooke R. // Biophys. J. 1988. Vol. 53. P. 561–573.
4. Coupland M.E., Puchert E., Ranatunga K.W. // J. Physiol. 2001. Vol. 536, No 3. P. 879–891.
5. Ranatunga K.W. // Proc. R. Soc. Lond. 1999. Vol. 266. P. 1381–1385.
6. Coupland M.E., Pinniger G.J., Ranatunga K.W. // Physiol. 2005. Vol. 567, No 2. P. 471–492.
7. Кубасова Н.А., Бершицкий С.Ю., Цатурян А.К. // Биофизика. 2009. Т. 54, №4. С. 718–725.

A KINETIC MODEL OF MUSCE CONTRACTION: STEADY-STATE SHORTENING

E.N. Shvorina

Tension produced by a contracting muscle results from cycling interaction of myosin cross-bridges with actin filaments using the energy of ATP hydrolysis. A number of kinetic models and schemes of mechanical and biochemical processes in actin-myosin cycle of interaction have been developed during the last 50 years. However there are some experimental facts that cannot be reproduced by existing models.

The aim of the work is to develop a program complex for computer simulation of kinetic models of muscle contraction with different numbers of attached and detached states of cross-bridges and the possibility of construction of different rates for transitions from one state to another. Some blocks of software already allow one to calculate biochemical and mechanical characteristics of muscle fibres during isometric contraction and steady-state shortening and we suggest a model which include 3 detached and 7 attached states based on the «roll and lock» model (Ferenczi et al., Structure, 2005). The results of simulation of experiments with isometric contraction and steady-state shortening of muscle fibres describes observed data for the dependence of fiber tension, stiffness and ATPase rate on concentrations of ATP, ADP and inorganic phospate at different temperatures.

Keywords: muscle, model.

УДК 551.515.2

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТРОПИЧЕСКИХ ЦИКЛОНОВ

Б.Я. Шмерлин[1]***, М.Б. Шмерлин***[2]

[1]НПО «Тайфун» Института экспериментальной метеорологии, Обнинск
[2]Геофизическая служба РАН, Обнинск

shmerlin@typhoon.obninsk.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Приводятся результаты диагностических, квазипрогностических и прогностических расчетов перемещения тропических циклонов (ТЦ) в рамках гидромеханической модели (ГММ). Показано, что в диагностическом режиме ГММ достаточно корректно описывает перемещение ТЦ. Параметры ГММ (константы для каждого ТЦ) могут быть определены на предпрогностическом периоде: средние ошибки квазипрогнозов по северо-западной части Тихого океана составляют 217, 272, 258, 257, 267 км на 3, 4, …, 7 суток соответственно. Средняя по сезону ТЦ 2010 года ошибка прогнозов ГММ на трое суток составила 350 км по указанному региону, что незначительно (на 35 км) превышает ошибку официальных американских прогнозов и находится на уровне ошибок прогнозов наиболее развитых зарубежных динамических методов прогнозирования.

Ключевые слова: тропический циклон, гидромеханическая модель, прогноз перемещения тропических циклонов, ошибки прогноза.

Введение

На основе анализа достаточно простых баротропных и бароклинных моделей, игнорирующих трение тропических циклонов (ТЦ) о подстилающую поверхность (ПП), сложилось мнение, что ТЦ лишь незначительно отклоняются от окружающего крупномасштабного течения, называемого ведущим потоком (ВП). Поскольку зачастую это противоречит данным наблюдений, усилия исследователей направлены на поиск возможных причин существенного отклонения ТЦ от ВП в рамках указанных моделей. Между тем, трение ТЦ о ПП является, по нашему мнению, фактором, обеспечивающим эффективное торможение ТЦ как целого и приводящим к значительному отклонению ТЦ от ВП.

Простые оценки показывают, что характерное время торможения ТЦ вследствие трения о ПП порядка 0.5 суток, характерное время увлечения ТЦ ведущим потоком вследствие лобового сопротивления порядка 2.5 суток. Поскольку время торможения ТЦ существенно меньше времени увлечения его ведущим потоком, то, на первый взгляд, ТЦ должен почти покоиться. При этом, в отличие от традиционного подхода, следует искать причины, по которым ТЦ в тех или иных случаях движется со скоростью, близкой к скорости ВП.

В такой ситуации имеет смысл использовать для описания перемещения ТЦ общие выражения для сил, действующих на круговой цилиндр, движущийся произвольным образом в произвольном двухмерном вихревом потоке [1]. Этот подход реализован в ГММ. Подробное описание уравнений ГММ можно найти, например, в [2]. Здесь лишь отметим, что закономерности отклонения ТЦ от ВП в рамках ГММ оказываются совершенно иными, чем в моделях, игнорирующих трение ТЦ о ПП.

Перемещение конкретного ТЦ в рамках ГММ определяется полем скорости ВП, а также интенсивностью (максимальной скоростью ветра) ТЦ. В качестве объективного анализа и прогноза полей скорости ВП используется объективный анализ и прогноз крупномасштабных полей ветра глобальной оперативной модели ГМЦ РФ. Объективный анализ и прогноз интенсивности ТЦ извлекается из телеграмм – штормовых предупреждений, которые передаются Национальным центром ураганов в Майами (NHC) для Атлантики и северо-востока Тихого океана и Объединенным центром предупреждения тайфунов на о. Гуам (GTWC) для северо-запада Тихого океана. Кроме того, ГММ содержит параметры (константы для каждого ТЦ), характеризующие размер ТЦ и распределение тангенциального ветра ТЦ.

Диагностические расчеты перемещения ТЦ сезонов 2001, 2003 и 2010 годов

Под диагностическими имеются в виду расчеты, в которых в течение всего времени жизни ТЦ в качестве полей скорости ВП и интенсивности ТЦ используется объективный анализ соответствующих величин. При этом параметры модели (константы для каждого ТЦ) подбираются из условия наилучшего совпадения расчетной и фактической траектории в течение всего времени жизни ТЦ . В указанных сезонах оказалось порядка 90 ТЦ со временем жизни от 4 до 15 суток, для которых проводились диагностические расчеты. Для всех этих ТЦ среднее вдоль траектории отклонение расчетного положения от фактического не превышает 150 км, для большинства ТЦ оно меньше 100 км, что сравнимо с точностью определения фактического положения ТЦ. Диагностические расчеты воспроизводят не только общий характер траекторий ТЦ, но также характерные особенности большинства траекторий: характерную форму той или иной траектории в окрестности точек поворота, петли, топтание на месте и т. д. Таким образом, ГММ достаточно корректно описывает перемещение ТЦ.

Квазипрогностические расчеты перемещения ТЦ сезонов 2003 и 2010 годов

Под квазипрогностическими имеются в виду расчеты, в которых по-прежнему в течение всего времени жизни ТЦ в качестве полей скорости ВП и интенсивности ТЦ используется объективный анализ соответствующих величин. При этом, однако, параметры модели (константы для каждого ТЦ) подбираются из условия наилучшего совпадения расчетной и фактической траектории на протяжении предпрогностического периода, длительность которого в случае реального прогноза определяется имеющейся на момент прогноза информацией о предшествующем перемещении ТЦ. Таким образом, квазипрогностические расчеты отличаются от прогностических тем, что в случае реального прогноза на прогностическом периоде вместо объективного анализа полей скорости ВП и интенсивности ТЦ используется прогноз соответствующих величин. Средние по сезону 2010 года ошибки квазипрогнозов по северо-западной части Тихого океана составляют 217, 272, 258, 257, 267 км на 3, 4, …, 7 суток соответственно, что существенно меньше средних ошибок официальных американских прогнозов (315, 450, 540 км на 3, 4 и 5 суток). В целом, квазипрогностические расчеты демонстрируют возможность корректного определения параметров модели по части траектории ТЦ, соответствующей предпрогностическому периоду.

На рис. 1 приведен квазипрогноз на 8 суток для ТЦ 212003w (ошибки (33), 95, 241, 150, 89, 157, 43, 137, 24 км).

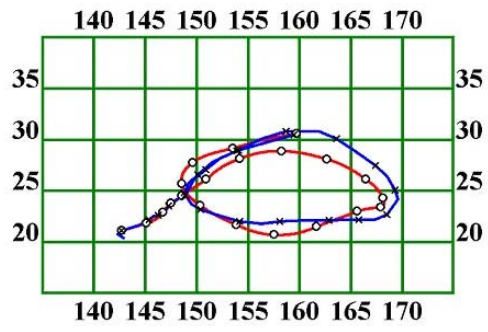


Рис. 1

На рис. 2 представлен квазипрогноз на 9 суток ТЦ 102003a (ошибки (26), 164, 203, 289, 386, 523, 346, 105, 101, 216 км). Длительность предпрогностического периода двое суток, квазипрогностический период охватывает оставшееся время жизни ТЦ. Метки проставлены через 12 часов, траектории с кружками – расчетные. Первые две цифры у ТЦ – порядковый региональный номер ТЦ в сезоне 2003 года, символ «w» соответствует северо-западу Тихого океана, символ «a» – северо-западу Атлантического океана. В скобках приведена ошибка положения ТЦ на момент начала квазипрогноза и далее ошибки квазипрогноза на первые, вторые, третьи и т.д. сутки.

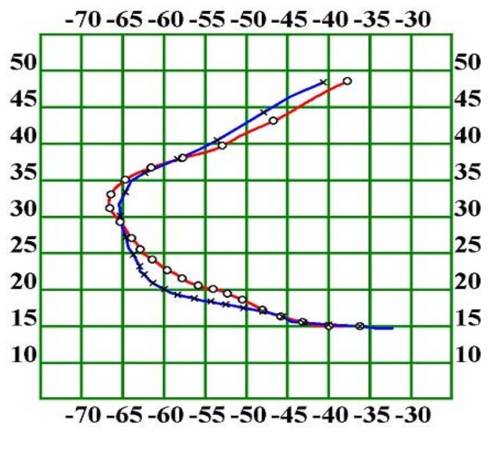


Рис. 2

Прогностические расчеты перемещения ТЦ сезона 2010 года

В сезоне ТЦ 2010 года проведены оперативные испытания ГММ в прогностическом режиме.

Средняя по сезону ТЦ 2010 года ошибка прогнозов ГММ на трое суток составляет 350 км по северо-западной части Тихого океана, что незначительно (на 35 км) превышает ошибку официальных американских прогнозов и находится на уровне ошибок прогнозов наиболее развитых зарубежных динамических методов прогноза. Вместе с тем, ошибка прогнозов почти на 130 км больше ошибки квазипрогнозов. Это связано только с тем, что прогнозы крупномасштабного поля ветра и интенсивности ТЦ значительно отличаются от соответствующего объективного анализа. По мере того, как прогнозы крупномасштабных полей ветра и интенсивности ТЦ будут приближаться к объективному анализу, ошибки прогнозов ГММ будут приближаться к ошибкам квазипрогнозов.

Список литературы

1. Петров А.Г. // ДАН СССР. 1978. Т. 238, №1. С. 33–35.
2. Шмерлин Б.Я. и др. // Украинский гидрометеорологический журнал. 2009. №4. С. 67–74.

APPLICATION OF THE HYDROMECHANICAL MODEL FOR A DESCRIPTION OF TROPICAL CYCLONES MOTION

B.Ya. Shmerlin, M.B. Shmerlin

Within the frameworks of the hydromechanical model (HMM) the diagnostic, quasi-prognostic and prognostic calculations of TC movement are carried out. Diagnostic calculations show that the HMM rather correctly describes peculiarities of TC motion during the whole TC lifetime. Quasi-prognostic calculations show that model parameters may be rather correctly defined during the preliminary «preprognostic» period. Mean forecast errors of the quasi-prognostic calculations for the North-West Pacific are: 217, 272, 258, 257, 267 km for 3, 4, …, 7 days correspondingly in the TC season of 2010. The mean forecast error of the prognostic calculations for this region and the season is 350 km for 72 hours, that insignificantly (about 35 km) exceeds the official error and is within the limits of the forecast errors of the most developed dynamical prediction models.

Keywords: tropical cyclone, hydromechanical model, tropical cyclone track forecast, track forecast errors.

УДК 519.6;533

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВХОДА И РАСПРОСТРАНЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В МИКРОКАНАЛЕ

Г.В. Шоев

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

shoev@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Проведено численное исследование входа и распространения ударной волны в микроканале с использованием кинетического и континуального подходов. Показано усиление ударной волны после входа в микроканал при численном моделировании на основе уравнений Эйлера и при численном моделировании с учетом вязкости при числе Кнудсена $\mathrm{Kn} = 8.2\cdot10^{-3}$. Затем в невязком случае ударная волна распространяется с постоянной скоростью. В численном моделировании с учетом вязкости происходит затухание ударной волны, что качественно согласуется с экспериментальными данными. При больших числах Кнудсена наблюдается только более интенсивное затухание ударной волны внутри микроканала.

Ключевые слова: сверхзвуковые микротечения, ударные волны в микроканалах, эффекты вязкости, генерация ударной волны в микроканале.

Введение

На протяжении последних лет значительно вырос интерес к поведению течений на микромасштабах благодаря быстрому прогрессу в разработке микроустройств. В микротечениях эффекты вязкости и теплопроводности, потери тепла при взаимодействии со стенками могут играть важную роль. Недавние численные исследования [1] распространения ударной волны в микроканале с учетом вязкости и эффектов разреженности показали значительное отличие от невязкой теории, которая корректно описывает большинство особенностей течения на макромасштабах. В настоящем исследовании ударная волна генерировалась в трубе разрывом мембраны, разделяющей области высокого и низкого давления. Недавно был предложен альтернативный вариант генерации ударной волны в микроканале – генерировать ударную волну в ударной трубе обычного размера, которая затем из камеры низкого давления входит в микроканал. Экспериментальные исследования [2], проведенные вышеуказанной методикой, входа и распространения ударной волны в микроканале показали затухание ударной волны внутри микроканала. Однако полное понимание этого процесса все еще неясно.

Постановка задачи и численные методы

Для численного моделирования входа и распространения ударной волны в микроканале использовалась геометрия, соединяющая канал обычного размера и микроканал (рис. 1).

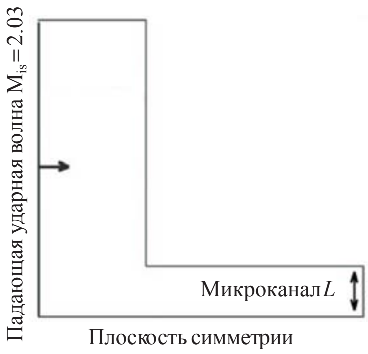


Рис. 1

Используется два различных численных подхода: континуальный (уравнений Эйлера, Навье – Стокса) и кинетический (метод ПСМ). Поскольку в работе рассматриваются течения в около-континуальном режиме при числах Кнудсена $\mathrm{Kn} = 8.2\cdot10^{-3}$–$8.2\cdot10^{-2}$ ($\mathrm{Kn} = \lambda/L$, где λ – длина свободного пробега молекул в покоящемся газе, L – полувысота микроканала), применимость уравнений Навье – Стокса может быть под сомнением; поэтому, для верификации численных данных проводится моделирование методом ПСМ. Так как данная задача не имеет аналитического решения в рамках газовой динамики, проводится численное моделирование на основе уравнений Эйлера для анализа влияния вязкости и теплопроводности. Уравнения Эйлера и Навье – Стокса решались на структурированной прямоугольной сетке со сгущением вдоль оси y внутри микроканала методом установления с использованием схемы WENO 5-го порядка [3] для конвективных членов, центрально-разностной схемой 4-го порядка для диффузионных членов, интегрирования по времени с использованием схемы Рунге–Кутты 2-го порядка. Расчеты методом ПСМ проводились с использованием вычислительного комплекса SMILE [4], разработанного в лаборатории №7 ИТПМ СО РАН. В численном эксперименте использовалась равномерная прямоугольная сетка. Для моделирования распространения ударной волны на левой границе расчетной области (см. рис. 1) задавались условия, соответствующие условиям Ренкина–Гюгонио за ударной волной с соответствующим числом Маха M_{is}.

Результаты численного моделирования

Сравнение численного моделирования методом ПСМ с численным решением уравнений Навье–Стокса при числе Кнудсена $Kn = 8.2 \cdot 10^{-3}$ показано на рис. 2.

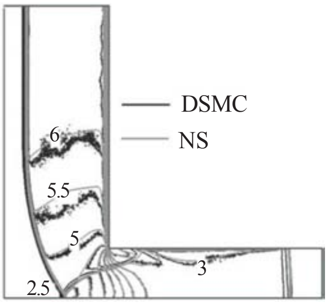
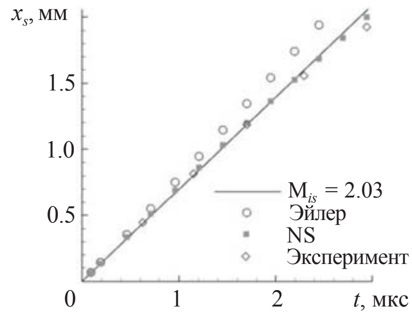


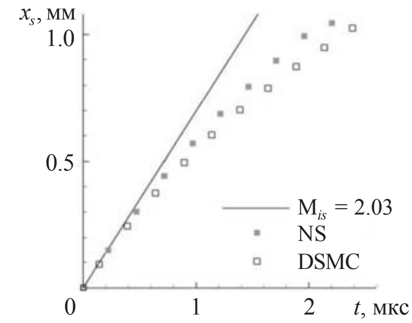
Рис. 2

Видно, что поля течения хорошо совпадают между собой. Численное моделирование методом ПСМ является весьма трудоемким процессом при заданном числе Кнудсена, поэтому для этого случая вычисления методом ПСМ проводились только для моделирования входа ударной волны в микроканал. Моделирование распространения ударной волны вдоль всего микроканала проводилось на основе численного решения уравнений Навье–Стокса. Распространение ударной волны внутри микроканала представлено на рис. 3*а* в виде диаграммы (t, x_s), где t – время, x_s – координата ударной волны. Точка с координатами (0, 0) соответствует моменту времени, когда ударная волна вошла в микроканал. После входа в микроканал наблюдается усиление ударной волны. Затем в невязком случае ударная волна распространяется с постоянной скоростью, в вязком случае происходит затухание, что качественно согласуются с экспериментальными данными [2], также представленными на рис. 3*а*. Число Маха падающей ударной волны $M_{is} = 2.03$, $\gamma = 1.4$.

На рис. 3*б* представлено сравнение численного моделирования методом ПСМ и численного решения уравнений Навье–Стокса при числе Кнудсена $Kn = 8.2 \cdot 10^{-2}$. После входа в микроканал усиления ударной волны не наблюдается, как это было в предыдущем случае. Внутри микроканала происходит интенсивное затухание ударной волны.



а)



б)

Рис. 3

Вычисления проводились в Межведомственном суперкомпьютерном центре РАН (Москва) и Сибирском суперкомпьютерном центре СО РАН (Новосибирск).

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований Президиума РАН №11, коллаборационного исследовательского проекта IFS J10016, молодежного Лаврентьевского проекта.

Список литературы

1. Zeitoun D. E. et al. // Shock Waves. 2009. No 19. P. 307–316.
2. Mirshekari G., Brouillette M. // Proceedings of the 27th ISSW. 2009. P. 260.

3. Jiang G., Shu C. // J. Comput. Phys. 1996. No 126. P. 202–228.

4. Ivanov M., Markelov G., Gimelshein S. // AIAA Paper. 1998. 98-2669.

NUMERICAL SIMULATION OF SHOCK WAVE ENTRY AND PROPAGATION IN A MICROCHANNEL

G.V. Shoev

The entry of a shock wave into a microchannel and its propagation is numerically studied by using the kinetic and continuum approaches. Numerical modeling based on the Euler equations and simulations accounting for viscosity predicts shock wave amplification after its entry into the microchannel. In the inviscid case, the shock wave propagates further with a constant velocity. If viscosity is taken into account, numerical simulations predict the shock wave attenuation, which is in qualitative agreement with experimental data.

Keywords: supersonic microflows, shock waves inside microchannels, effects of viscosity, shock wave generation in microchannel.

УДК 532.11:539.3:577.1

АНАЛИЗ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ГЛАЗНОГО ЯБЛОКА В УСЛОВИЯХ СТАТИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ИНТЕРПРЕТАЦИИ ДИАГНОСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

А.А. Штейн, Г.А. Любимов, И.Н. Моисеева

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

stein@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Для оценки упругих параметров глаза по неинвазивным, осуществимым в клинике, измерениям предложена модель, рассматривающая ткани глаза как совокупность двух упругих элементов – мягкой оболочки (роговица) и обобщенного линейного элемента, включающего склеру и прилегающие ткани глазницы, механическое поведение которого характеризуется только упругим откликом на изменения внутриглазного давления. В такой модели присутствуют два основных подлежащих определению упругих параметра – жесткости роговицы и склерального элемента. На базе модели проведены расчеты для случая статического аппланационного нагружения глазной оболочки, при котором прикладываемая нагрузка имеет вид штампа с достаточно широким плоским основанием. Рассчитана функция, определяющая зависимость внутриглазного объема от внутриглазного давления и величины приложенной нагрузки. Показано, что упругая характеристика, получаемая при быстром нагружении роговицы грузами разного веса (эластометрия), не может быть непосредственно использована для оценки упругого поведения глаза при закачивании в него жидкости и при длительном нагружении (в частности, при тонографии). Установлена связь между упругими характеристиками системы, используемыми для интерпретации данных в этих группах исследований.

Ключевые слова: глаз, математические модели, оболочка глаза, внутриглазное давление, тонометрия, эластометрия.

В офтальмологической практике механическое состояние глаза исследуется на основе косвенных методов, связанных с приложением внешней нагрузки к роговице. Получение реальных механических характеристик при этом затруднено отсутствием достоверной методики определения индивидуальных упругих свойств, разброс которых очень велик. В связи с этим поставлена задача – оценить упругие параметры глаза по доступным в клинике измерениям. Для ее решения предложена модель [1], представляющая глаз как заполненную жидкостью оболочку, являющуюся совокупностью двух упругих элементов мягкой оболочки (роговица) и обобщенного линейного элемента, включающего склеру и прилегающие ткани глазницы, поведение которого характеризуется только упругим откликом на изменения внутриглазного давления.

Двухсегментная модель и постановка задачи

Будем рассматривать роговицу как не сопротивляющуюся изгибу упругую поверхность, изотропную и пространственно однородную по своим упругим характеристикам, пренебрегая напряжениями в нормальном к поверхности направлении. Воспользуемся уравнениями равновесия мягкой оболочки, полагая, что в некотором начальном состоянии при распирающем внутреннем давлении роговица имела форму сферического сегмента радиуса R_0, а в дальнейшем остается осесимметричной. Локальное деформированное состояние роговицы, отсчитываемое от этого начального (напряженного) состояния, характеризуется двумя компонентами деформации ε_1 и ε_2, определяющими растяжение в меридиональном и перпендикулярном ему направлении и связанными линейными соотношениями с двумя компонентами усилия в касательной плоскости. Сдвиговая деформация отсутствует в силу симметрии задачи. Независимым параметром считаем длину s дуги образующей в ненагруженном состоянии, отсчитываемую от ее пересечения с осью симметрии. Условия равновесия совпадают с приведенными в [2].

Роговица опирается на склеру, которая контактирует со структурами глазницы. В рассматриваемых процессах эти ткани не подвергаются существенно неоднородным внешним воздействиям. Поэтому естественно заменить внешние по отношению к роговице ткани одним упругим элементом, который реагирует на изменения внутриглазного давления деформацией, приводящей к изменению внутриглазного объема, полное изменение которого складывается из изменений двух объемов: под роговицей и вне ее. Предполагая названный элемент линейно упругим, постулируем связь

$$\Delta V_s = K(p - p_0),$$

где ΔV_s – приращение склерального внутриглазного объема (части внутреннего объема, ограниченной склерой и плоскостью, отграничивающей склеру от роговицы) вследствие изменения давления. Если условно связать ΔV_s только с деформацией сферической склеры с известными параметрами, коэффициент K удобно заменить пропорциональной ему константой E_s, имеющей формальный смысл жесткости этой условной склеры. Вторая существенная упругая константа системы – жесткость роговицы E_s.

Рассмотрим случай штампа, площадь основания которого достаточно велика, чтобы в этой плоскости произошел его отрыв от роговицы. Радиус пятна контакта R_* в рассматриваемой постановке (для мягкой оболочки) связан с давлением p и весом груза P простой формулой $p = P/(\pi R_*^2)$.

Граничные условия задачи, которая в силу симметрии решается для одной полуплоскости, складываются из условия малости смещения внешней границы роговицы при контакте со склерой, условий гладкости поверхности роговицы и непрерывности напряжения в ней в точке отрыва от штампа, а также условия ограниченности переменных в точке пересечения с осью.

Результаты и обсуждение

Численное решение описанной выше задачи при различных фиксированных значениях внутреннего давления p и веса груза P осуществлялось методом стрельбы. Применялась схема Рунге–Кутта второго порядка. Анализ поведения решения при различных значениях параметров показал, что задача имеет, вообще говоря, три решения, только одно из которых соответствует физическому смыслу решаемой задачи. Имеется, однако, область значений параметров, где решение не существует. По найденным функциям, определяющим смещение точек роговицы, рассчитывалось изменение объема под роговицей. Изучалось приращение функции объема $V(p, P)$, рассчитанной с учетом изменения склерального объема при том же давлении. Результаты расчета функции объема использовались для получения других необходимых функций.

В рамках исследования поведения функции объема от параметров системы был продемонстрирован близкий к линейному характер зависимости функции объема от давления на физиологически важном участке. Это позволяет ввести модуль объемного растяжения E (интегральную объемную жесткость) и изучить его связь с упругими характеристиками склерального элемента и роговицы. В частности, получено, что интегральная жесткость возрастает с увеличением жесткостей элементов системы, причем почти пропорционально этим жесткостям, если поддерживать их отношение постоянным. В отличие от зависимости объем–давление зависимость объем–груз заметно нелинейна уже в области значений весов, применяемых на практике.

Моделирование важного для офтальмологии случая деформации при постоянном объеме показало, что функция $p(P)$ в области реально применяемых ненулевых весов также близка к линейной, что дает возможность характеризовать поведение системы в этом режиме коэффициентом эластоподъема γ, который возрастает с ростом «жесткости склеры» и падает с возрастанием жесткости роговицы. Коэффициент γ можно достаточно легко определить в клинике [3]. При анализе данных тонографии, а также при инъекции жидкости в глаз, необходимо знание коэффициента E [4]. Если отношение жесткостей склеры и роговицы принять заданным, то один коэффициент легко вычисляется через другой. На рис. 1 изображена зависимость коэффициента эластоподъема от коэффициента объемной жесткости (мм рт. ст./мм^3) при разных значениях отношения жесткостей склеры и роговицы: $E_s/E_c = 5$ (кривая *1*), $E_s/E_c = 10$ (кривая *2*), $E_s/E_c = 20$ (кривая *3*), $E_s/E_c = 35$ (кривая *4*).

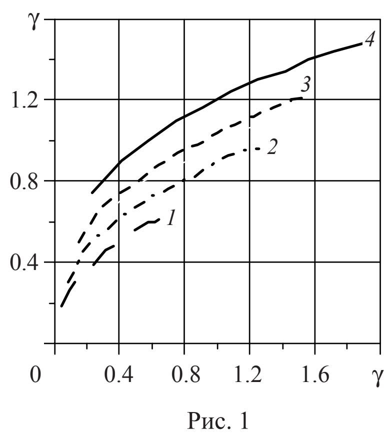


Рис. 1

При фиксированном E_s/E_c увеличение одного из интегральных коэффициентов влечет за собой увеличение другого. Видно, что на эту зависимость существенно влияет величина E_s/E_c, но поведение кривых сходно. Присутствие в модели лишь двух существенных упругих констант делает в принципе возможной их идентификацию не только в эксперименте, но и в клинике. Результаты открывают путь к корректному определению реальных механических характеристик глаза при клинических измерениях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 08-01-00492).

Список литературы

1. Моисеева И.Н., Штейн А.А. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2011. №4.

2. Бауэр С.М., Любимов Г.А., Товстик П.Е. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. №1. С. 24–39.

3. Аветисов С.Э., Бубнова И.А., Антонов А.А. Глаукома: реальность и перспективы. М.: НИИ глазных болезней РАМН. 2008. Ч. 2. С. 81–85.

4. Pallikaris I.G. et al. Expert Rev. // Ophthalmol. 2010. V. 5, No 3. P. 343–351.

ANALYSIS OF THE MECHANICAL BEHAVIOR OF THE EYEBALL UNDER STATIC LOADING CONDITIONS WITH APPLICATION TO INTERPRETING DIAGNOSTIC DATA

A.A. Stein, G.A. Lyubimov, I.N.Moiseeva

For estimating the elastic parameters of the eyebased on noninvasive measurements performable in clinics, a model which treats the eye tissues as a composition of two elastic elements, a soft shell (cornea) and a generalized linear element representing the sclera and the adjacent eye-socket tissues, is developed. The mechanical behavior of the latter element is characterized by only an elastic response to changes in the intraocular pressure. This model contains two main elastic parameters to be determined: the stiffnesses of the cornea and the scleral element. On the basis of the model proposed, calculations were performed for the applanation loading of the eye shell, in which case the load applied has the shape of a stamp with a sufficiently wide flat base. The function determining the dependence of the intraocular volume on the intraocular pressure and the load applied is calculated. It is shown that the elastic characteristic that can be obtained as the cornea is rapidly loaded by different weights (elastometry) cannot be directly used for estimating the elastic behavior of the eye during fluid inflation or prolonged loading (like in tonography). A relationship between the elastic characteristics of the system used for data interpretation in these groups of tests is established.

Keywords: eye, mathematical models, eye shell, intraocular pressure, tonometry, elastometry.

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И ГЕМОДИНАМИКА КОРОНАРНЫХ АРТЕРИЙ СЕРДЦА ЧЕЛОВЕКА

О.А. Щучкина

Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского

lelik19s@rambler.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Проведено численное исследование движения крови в анатомически реальной здоровой коронарной артерии (КА) сердца человека. Для реконструкции максимально точной геометрии КА, учитывающей внутренний рельеф сосуда, использовался метод заливки силиконом. Материал стенки сосудов при моделировании задавался как линейный изотропный. Кровь предполагалась ньютоновской жидкостью. Проведен сравнительный анализ полученных данных для случаев КА пространственно не закрепленной, закрепленной на пассивном и пульсирующем миокарде.

Ключевые слова: коронарные артерии, численное моделирование, гемодинамика, конечно-элементный расчет.

В настоящее время численное моделирование коронарного кровотока как части сердечно-сосудистой системы (ССС) человека привлекает большое внимание многих исследователей. Это связано не только с тем, что заболевания ССС вышли на первое место в мире, но и с тем, что возможности экспериментальных исследований процессов гемодинамики часто ограничены. Успех вычислительных экспериментов зависит от соответствия математической и вычислительной моделей реальным физическим процессам, протекающим в системе кровообращения человека. На практике решение таких задач связано с огромными вычислительными затратами, поэтому часто рассматриваются упрощенные модели, которые позволяют получать качественные характеристики гемодинамики коронарной системы и являются важным инструментом изучения и диагностики ССС.

Одной из основных причин нарушения миокардиального кровообращения (ишемической болезни сердца), приводящего к инфаркту миокарда, является окклюзия и/или стеноз КА. Хирургическое вмешательство является единственным действенным способом восстановления кровообращения.

Избежать возможных ошибок во время операции позволит оценка напряженно-деформированного состояния и гемодинамики КА человека. Поэтому существует явная необходимость в определении геометрии и механических свойств тканей коронарных артерий для оценки степени эффективности соответствующих хирургических вмешательств по восстановлению миокардиального кровообращения сердца человека. Полученные данные позволят задавать реальные параметры материала при построении индивидуальной компьютерной модели КА, с помощью которой возможно будет выявить и оценить индивидуальные особенности анатомического строения, провести предоперационную подготовку пациента, дать рекомендации оперирующему хирургу.

Для построения пространственной трехмерной модели КА возникла необходимость в реконструкции внешней поверхности сердца человека. К настоящему моменту в зарубежных публикациях представлено несколько работ, посвященных реконструкции коронарного артериального дерева [1] по результатам томографического исследования и численному моделированию потоков крови [2–4]. В настоящем исследовании для этого применялся метод заливки желатином in vitro, который позволяет наглядно отобразить по срезам внутреннюю и внешнюю поверхности сердца.

Полученные срезы были обработаны посредствам графических редакторов Adobe Photoshop и CorelDRAW для дальнейшего моделирования с использованием специализированного программного пакета SolidWorks 2008 (SolidWorks corporation) (рис. 1).

Опираясь на данные морфометрии коронарных артерий, предложенные в руководстве для врачей [5], с использованием специализированного программного пакета SolidWorks 2008

Рис. 1

(SolidWorks corporation) на поверхности сердца сплайном была воссоздана вспомогательная геометрия для построения рельефа сосуда (рис. 2).

Рассмотрены три модели: КА, пространственно незакрепленная и КА, закрепленная на пассивном и пульсирующем миокарде (рис. 4).

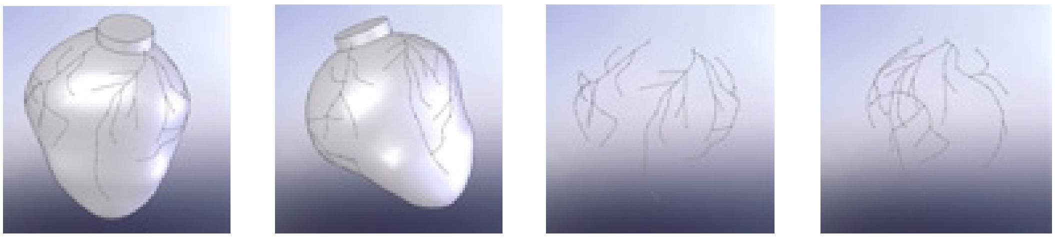


Рис. 2

Далее по точкам вспомогательного сплайна в плоскостях, перпендикулярных срединной линии артерий (сплайн), окружностями различного диаметра был построен элемент по сечениям. Таким образом, был получен внутренний рельеф сосудов.

Стенка строилась аналогично по той же средней линии, но ее диаметр больше на 1 мм, что соответствует усредненной толщине стенки КА. Последний этап в построении стенки был выполнен с помощью логических операций над объемами. В результате были получены 2 тела, соответствующие крови и стенке (рис. 3).

В результате эксперимента были получены следующие результаты:

– в случае пространственно незакрепленной артерии в районе изгиба локальное давление крови минимально на внутренней стенке изгиба, а по мере приближения к наружной стенке увеличивается и достигает максимума на самой стенке. Для модели, жестко закрепленной на поверхности миокарда, зона максимального давления смещена к незакрепленной стенке;

– максимальные значения скоростей потока достигаются у внутреннего радиуса в районе изгиба артерии;

Рис. 3

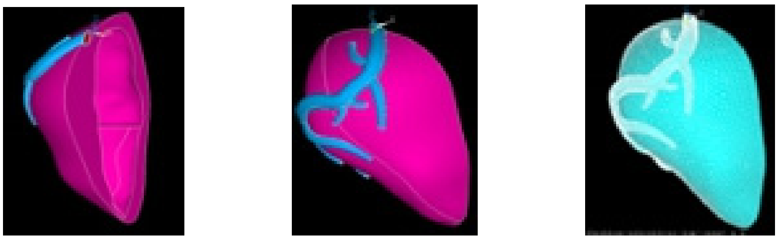


Рис. 4

– за счет разницы давления у наружного и внутреннего радиуса артерии возникают потоки поперечной циркуляции, имеющие характер завихрения как в зоне бифуркации, так и в зонах перегиба;

– низкие касательные напряжения наблюдаются в районе бифуркаций и изгибов/перегибов КА;

– максимальные значения центральных деформаций достигаются на внешнем радиусе в районе перегиба артерии для пространственно незакрепленной модели. Для модели, закрепленной на миокарде, максимальные значения достигаются на незакрепленной стенке.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00804-а).

Список литературы

1. Wang V.Y. et al. Passive ventricular mechanics modelling using MRI of structure and function // Med Image Comput Assist Interv. 2008. V. 11 (Pt 2). P. 814–821.

2. Goktepe S., Abilez O.J., Kuhl E. A generic approach towards finite growth with examples of athlete's heart, cardiac dilation, and cardiac wall thickening // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2010. V. 58. P. 1661–1680.

3. Schwaiger M., Ziegler S.I., Nekolla S.G. PET/CT challenge for the non-invasive diagnosis of coronary artery disease // European Journal of Radiology. 2010. V. 73. P. 494–503.

4. Anqiang Sun et al. (Eds.) Numerical study of hemodynamics at coronary bifurcation with and without swirling flow // WCB 2010, IFMBE Proc. 31, P. 1428–1430.

5. Авалиани В.М., Чернов И.И., Шобнин А.Н.. Коронарная хирургия при мультифокальном атеросклерозе. М.: Универсум, 2005. 384 с.

THE STRESS-STRAIN STATE AND HEMODYNAMICS OF HUMAN CORONARY ARTERIES

O.A. Schuchkina

Numerical modeling of blood flow through an anatomically realistic human coronary artery (CA) in a healthy state is provided. Silicone casts were used for 3D reconstruction of real CA geometry with exact inner wall morphology. The vessel wall material is considered to be linear isotropic, blood is Newtonian. Unconstrained and fixed on passive and pulsating myocardium CA's are studied, numerical results are analyzed and compared.

Keywords: coronary artery, numerical modeling, hemodynamics, finite element analysis.

АВТОРЫ

Общая и прикладная механика

Абитова Ирина Феритовна – асп. Института проблем точной механики и управления РАН; 410028, Саратов, ул. Рабочая, 24; сл. тел. (8452) 22-23-76; e-mail: abitovaif@rambler.ru

Аврейцевич Ян – зав. каф. автоматики и биомеханики Технического университета г. Лодзь (Польша); д.н.; проф.; 90-924, Poland, Lodz, Zeromskiego, 116; сл. тел. +48 42-631-21-51; e-mail: Awrejcew@p.lodz.pl

Адамян Ваник Григорьевич – зав. каф. прикладной механики Гюмрийского филиала Госуд. инженерного университета Армении; д.т.н., проф.; 3103, Армения, Гюмри, ул. М. Мкртчяна, 2; сл. тел. +37431243528; e-mail: vgadamyan@mail.ru

Адлай Семен Франкович – инженер-исследователь отдела механики Вычислительного центра РАН; 119333, Москва, ул. Вавилова, 40; сл. тел. (495) 135-35-90; e-mail: SemjonAdlaj@gmail.com

Азаров Евгений Борисович – первый проректор Уральского госуниверситета путей сообщения; к.т.н.; доц.; 620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66; сл. тел. (922) 223-80-76; e-mail: eazaroff@mail.ru

Акимов Павел Александрович – асп. каф. прикладной механики и управления МГУ; 119991, Москва, Ленинские горы, 1; сл. тел. (495) 939-59-33; e-mail: akmpavel@rambler.ru

Акуленко Леонид Денисович – гл. н. с. Института проблем механики РАН; д.ф.-м.н.; с.н.с.; 119526, Москва, пр. Вернадского, 101, корп. 1; сл. тел. (495) 433-80-33; e-mail: gavrikov@ipmnet.ru

Алексеева Ольга Николаевна – асп. каф. механики деформируемого твердого тела Уральского госуд. университета путей сообщения; 620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66; сл. тел. (343) 358-55-90; e-mail: SRumyantsev@math.usurt.ru

Алексеенко Денис Александрович – студ. МГУ (каф. теоретической механики и мехатроники); 119991, Москва, Ленинские горы, 1; сл. тел. (906) 058-45-56; e-mail: brautigan89@gmail.com

Амелькин Николай Иванович – доц. каф. теоретической механики Московского физико-технического института; к.ф.-м.н.; доц; 141700, Долгопрудный, Институтский пер., 9; сл. тел. (485) 408-78-66; e-mail: namelkin@mail.ru

Ананьевский Игорь Михайлович – зав. лаб. Института проблем механики РАН; д.ф.-м.н.; проф.; 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1; сл. тел. (495) 434-92-63; e-mail: anan@ipmnet.ru

Андреев Александр Сергеевич – декан факультета математики и информационных технологий Ульяновского госуниверситета; д.ф.-м.н.; проф.; 432000, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42; сл. тел. (842) 232-20-22; e-mail: AndreevAS@ulsu.ru

Андронов Вячеслав Васильевич – проф. каф. теоретической механики Московского госуд. технического университета; д.т.н.; проф.; 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5; сл. тел. (499) 263-64-96; e-mail: andron33@korolev-net.ru

Андронов Петр Роальдович – с.н.с. НИИ механики МГУ; к.ф.-м.н.; 119192, Москва, Мичуринский просп., 1; сл. тел. (495) 939-24-77; e-mail: andron@imec.msu.ru

Антипов Кирилл Андреевич – асп. каф. теоретической и прикладной механики СПбГУ; 198504, С.-Петербург, Ст. Петергоф, Университетский пр., 28; сл. тел. (812) 4284165; e-mail: antipov_k@rambler.ru

Антоновская Ольга Георгиевна – н.с. НИИ ПМК ННГУ; к.ф.-м.н.; доц.; 603005, Н. Новгород, ул. Ульянова, 10; сл. тел. (831) 439-09-54; e-mail: olga.antonovsckaja@yandex.ru

Артеменко Юрий Николаевич – зав. отд. Астрокосмического центра ФИАН; к.т.н.; 117997, Москва, ул. Профсоюзная, 84/32; сл. тел. (495) 333-31-66; e-mail: Altishenko@yahoo.com

Астахов Сергей Владимирович – асп. каф. теоретической механики и мехатроники Московского энергетического института; 111250, Москва, ул. Красноказарменная, 13п, корп. «С»; сл. тел. (495) 362-77-19; e-mail: nccl@mail.ru

Бабенко Елена Владимировна – асп. каф. теоретической механики Кубанского госуд. технологического университета; 350072, Краснодар, ул. Московская, 2, А-327; сл. тел. (861) 251-87-05; e-mail: babenkoelena-31@yandex.ru

Баландин Дмитрий Владимирович – зав. каф. численного и функционального анализа ННГУ; д.ф.-м.н.; проф.; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2; сл. тел. (831) 462-33-63; e-mail: dbalandin@yandex.ru

Банах Людмила Яковлевна – гл.н.с. Института машиноведения РАН; д.ф.-м.н.; с.н.с.; 101990, Москва, ул. Грибоедова, 4; сл. тел. (499) 135-55-79; e-mail: banl@inbox.ru

Барышников Юрий Николаевич – доц. каф. теоретической механики Московского госуд. технического университета; к.т.н.; 105005, Москва, 2-я Бауманская, 5; сл. тел. (499) 263-64-96; e-mail: fortuna@formatek.ru

Батхин Александр Борисович – докторант Института прикладной математики РАН; к.ф.-м.н.; доц.; 125047, Москва, Миусская пл. 4; сл. тел. (499) 250-78-05; e-mail: batkhin@gmail.com

Бахадиров Гайрат Атаханович – зав. лаб. Института механики и сейсмостойкости сооружений АН Республики Узбекистан; д.т.н.; ст.н.с.; 100125, Ташкент, Академгородок, ул. Дурмен йули, 31; сл. тел. (99871) 262-73-55; e-mail: instmech@rambler.ru

Башуров Владимир Витальевич – гл. спец. ООО «Центр экологического и техногенного мониторинга» при Трехгорном технологическом институте; д.ф.-м.н.; проф.; 456080, Трехгорный, Челябинская область, ул. Строителей, 4-81; сл. тел. (35191) 6-08-84; e-mail: cetm@atlint.ru

Бедин Дмитрий Александрович – м.н.с. отдела динамических систем Института математики и механики Уральского отделения РАН; 620990, Россия, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; сл. тел. (343) 362-81-68; e-mail: jango.urals@gmail.com

Белов Сергей Евлампиевич – нач. отдела ОАО «ОКБМ Африкантов»; 603074, Н. Новгород, Бурнаковский проезд, 15; сл. тел. (831) 246-96-07; e-mail: kocay@okbm.nnov.ru

Беляков Александр Вячеславович – инженер-программист отдела систем УВД фирмы «НИТА»; 196210, Санкт-Петербург, ул. Взлетная, 15А; сл. тел. (812) 704-18-72; e-mail: al@nita.ru

Блехман Илья Израилевич – зав. лаб. Института проблем машиноведения РАН и Научно-производственной корпорации «Механобр-техника»; д.ф.-м.н.; проф.; 199178, Санкт-Петербург, ВО, Большой просп., 61; сл. тел. (812) 331-02-54; e-mail: iliya.i.blekhman@gmail.com

Болотник Николай Николаевич – зав. лаб. робототехники и мехатроники Института проблем механики РАН; д.ф.-м.н.; 119526, Москва, пр. Вернадского, 101, корп. 1; сл. тел. (495) 434-35-01; e-mail: bolotnik@ipmnet.ru

Брискин Евгений Самуилович – зав. каф. теоретической механики Волгоградского госуд. технического университета; д.ф.-м.н.; проф.; 400131, Волгоград, пр. Ленина, 28; сл. тел. (8442) 24-81-13; e-mail: dtm@vstu.ru

Брысин Андрей Николаевич – н.с. Института машиноведения РАН; к.т.н; 101990, Москва, Малый Харитоньевский пер., 4; сл. тел. (916) 617-58-20; e-mail: brysin@rambler.ru

Брюно Александр Дмитриевич – зав. сектором Института прикладной математики РАН; д.ф.-м.н.; проф.; 125047, Москва, Миусская пл. 4; сл. тел. (499) 250-78-84; e-mail: abruno@keldysh.ru

Бутенина Наталия Николаевна – доц. каф. численного и функционального анализа ННГУ; к.ф.-м.н.; доц.; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23; сл. тел. (831) 462-33-63; e-mail: n.n.butenina@mail.ru

Ваганова Наталия Анатольевна – н.с. отдела прикладных задач Института математики и механики Уральского отделения РАН; к.ф.-м.н.; 620219, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; сл. тел. (343) 375-34-94; e-mail: vna@imm.uran.ru

ван де Кеттеряй Роберт Херард – менеджер МТИ Холланд Б.В.; PhD; 2961 AW, Киндердяйк, Нидерланды; сл. тел. 0031 786910321; e-mail: r.vandeketterij@mtiholland.com

Вашковьяк Михаил Александрович – в.н.с. Института прикладной математики РАН; д.ф.-м.н.; с.н.с.; 125047, Москва А-47, Миусская пл., 4; сл. тел. (499) 250-78-26; e-mail: vashkov@keldysh.ru

Веричев Станислав Николаевич – с.н.с. Нижегородского филиала Института машиноведения РАН; к.ф.-м.н., с.н.с.; 603024, Н. Новгород, ул. Белинского, 85; сл. тел. (831) 432-05-76; e-mail: s_veritchev@front.ru

Волохова Любовь Евгеньевна – математик отдела дифференциальных уравнений Института математики и механики Уральского отделения РАН; 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; сл. тел. (343) 375-34 54; e-mail: l.volokhova@gmail.com

Волоховская Ольга Аскольдовна – в.н.с. лаб. вибромеханики Института машиноведения РАН; к.т.н.; с.н.с.; 101990, Москва, Малый Харитоньевский пер., 4; сл. тел. (499)135-55-84 (сл.); e-mail: OlgaAVol@yandex.ru

Вульфсон Иосиф Исаакович – проф. каф. теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского госуниверситета технологии и дизайна; д.т.н.; проф.; 191186, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская,18; сл. тел. (812) 310-15-61; e-mail: vujo@rambler.ru

Гавриков Александр Александрович – м.н.с. Института проблем механики РАН; 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1; сл. тел. (495) 434-32-92; e-mail: gavrikov@ipmnet.ru

Гаврилова Татьяна Ивановна – доц. каф. информатики, систем управления и телекоммуникаций Волжской госуд. академии водного транспорта; к.т.н.; доц.; 603950, Н. Новгород, ул. Нестерова, 5а; сл. тел. (831) 419-66-99; e-mail: iapp@aqua.sci-nnov.ru

Ганебный Сергей Александрович – н.с. отдела динамических систем Института математики и механики Уральского отделения РАН; к.ф.-м.н.; 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; сл. тел. (343) 375-34-44; e-mail: ganebny@imm.uran.ru

Глазунов Виктор Аркадьевич – проф. Института машиноведения РАН; д.т.н., д.фил.н.; проф.; 101990, Москва, М. Харитоньевский пер., 4; сл. тел. (495) 624-00-28; e-mail: vaglznv@mail.ru

Голубев Юрий Филиппович – зав. отделом Института прикладной математики РАН; д.ф.-м.н.; проф.; 125047, Москва, Миусская пл., 4; сл. тел. (499) 250-78-77; e-mail: golubev@keldysh.ru

Голубева Кира Владимировна – асс. каф. стандартизации и инженерной графики Нижегородского госуд. архитектурно-строительного университета; 603950, Н. Новгород, ул. Ильинская, 65; сл. тел. (831) 430-54-95; e -mail: kupycuk@bk.ru

Горбиков Сергей Павлович – зав. каф. прикладной математической статистики Нижегородского госуд. архитектурно-строительного университета; д.ф.-м.н.; проф.; 603950, Н. Новгород, ул. Ильинская, 65, корп. 8; сл. тел. (831) 434-09-50; e-mail: gorby50@online.ru

Горбунова Алена Александровна – м.н.с. НИИ механики ННГУ; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 6; сл. тел. (831) 465-67-93; e-mail: labdin@mech.unn.ru

Гордеев Андрей Борисович – н.с. Нижегородского филиала Института машиноведения РАН; к.т.н.; 603024, Н. Новгород, ул. Белинского, 85; сл. тел. (831) 432-23-56; e-mail: vibro@mts-nn.ru

Гордеев Борис Александрович – зав. лаб. виброзащиты машин Нижегородского филиала Института машиноведения РАН; д.т.н.; проф.; 603024, Н. Новгород, ул. Белинского, 85; сл. тел. (831) 232-21-59; e-mail: vibro@mts-nn.ru

Горюнов Владимир Иванович – в.н.с. НИИ ПМК ННГУ; к.ф.-м.н.; доц.; 603005, Н. Новгород. ул. Ульянова, 10; сл. тел. (831) 439-09-54; e-mail: pmk@unn.ac.ru

Градецкий Валерий Георгиевич – гл. н.с. лаб. робототехники и мехатроники Института проблем механики РАН; д.т.н.; проф.; 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1; сл. тел. (495) 434-41-49; e-mail: gradet@ipmnet.ru

Гребеников Евгений Александрович – гл.н.с. Вычислительного центра РАН; д.ф.-м.н.; проф.; 119333, Москва, ул. Вавилова, 40; сл. тел. (499) 135-52-09; e-mail: e-greben@yandex.ru

Грезина Александра Викторовна – доц. каф. прикладной математики ННГУ; к.ф.-м.н.; доц.; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2; сл. тел. (831) 462-33-64; e-mail: Aleksandra-grezina@yandex.ru

Григорян Вананд Гургенович – с.н.с. Института геофизики и инженерной сейсмологии НАН Республики Армении; к.ф.-м.н.; 3115, Республика Армения, Гюмри, ул. В. Саргсяна 5; сл. тел. (+374 31) 23-12-61, (+374 94) 79-85-80; e-mail: jon_iges@mail.ru

Давыдов Алексей Алексеевич – нач. сектора Государственного космического научно-производственного центра; 121087, Москва, ул. Новозаводская, 18; сл. тел. (499) 749-92-27; e-mail: aleksey_ad@mail.ru

Денисов Геннадий Григорьевич – гл.н.с. НИИ ПМК ННГУ; д.ф.-м.н.; проф.; 603005, Н. Новгород, ул. Ульянова, 10; сл. тел. (831) 461-13-89; e-mail: denisov227@gmail.com

Дмитриев Никита Николаевич – доц. математико-механического факультета Санкт-Петербургского госуниверситета; к.ф.-м.н; 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский просп., 28; сл. тел. (812) 428-69-44; e-mail: dn7@rambler.ru

Дмитриева Ольга Геннадьевна – м.н.с. каф. информационной безопасности и теории управления Ульяновского госуниверситета; 432000,Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42: сл. тел. (8422) 32-20-22; e-mail: mtu@ulsu.ru

Довбыш Сергей Александрович – с.н.с. НИИ механики МГУ; к.ф.-м.н., доц.; 119192, Москва, Мичуринский пр-т, 1; сл. тел. (495) 939-51-43; e-mail: sdovbysh@yandex.ru

Досаев Марат Закирджанович – с.н.с. НИИ механики МГУ; к.ф.-м.н.; доц.; 119192, Москва, Мичуринский просп., 1; сл. тел. (495) 939-54-78; e-mail: dosayev@imec.msu.ru

Евграфов Владимир Владимирович – ст. преп. каф. теоретической механики и мехатроники МГУ; 119991, Москва, Ленинские горы, 1; сл. тел. (906) 058-45-56; e-mail: Vovchik_ev@mail.ru

Егорова Лидия Александровна – н.с. НИИ механики МГУ; 119192, Москва, Мичуринский просп. 1; сл. тел. (495) 939-38-66; e-mail: egorova@imec.msu.ru

Журавлев Виктор Филиппович – гл.н.с. Института проблем механики РАН; д.ф.-м.н.; проф.; академик РАН; 119526, г. Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1; сл. тел. (495) 434-34-65; e-mail: zhurav@ipmnet.ru

Заводников Дмитрий Евгеньевич – программист отдела дифференциальных уравнений Института математики и механики Уральского отделения РАН; 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; сл. тел. (343) 375-34 54; e-mail: d.zavodnikov@gmail.com

Зайцев Николай Игоревич – студ. ННГУ; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23; сл. тел. (831) 465-85-10, (831) 439-09-54; e-mail: nikozay@yandex.ru

Земцова Надежда Ивановна – с.н.с. Вычислительного центра РАН; к.ф.-м.н.; 119333, Москва, ул. Вавилова, 40; сл. тел. (499) 135-52-09; e-mail: zemni@yandex.ru

Зимин Владимир Николаевич – директор НИИ специального машиностроения Московского госуд. технического университета; д.т.н.; с.н.с.; 105005, Москва, 2-я Бауманская улица, 5; сл. тел. (499) 261-21-88; e-mail: sm11@sm.bmstu.ru

Зимовец Артем Анатольевич – ст. преп. Уральского федерального университета; 620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19; сл. тел (343) 375-34-38; e-mail: Darkflame-9s@yandex.ru

Зинкевич Янина Сергеевна – асс. каф. теоретической механики Одесской госуд. академии строительства и архитектуры; 65029, Украина, Одесса, ул. Дидрихсона, 4; сл. тел. +38 (048) 720-64-49 e-mail: yaninaz@mail.ru

Зобова Александра Александровна – доц. каф. теоретической механики и мехатроники МГУ; к.ф.-м.н.; 119991, Москва, Ленинские горы, 1; сл. тел. (495) 939-36-81; e-mail: azobova@mail.ru

Зотеев Владимир Евгеньевич – проф. каф. прикладной математики и информатики Самарского госуд. технического университета; д.т.н.; доц.; 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244; сл. тел. (846) 337-04-43; e-mail: zoteev-ve@mail.ru

Ибрагимов Валерий Сулейманович – вед. конструктор НИИ механики МГУ; 119192, Москва, Мичуринский просп., 1; сл. тел. (495) 939-26-28, e-mail: formal@imec.msu.ru

Иванов Алексей Геннадьевич – гл. программист отдела динамических систем Института математики и механики Уральского отделения РАН; 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; сл. тел. (343) 375-34-44; e-mail: iagsoft@imm.uran.ru

Иванов Владимир Николаевич – доц. каф. высшей математики Пермского госуниверситета; к.ф.-м.н.; доц.; 614990, Пермь, ул. Букирева, 15; сл. тел. (342) 239-65-60; e-mail: precol@psu.ru

Иванов Даниил Сергеевич – асп. Института прикладной математики РАН; 125047, Москва, Миусская пл., 4; сл. тел. 8-963-729-58-53; e-mail: danilivanovs@gmail.com

Иванова Виктория Феликсовна – ст. программист лаб. механики и оптимизации конструкций Института проблем механики РАН; 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1; сл. тел. (495) 434-14-67; e-mail: ivano-va@ipmnet.ru

Иванова Ольга Алексеевна – студ. Московского госуд. технического университета; 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5; сл. тел. (499) 263-63-26; e-mail: lelga88@yahoo.com

Ивашкин Вячеслав Васильевич – в.н.с. отдела механики и управления движением Института прикладной математики РАН; д.ф.-м.н.; проф.; 125047, Москва, Миусская пл., 4; сл. тел. (499) 250-78-26; e-mail: Ivashkin@keldysh.ru

Исламова Оксана Владимировна – ст. преп. каф. управления качеством Кабардино-Балкарского госуниверситета; 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173; сл. тел. (8662) 42-01-45; e-mail: Islamova_81@mail.ru

Казачек Юлия Николаевна – асп. Нижегородского филиала Института машиноведения РАН; 603024, Н. Новгород, ул. Белинского, 85; сл. тел. (831) 432-23-87; e-mail: yunk_nn@mail.ru

Калашников Александр Львович – доц. каф. численного и функционального анализа ННГУ; к.ф.-м.н.; доц.; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2; сл. тел. (831) 462-33-63; e-mail: allk123@yandex.ru

Калинин Ярослав Владимирович – м.н.с. каф. теоретической механики Волгоградского госуд. технического университета; 400131, Волгоград, пр. Ленина, 28; сл. тел. (8442) 24-80-99; e-mail: dtm@vstu.ru

Кальясов Павел Сергеевич – асп. каф. теории упругости и пластичности ННГУ; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2; сл. тел. (831) 462-33-29; e-mail: atumanin@gmail.com

Капитанов Денис Владимирович – м.н.с. НИИ механики ННГУ; 603050, Н. Новгород, пр. Гагарина 23, корп. 6; сл. тел. (831) 465-67-93; e-mail: labdin@mech.unn.ru

Карапетян Джон Костикович – н.с. Института геофизики и инженерной сейсмологии НАН Республики Армении; к. геол. н; 3115, Республика Армения, Гюмри, ул. В. Саргсяна 5; сл. тел. (+374 312) 3-12-61, (+374 94) 79-85-80; e-mail: jon_iges@mail.ru

Карпенко Станислав Олегович – инженер Инженерно-технологического центра «СканЭкс»; 119021, Москва, ул. Л. Толстого 22/5; сл. тел. (916) 527-47-98; e-mail: s.o.karpenko@gmail.com

Ким Аркадий Владимирович – с.н.с., рук. группы ФДУ отдела дифференциальных уравнений Института математики и механики Уральского отделения РАН; д.ф.-м.н.; 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; сл. тел. (343) 375-34-54, e-mail: avkim@imm.uran.ru

Киреенков Алексей Альбертович – с.н.с. Института проблем механики РАН; к.ф.-м.н.; с.н.с.; 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1; сл. тел. (495) 434-16-92; e-mail: kireenk@ipmnet.ru

Климина Любовь Александровна – н.с. НИИ механики МГУ; 119192, Москва, Мичуринский просп., 1; сл. тел. (495) 939-24-77; e-mail: klimina@imec.msu.ru

Климов Дмитрий Михайлович – советник Института проблем механики РАН; д.ф.-м.н.; проф.; академик РАН; 119526, Москва, просп Вернадского, 101, корп. 1; сл. тел. (495) 434-46-10; e-mail: klimov@ipmnet.ru

Ковалев Роман Васильевич – с.н.с. лаб. вычислительной механики Брянского госуд. технического университета; к.т.н.; 241035, Брянск, бул. 50-летия Октября, 7; сл. тел. (4832) 56-86-37; e-mail: kovalev@umlab.ru

Ковальчук Антонина Владимировна – асп. Московского госуд. текстильного университета; 119071, Москва, ул. Малая Калужская, 1; сл. тел. (495) 955-37-87; e-mail: sheilo@yandex.ru

Ковригин Дмитрий Анатольевич – с.н.с. Нижегородского филиала Института машиноведения РАН; д.т.н.; 603024, Н. Новгород, ул. Белинского, 85; сл. тел. (831) 432-23-56; e-mail: kovriguineda@gmail.com

Коган Марк Михайлович – зав. каф. Нижегородского госуд. архитектурно-строительного университета; д.ф.-м.н.; проф.; 603950, Н. Новгород, ул. Ильинская, 65.; сл. тел. (831) 430-69-84; e-mail: mkogan@nngasu.ru

Кодочигов Николай Григорьевич – гл. конструктор ОАО «ОКБМ Африкантов»; к.т.н.; доц.; 603074, Н. Новгород, Бурнаковский проезд, 15; сл. тел. (831) 241-73-72; e-mail: kocay@okbm.nnov.ru

Комаров Валентин Николаевич – зав. каф. прикладной математики ННГУ; д.т.н.; проф.; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2; сл. тел. (831) 462-33-64; e-mail: kovn@uic.nnov.ru

Корнеев Всеслав Александрович – н.с. лаб. механики управляемых систем Института проблем механики РАН; к.ф.-м.н.; 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1; сл. тел. (495) 434-27-01; e-mail: Korneev @ipmnet.ru

Красноруцкий Дмитрий Александрович – асп. каф. прочности летательных аппаратов Новосибирского госуд. технического университета; м.н.с; 630092, Новосибирск, просп. К. Маркса, 20, корп. 3; сл. тел. (383) 346-31-21; e-mail: dakras@mail.ru

Краузин Павел Васильевич – инженер каф. общей физики Пермского госуниверситета; 614990, Пермь, ул. Букирева, 15; сл. тел. (342) 239-66-42; e-mail: krauzin@gmail.com

Кробка Николай Иванович – гл.н.с. НИИ прикладной механики - филиала Центра эксплуатации наземной космической инфраструктуры; к.ф.-м.н.; 111123, Москва, ул. Пруд Ключики, 12; сл. тел. (495) 221-86-38; e-mail: KrobkaNick@msn.com

Кропотов Алексей Иванович – спец. ООО «Центр экологического и техногенного мониторинга» при Трехгорном технологическом институте; 456080, Трехгорный, Челябинская область, Строителей, 4-81; сл. тел. (35191) 6-08-84; e-mail: cetm@atlint.ru

Круговова Екатерина Алексеевна – асп. каф. прикладной механики Брянского госуд. технического университета; 241035, Брянск, бульвар 50-летия Октября, 7; сл. тел. (4832) 56-86-37; e-mail: krugovova@umlab.ru

Крылова Екатерина Юрьевна – асп. каф. математики и моделирования Саратовского госуд. технического университета; 410054, Саратов, ул. Политехническая, 77; сл. тел. (8452) 99-87-24; e-mail: Kat.ktylova@bk.ru

Крысько Вадим Анатольевич – зав. каф. математики и моделирования Саратовского госуд. технического университета; д.т.н; проф.; 410054, Саратов, ул. Политехническая, 77; сл. тел. (8452) 99-87-24; e-mail: yan-tan1987@mail.ru

Кряжимский Аркадий Викторович – гл. н.с. Математического института РАН; д.ф.-м.н., академик РАН; 119991, Москва, ул. Губкина, 9; сл. тел. (495) 135-24-30; e-mail: kryazhim@iiasa.ac.at

Кувшинов Дмитрий Рустамович – вед. программист отдела динамических систем Института математики и механики Уральского отделения РАН; к.ф.-м.н.; 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; сл. тел. (343) 362-81-68; e-mail: evetro.here@gmail.com

Кулагин Виктор Васильевич – с.н.с. Института проблем машиноведения РАН; к.ф.-м.н.; 190178, Санкт-Петербург, Большой просп. ВО, 61; сл. тел. (812) 321-47-83; e-mail: wkoula@gmail.com

Кулешов Александр Сергеевич – доц. каф. теоретической механики и мехатроники МГУ; к.ф.-м.н.; доц.; 119991, Москва, Ленинские горы, главное здание МГУ; сл. тел. (495) 939-36-81; e-mail: kuleshov@mech.math.msu.su

Куликов Анатолий Николаевич – доц. каф. дифференциальных уравнений Ярославского госуниверситета; к.ф.-м.н.; доц.; 150000, Ярославль, ул. Советская, 14; сл. тел. (4852) 21-87-34; e-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич – доц. каф. микроэлектроники Ярославского госуниверситета; к.ф.-м.н.; доц.; 150000, Ярославль, ул. Советская, 14; сл. тел. (4852) 21-87-34; e-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Культербаев Хусен Пшимурзович – зав. каф. теоретической и прикладной механики Кабардино-Балкарского госуниверситета; д.т.н.; проф.; 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 169; сл. тел. (8662) 42-01-45; e-mail: kulthp@mail.ru

Культина Наталья Юрьевна – асс. каф. теоретической механики ННГУ; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2; сл. тел. (831) 462-33-27; e-mail: natalia.kultina@gmail.com

Кумакшев Сергей Анатольевич – с.н.с. Института проблем механики РАН; к.ф.-м.н.; 119526, Москва, просп. Вернадского, 101-1; сл. тел. (495) 434-27-01; e-mail: kumak@ipmnet.ru

Кумков Сергей Сергеевич – с.н.с. отдела динамических систем Института математики и механики Уральского отделения РАН; к.ф.-м.н.; 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; сл. тел. (343) 375-34-44; e-mail: kumkov.jr@imm.uran.ru

Кыдырбекулы Алматбек Балгабекович – доц. каф. механики Казахского национального университета; д.т.н.; доц.; 050026, Казахстан, Алматы, ул. Масанчи, 39/47; сл.тел. (327) 292-64-61; e-mail: almatbek@list.ru

Лапин Николай Иванович – асп. Нижегородского госуд. педагогического университета; 603950, Н. Новгород, ул. Ульянова, 1; сл. тел. (831) 439-37-30; e-mail: lapinni@mail.ru

Ларюшкин Павел Андреевич – асп. Московского госуд. текстильного университета; 119071, Москва, ул. Малая Калужская, 1; сл. тел. (495) 955-37-87; e-mail: oddeye@mail.ru

Лебедева Светлана Владимировна – доц. каф. радиоэлектроники Волжской госуд. академии водного транспорта; к.т.н.; доц.; 603950, Н. Новгород, ул. Нестерова, 5а; сл.тел. (831) 419-93-07; e-mail: vim@aqua.sci-nnov.ru

Левин Владимир Евгеньевич – проф., зам. зав. каф. прочности летательных аппаратов Новосибирского госуд. технического университета; д.т.н.; доц; 630092, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, корп. 3; сл. тел. (383) 346-31-21; e-mail: levin@craft.nstu.ru

Леонтьева Анна Викторовна – асп. Нижегородского филиала Института машиноведения РАН; 603024, Н. Новгород, ул. Белинского, 85; сл. тел. (831) 432-23-56; e-mail: aleonav@mail.ru

Лещенко Дмитрий Давидович – зав. каф. теоретической механики Одесской госуд. академии строительства и архитектуры; д.ф.-м.н.; проф.; 65029, Украина, Одесса, ул. Дидрихсона, 4; сл. тел. +38 (048) 731-74-73; e-mail: leshchenko_d@ukr.net

Локшин Борис Яковлевич – в.н.с. НИИ механики МГУ; к.ф.-м.н.; доц.; 119192, Москва, Мичуринский просп., 1; сл. тел. (495) 939-54-78; e-mail: blokshin@imec.msu.ru

Лохин Валерий Викторович – с.н.с. НИИ механики МГУ; к.ф.-м.н.; с.н.с.; 119192, Москва, Мичуринский просп. 1; сл. тел. (495) 939-38-66; e-mail: egorova@imec.msu.ru

Любимов Александр Константинович – декан механико-математического факультета ННГУ, зав. каф. теории упругости и пластичности ННГУ; д.ф.-м.н.; проф.; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2; сл. тел. (831) 462-33-29; e-mail: ljubimov@mm.unn.ru

Любимцева Ольга Львовна – ст. преп. каф. прикладной математической статистики Нижегородского госуд. архитектурно-строительного университета; 603950, Н. Новгород, ул. Ильинская, 65; сл. тел. (831) 434-09-50; e-mail: mathstat2010@yndex.ru

Ляхов Александр Федорович – доц. каф. теоретической механики ННГУ; к.ф.-м.н.; доц.; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2; сл. тел. (831) 462-33-27; e-mail: Lyakhov@mm.unn.ru

Маккензи Родерик Кеннет – инженер-технолог Icopal Ltd; PhD; Barton Dock Road, Stretford, Manchester, M32 0YL, UK; сл. тел. +44 (0)161 866 6540; e-mail: r.k.mackenzie@napier.ac.uk

Максимов Вячеслав Иванович – зав. отделом дифференциальных уравнений Института математики и механики Уральского отделения РАН; д.ф.-м.н.; 620219, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; сл. тел. (343) 375-35-08; e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Малев Алексей Георгиевич – асп. Института математики и механики Уральского отделения РАН; 620219, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; сл. тел. (343) 375-34-38; e-mail: amalev@hunite.com

Малкин Сергей Алексеевич – асп. каф. математики Нижегородского госуд. архитектурно-строительного университета; 603950, Н. Новгород, ул. Ильинская, 65, корп. 6; сл. тел. (831) 246-96-55; e-mail: ser-malkin@yandex.ru

Маркеев Анатолий Павлович – гл.н.с. Института проблем механики РАН; д.ф.-м.н.; проф.; 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, стр.1; сл. тел. (495) 434-30-60; e-mail: markeev@ipmnet.ru

Марчевский Илья Константинович – доц. каф. прикладной математики Московского госуд. технического университета; к.ф.-м.н.; 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5; сл. тел. (499) 263-63-26; e-mail: iliamarchevsky@mail.ru

Маслова Анна Ивановна – м.н.с. отдела системного анализа и проблем управления Института технической механики НАН Украины и НКА Украины; 49005, Украина, Днепропетровск, ул. Лешко-Попеля, 15; сл. тел. (0562) 47-24-38; e-mail: Maslova_anjyta@mail.ru

Матасов Александр Иванович – в.н.с. лаб. управления и навигации МГУ; д.ф.-м.н.; проф.; 119991, Москва, Ленинские горы, 1; сл. тел. (495) 939-59-33; e-mail: alexander.matasov@gmail.com

Матвийчук Александр Ростиславович – н.с. Института математики и механики Уральского отделения РАН; к.ф.-м.н.; 620219, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; сл. тел. (343) 375-34-38; e-mail: matv@uran.ru

Менек Стефан Ле – рук. проектов отдела исследования и развития MDBA Inc; PhD; 92358, MBDA France, 1 rue Reaumur, Le Plessis-Robinson CEDEX; сл. тел. +33 / 1 71 54 10 00; e-mail: stephane.le-menec@mbda-systems.com

Меньшенина Алевтина Владимировна – ст. преп. каф. прикладной математической статистики Нижегородского госуд. архитектурно-строительного университета; 603950, Н. Новгород, ул. Ильинская, 65, корп. 8; сл. тел. (831) 434-09-50; e-mail: alya112@yandex.ru

Меркурьев Игорь Владимирович – зав. каф. теоретической механики и мехатроники Московского энергетического института; д.т.н.; 111250, Москва, ул. Красноказарменная, 13п, корпус «С»; сл. тел. (495) 362-73-14; e-mail: MerkuryevIV@yandex.ru

Метрикин Андрей Владимирович – проф. Делфтского технологического университета; д-ф.-м.н.; проф.; 2628 CN, Делфт, Нидерланды; сл. тел. 0031 152784749: e-mail: a.metrikine@tudelft.nl

Метрикин Владимир Семенович – в.н.с. НИИ ПМК ННГУ; к.ф.-м.н.; доц.; 603005, Н. Новгород, ул. Ульянова,10; сл. тел. (831) 434-17-68; e-mail: v.s.metrikin@mail.ru

Мешковский Виталий Евгеньевич – ст. преп. каф. космических аппаратов и ракет-носителей Московского госуд. технического университета; 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5; сл. тел. (499) 263-67-10; e-mail: sm11@sm.bmstu.ru

Мирер Сергей Александрович – в.н.с. Института прикладной математики РАН; д.ф.-м.н.; проф.; 125047, Москва, Миусская пл., 4; сл. тел. (499) 250-78-13; e-mail: mirer@keldysh.ru

Митрофанов Иван Евгеньевич – вед. инженер НИИ механики МГУ; 119192, Москва, Мичуринский просп., 1; сл. тел. (495) 939-26-28, e-mail: formal@imec.msu.ru

Михеев Геннадий Викторович – доц. каф. прикладной механики Брянского госуд. технического университета; к.т.н.; доц.; 241035, Брянск, бульвар 50-летия Октября, 7; сл. тел. (4832) 56-86-37; e-mail: gmikheev@mail.ru

Молоденков Алексей Владимирович – с.н.с. Института проблем точной механики и управления РАН; к.т.н.; 410028, Саратов, ул. Рабочая, 24; сл. тел. (8452) 22-23-76; e-mail: molalexei@yandex.ru, iptmuran@san.ru

Морева Виктория Сергеевна – студ. Московского госуд. технического университета; 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5; сл. тел. (499) 263-63-26; e-mail: morevavs@rambler.ru

Морозов Альберт Дмитриевич – зав. каф. дифференциальных уравнений и математического анализа ННГУ; д.ф.-м.н.; проф.; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 6; сл. тел. (831) 465-34-11; e-mail: morozov@mm.unn.ru

Муницын Александр Иванович – доц. каф. теоретической и прикладной механики Ивановского госуд. энергетического университета; к.т.н.; доц.; 153003, Иваново, ул. Рабфаковская, 39; сл. тел. (4932) 26-97-11; e-mail: munitsyn@rambler.ru

Муницына Мария Александровна – доц. Московского госуд. университета инженерной экологии; к.ф.-м.н.; 105066, Москва, ул. Старая Басманная, 21/4; сл. тел. (499) 267-10-14; e-mail: Munitsyna@rambler.ru

Мухаммадиев Давлат Мустафаевич – уч. секретарь Института механики и сейсмостойкости сооружений АН Республики Узбекистан; к.т.н.; доц.; 100125, Ташкент, Академгородок, ул. Дурмон йули, 31; сл. тел. (8371) 262-71-32; e-mail: davlat_mm@mail.ru

Мухин Алексей Дмитриевич – нач. сектора Госуд. космического научно-производственного центра; 121087, Москва, Новозаводская улица, 18; сл. тел. (499) 749-92-27; e-mail: a_mukhin@mail.ru

Нагар Юлия Николаевна – асс. Энгельсского технологического института – филиала Саратовского госуд. технического университета; 413100, Энгельс, пл. Свободы, 17; сл. тел. (8453) 95-35-53; e-mail: ynagar@yandex.ru

Нестеров Сергей Владимирович – гл. н. с. Института проблем механики РАН; д.ф.-м.н.; проф; 119526, Москва, пр. Вернадского, 101, корп. 1; сл. тел. (495) 434-35-29; e-mail: gavrikov@ipmnet.ru

Никифорова Ирина Владимировна – асс. каф. прикладной математики ННГУ; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23; сл. тел. (831) 462-33-64; e-mail tsii@list.ru

Николс Остин Ли – магистрант Университета г. Эдинбурга, технический менеджер Icopal Ltd г. Манчестера; Barton Dock Road, Stretford, Manchester, M32 0YL, UK; сл. тел. +44 (0)161 866 6540; e-mail: uklni@icopal.com

Новиков Валерий Вячеславович – зав. каф. теоретической механики ННГУ; д.ф.-м.н.; проф.; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2; сл. тел. (831) 462-33-27; e-mail: novikov@mm.unn.ru

Нуждин Дмитрий Олегович – студ. Московского физико-технического института (НИУ); 141700, Долгопрудный, Институтский пер., 9; сл. тел. (916) 850-62-15; e-mail: nuzhdin@phystech.edu

Нуждин Константин Андреевич – асс. каф. мехатроники Санкт-Петербургского госуд. университета информационных технологий, механики и оптики; 197101, Санкт-Петербург, пр. Кронверкский, 49; сл. тел. (911) 779-81-72; e-mail: NuzhdinK@yandex

Овчинников Михаил Юрьевич – зав. сектором отдела механики и управления Института прикладной математики РАН; д.ф.-м.н.; проф.; 125047, Москва, Миусская пл., 4; сл. тел. (499) 250-78-13; e-mail: ovchinni@keldysh.ru

Огородников Евгений Николаевич – доц. каф. прикладной математики и информатики Самарского госуд. технического университета; к.ф.-м.н.; доц.; 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244; сл. тел. (846) 337-04-43; e-mail: eugen.ogo@gmail.com

Окунев Юрий Михайлович – директор НИИ механики МГУ; к.ф.-м.н.; 119192, Москва, Мичуринский просп., 1; сл. тел. (495) 939-31-21; e-mail: common@imec.msu.ru

Ольшанский Владимир Юрьевич – гл.н.с. Института проблем точной механики и управления РАН; д.ф.-м.н.; проф.; 410028, Саратов, ул. Рабочая, 24; сл. тел. (8452) 22-23-76; e-mail: olshanskiy_vlad@mail.ru

Орехова Ольга Ивановна – асп. Нижегородского филиала Института машиноведения РАН; 603024, Н. Новгород, ул. Белинского, 85; сл. тел. (831) 432-05-76; snussmurr@rambler.ru

Осипенко Кирилл Юрьевич – н.с. Института проблем механики РАН; к.ф.-м.н.; 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1; сл. тел. (495) 434-46-64; e-mail: kirill-o@mail.ru, osipenko@ipmnet.ru

Павликов Сергей Владимирович – проф. каф. информационной безопасности и теории управления Ульяновского госуниверситета; д.ф.-м.н.; доц.; 432700, Ульяновск, Набережная реки Свияги, 1, кор. I; сл. тел. (422) 32-20-22; e-mail: svpavlikov@yandex.ru

Павловский Владимир Евгеньевич – в.н.с. Института прикладной математики РАН; д.ф.-м.н.; проф.; 125047, Москва, Миусская пл., 4; сл. тел. (499) 250-79-27; e-mail: vlpavl@mail.ru

Панкратов Владимир Александрович – асс. каф. математического моделирования Московского госуд. технического университета; 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5.; сл. тел. (499) 263-67-50; e-mail: v.a.pankratov@live.ru

Панченко Юрий Юрьевич – студ. ННГУ; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 6; сл. тел. (831) 462-33-27; e-mail: panyurij@hotmail.com

Папкова Ирина Владиславовна – доц. каф. математики и моделирования Саратовского госуд. технического университета; к.ф.-м. н.; доц.; 410054, Саратов, ул. Политехническая, 77; сл. тел. (8452) 99-87-24; e-mail: yan-tan1987@mail.ru

Патрушев Владимир Леонидович – зам. нач. отдела прочности ОАО «ОКБМ Африкантов»; к.т.н.; 603074, Н. Новгород, Бурнаковский проезд, 15; сл. тел. (831) 246-94-28; e-mail: kocay@okbm.nnov.ru

Пацко Валерий Семенович – с.н.с. отдела динамических систем Института математики и механики УрО РАН; к.ф.-м.н.; с.н.с.; 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; сл. тел. (343) 375-34-44; e-mail: patsko@imm.uran.ru

Пейсель Михаил Абрамович – н.с. НИИ ПМК ННГУ; к.т.н.; 603005, Н. Новгород, ул Ульянова,10; сл. тел. (831) 434-17-68; e-mail: v.s.metrikin@mail.ru

Пироженко Александр Владимирович – в.н.с. отдела системного анализа и проблем управления Института технической механики НАН Украины и НКА Украины; д.ф.-м.н.; с.н.с.; 49005, Украина, Днепропетровск, ул. Лешко-Попеля, 15; сл. тел. (0562) 47-24-38; e-mail: Alex.pirozhenko@mail.ru

Письменная Елена Валентиновна – с.н.с. НИИ механики МГУ; к.т.н.; 119192, Москва, Мичуринский просп., 1; сл. тел. (495) 939-26-28, e-mail: formal@imec.msu.ru

Погорелов Дмитрий Юрьевич – проф. каф. прикладной механики Брянского госуд. технического университета; д.ф.-м.н.; проф.; 241035, Брянск, бульв. 50 лет Октября, 7; сл. тел. (483) 256-86-37; e-mail: pogorelov@tu-bryansk.ru

Подалков Валерий Владимирович – проф. каф. теоретической механики и мехатроники Московского энергетического института; д.т.н.; проф.; 111250, Москва, ул. Красноказарменная, 13п, корпус «С»; сл. тел. (495) 362-73-14; e-mail: nccl@mail.ru

Полосков Игорь Егорович – зав. каф. высшей математики Пермского госуниверситета; д.ф.-м.н.; доц.; 614990, Пермь, ГСП, ул. Букирева, 15; сл. тел. (342) 239-65-60; e-mail: polosk@psu.ru

Пономаренко Валерий Павлович – зам. директора НИИ ПМК ННГУ по научной работе; д.ф.-м.н.; проф.; 603005, Н. Новгород, ул. Ульянова, 10; сл. тел. (831) 436-96-18, (831) 439-09-54; e-mail: povp@uic.nnov.ru

Понятский Валерий Мариафович – нач. сектора Конструкторского бюро приборостроения, доц. Тульского госуниверситета; к.т.н.; доц.; 300001, Тула, Щегловская засека, 59; сл. тел. (4832) 46-94-16; e-mail: kbkedr@tula.net, pwmru@rambler.ru

Поселенов Евгений Николаевич – ст. преп. каф. информатики, систем управления и телекоммуникаций Волжской госуд. академии водного транспорта; 603950, Н. Новгород, ул. Нестерова, 5а; сл. тел. (831) 419-66-99; e-mail: epos@aqua.sci-nnov.ru

Привалова Ольга Георгиевна – с.н.с. НИИ механики МГУ; к.ф.-м.н.; 119192, Москва, Мичуринский просп., 1; сл. тел. (495) 939-51-43; e-mail: privalova@imec.msu.ru

Прилепский Илья Владимирович – асп. Московского физико-технического института; 141700, Долгопрудный, Институтский пер., 9; сл. тел. (499) 250-79-29; e-mail: nurmes@mail.ru

Прокофьева Елена Юрьевна – гл. консультант Института устойчивых конструкций университета г. Эдинбурга; PhD; 42, Colinton Rd, Edinburgh, EH10 5BT, UK; сл. тел. +44 (0) 131 455 5125; e-mail: e.prokofieva@napier.ac.uk

Пустовой Николай Васильевич – ректор, зав. каф. прочности летательных аппаратов Новосибирского госуд. технического университета; д.т.н.; проф.; 630092, Новосибирск, просп. К. Маркса, 20, корп. 1; сл. тел. (383) 346-07-91; e-mail: rector@nstu.ru

Пчелинцев Михаил Васильевич – ст. преп. каф. высшей математики Снежинского физико-технического института (филиал МИФИ); 456770, Снежинск, ул. Комсомольская, 8; сл. тел. (35146) 3-77-93; e-mail: mvpchelintsev@mail.ru

Рачинская Алла Леонидовна – доц. каф. теоретической механики Одесского национального университета; к.ф.-м.н.; доц.; 65026, Украина, Одесса; ул. Дворянская, 2; сл. тел. +38 (048) 718-64-54; e-mail: rachinskaya@onu.edu.ua

Рашидов Турсунбай Рашидович – гл.н.с. Института механики и сейсмостойкости сооружений АН Республики Узбекистан; д.т.н.; проф.; академик АН РУз; 100125, Узбекистан, Ташкент, Академгородок, Дурмон йули, 31; сл. тел. (+99871) 262-78-34; e-mail: tur.rashidov@list.ru

Резников Станислав Сергеевич – доц. каф. мехатроники Санкт-Петербургского госуниверситета информационных технологий, механики и оптики; к.т.н.; 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49; сл. тел. (812) 571-26-38; e-mail: stanich@mail.ru

Родюков Федор Федорович – зав. спецлабораторией Санкт-Петербургского госуниверситета; к.ф.-м.н.; 198504, Санкт-Петербург, Ст. Петергоф, Университетский пр., 28; сл. тел. (812) 428-41-65; e-mail: frodyukov@gmail.com

Ролдугин Дмитрий Сергеевич – асп. Московского физико-технического института (НИУ); 141700, Долгопрудный, Институтский пер., 9; сл. тел. (926) 154-49-83; e-mail: rolduginds@gmail.com

Руин Андрей Александрович – инженер-конструктор отдела прочности ОАО «ОКБМ Африкантов»; к.т.н.; 603074, Н. Новгород, Бурнаковский проезд, 15; сл. тел. (831) 246-94-28; e-mail: kocay@okbm.nnov.ru

Румянцев Сергей Алексеевич – зав. каф. механики деформируемого твердого тела Уральского госуд. университета путей сообщения; д.т.н.; с.н.с.; 620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66; сл. тел. (343) 358-55-24; e-mail: SRumyantsev@math.usurt.ru

Сальникова Татьяна Владимировна – доц. каф. теоретической механики и мехатроники МГУ; к.ф.-м.н.; доц.; 119991, Москва, Ленинские горы, главное здание; сл. тел. (495) 939-36-81; e-mail: Tatiana.salnikova@gmail.com

Самсонов Виталий Александрович – гл.н.с. НИИ механики МГУ; д.ф.-м.н.; проф.; 119192, Москва, Мичуринский просп., 1; сл. тел. (495) 939-54-78; e-mail: samson@imec.msu.ru

Сапунков Яков Григорьевич – доц. Саратовского госуниверситета; к.ф.-м.н.; доц.; 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83; e-mail: molalexei@yandex.ru

Селюцкий Юрий Дмитриевич – с.н.с. НИИ механики МГУ; к.ф.-м.н.; доц.; 119192, Москва, Мичуринский просп., 1; сл. тел. (495) 939-54-78; e-mail: seliutski@imec.msu.ru

Семенов Виталий Анатольевич – проф. каф. общей физики Пермского госуниверситета; д.ф.-м.н.; доц.; 614990, Пермь, ул. Букирева, 15; сл. тел. (342) 239-66-42; e-mail: semenov@psu.ru

Сергиевский Сергей Андреевич – рук. отдела ООО «Эм-Эс-Си Софтвэр Рус»; к.т.н.; 123056, Москва, ул. Зоологическая, 26, стр. 2; сл. тел. (495) 363-06-83; e-mail: sergey.sergievskiy@mscsoftware.com

Серебряков Андрей Владимирович – доц. Энгельсского технологического института – филиала Саратовского госуд. технического университета; к.ф.-м.н., доц.; 413100, Энгельс, пл. Свободы, 17; сл. тел. (8453) 95-35-53; e-mail: bundzin@inbox.ru

Сибукаев Шамиль Мемет-Закирович – доц. Национального университета Узбекистана; к.ф.-м.н.; доц.; 100174, Ташкент, Вузгородок; сл. тел. (+99871) 246-49-30; e-mail: tur.rashidov@list.ru

Синёв Александр Владимирович – зав. лаб. Института машиноведения РАН; д.т.н; проф.; 101990, Москва, Малый Харитоньевский пер., 4; сл. тел. (916) 617-58-20; e-mail: brysin@rambler.ru

Скоркин Николай Андреевич – проф. каф. высшей математики Снежинского физико-технического института (филиал МИФИ); д.т.н.; проф.; 456770, Снежинск, ул. Комсомольская, 8; сл. тел. (35146) 3-77-93; e-mail: n.a.scorkin@rambler.ru

Слесарь Николай Олегович – асп. Санкт-Петербургского госуниверситета; 190178, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9; сл. тел. (812) 350-57-03; e-mail: nickslesar@gmail.com

Смелягин Анатолий Игоревич – зав. каф. теоретической механики Кубанского госуд. технологического университета; д.т.н.; проф.; 350072, Краснодар, ул. Московская, 2, А-327; сл. тел. (861) 251-87-05; e-mail: asmelyagin@yandex.ru

Смирнов Лев Васильевич – зав. лаб. НИИ механики ННГУ; д.т.н.; проф.; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 6; сл. тел. (831) 465-67-93; e-mail: labdin@mech.unn.ru

Смирнова Марина Леонидовна – асп. каф. теоретической механики ННГУ; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2; сл. тел. (831) 265-70-52; e-mail: smml2@yandex.ru

Смит Шон Роберт – директор Института устойчивых конструкций университета г. Эдинбурга; PhD; 42, Colinton Rd, Edinburgh, EH10 5BT, UK; сл. тел. +44 (0) 131 455 5111; e-mail: se.smith@napier.ac.uk

Соловьев Сергей Александрович – нач. бюро отдела прочности ОАО «ОКБМ Африкантов»; к.т.н.; 603074, Н. Новгород, Бурнаковский проезд, 15; сл. тел. (831) 246-94-28; e-mail: kocay@okbm.nnov.ru

Степанова Мария Ильинична – инженер-конструктор Госуд. космического научно-производственного центра; 121087, Москва, Новозаводская ул., 18; сл. тел. (499) 749-52-39; e-mail: s_masyanya@mail.ru

Стребуляев Сергей Николаевич – доц. каф. прикладной математики ННГУ; к.т.н.; доц.; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2; сл.тел. 8-910-392-53-97; e-mail: stsn@vmk.unn.ru

Строков Константин Владимирович – инженер-программист отдела систем УВД фирмы «НИТА»; 196210, Санкт-Петербург, ул. Взлетная, 15А; сл. тел. (812) 704-18-72; e-mail:ks@nita.ru

Субботина Нина Николаевна – зав. сектором отдела динамических систем Института математики и механики Уральского отделения РАН; д.ф.-м.н.; 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковлевской, 16; сл. тел. (343) 375-34-56; e-mail: subb@uran.ru

Сулимов Валерий Дмитриевич – ст. преп. каф. теоретической механики Московского госуд. технического университета; 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5; сл. тел. (499) 263-64-96; e-mail: spm@bmstu.ru

Суханов Александр Алексеевич – доц. Санкт-Петербургского госуд. политехнического университета; к.т.н.; доц.; 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29; сл.тел. (812) 552-78-01; e-mail: Alexeevich@post.ru

Тарасов Владимир Леонидович – доц. каф. численного моделирования физико-механических процессов ННГУ; к.т.н.; доц.; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 6; (831) сл. тел. (831) 465-66-92; e-mail: vl-tarasov@yandex.ru

Тарасов Дмитрий Юрьевич – асс. каф. механики деформируемого твердого тела Уральского госуниверситета путей сообщения; 620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66; сл. тел. (343) 358-55-50; e-mail: dmt1@rambler.ru

Темнов Александр Николаевич – доц. каф. СМ-1 Московского госуд. технического университета; к.ф.-м.н.; доц.; 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5; сл. тел. (499) 749-52-39; e-mail: s_masyanya@mail.ru

Тихонов Алексей Александрович – проф. каф. теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского госуниверситета; д.ф.-м.н.; проф.; 198504, С.-Петербург, Ст. Петергоф, Университетский пр., 28; сл. тел. (812) 428-41-65; e-mail: aatikhonov@rambler.ru

Ткачев Степан Сергеевич – асп. Московского физико-технического института (НИУ); 141700, Долгопрудный, Институтский пер., 9; сл. тел. (926) 239-74-72; e-mail: stevens_l@mail.ru

Токманцев Тимофей Борисович – н.с. отдела динамических систем Института математики и механики Уральского отделения РАН; 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковлевской, 16; сл.тел. (343) 375-34-89, e-mail: tokmantsev@imm.uran.ru

Трофимов Сергей Павлович – студ. Московского физико-технического института (НИУ); 141700, Долгопрудный, Институтский пер., 9; сл. тел. (919) 770-81-54; e-mail: sertrofimov@yandex.ru

Туманин Андрей Владимирович – асп. каф. теории упругости и пластичности ННГУ; 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корп.2; сл. тел. (831) 462-33-29; e-mail: atumanin@gmail.com

Урман Юрий Михайлович – зав. каф. общей физики Нижегородского госуд. педагогического университета; д.ф.-м.н.; проф.; 603950, Н. Новгород, ул. Ульянова, 1; сл. тел. (831) 439-37-30; e-mail: urman37@mail.ru

Федоров Александр Евгеньевич – асс. каф. теоретической механики ННГУ; к.ф.м.н; сл. тел. (812) 462-33-27; e-mail: tm@mm.unn.ru

Федотов Андрей Анатольевич – вед. математик отдела динамических систем Института математики и механики Уральского отделения РАН; к.ф.-м.н.; 620990, Россия, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; сл. тел. (343) 375-34-44; e-mail: andreyfedotov@rambler.ru

Фигурина Татьяна Юрьевна – с.н.с. Института проблем механики РАН; к.ф.-м.н.; 119526, Москва, пр. Вернадского, 101, корп. 1; сл. тел. (495) 434-27-01; e-mail: t_figurina@mail.ru

Филимонов Михаил Юрьевич – в.н.с. отдела прикладных задач Института математики и механики Уральского отделения РАН; д.ф.-м.н.; с.н.с.; 620219, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской,16; сл. тел. (343) 375-34-80; e-mail: fmy@imm.uran.ru

Формальский Александр Моисеевич – гл. н.с. НИИ механики МГУ; д.ф.-м.н.; проф.; 119192, Москва, Мичуринский просп., 1; сл. тел. (495) 939-26-28, e-mail: formal@imec.msu.ru

Хаджиева Леля Азретовна – проф. каф. математического и компьютерного моделирования Казахского национального университета; д.ф.-м.н.; проф.; Казахстан, Алматы, ул. Масанчи, 39/47; сл. тел. (327) 292-64-61; e-mail: almatbek@list.ru

Хейло Сергей Валерьевич – доц. Московского госуд. текстильного университета; к.т.н.; 119071, Москва, ул. Малая Калужская, 1; сл. тел. (495) 955-37-87; e-mail: sheilo@yandex.ru

Хендриксе Хайо – асп. Делфтского технологического университета; 2628 CN, Делфт, Нидерланды; сл. тел. 0031 152784671; e-mail: h.hendrikse@tudelft.nl

Чахалян Айастан Сейрановна – асс. каф. прикладной механики Гюмрийского филиала Госуд. инженерного университета Армении; к.т.н.; 3103, Армения, Гюмри, ул. М. Мкртчяна, 2; сл. тел. +374312-43528; e-mail: Chaxalyan84@list.ru

Чащухин Владислав Григорьевич – н.с. Института проблем механики РАН; к.ф.-м.н.; 119526, Москва, просп. Вернадского, 101; e-mail: ketlk@pisem.net

Черкасов Олег Юрьевич – с.н.с. МГУ; к.ф.-м.н.; 119991, Москва, Ленинские горы, 1; сл. тел. (495) 939-28-00; e-mail: oyuche@yandex.ru

Чернышев Вадим Викторович – проф. каф. теоретической механики Волгоградского госуд. технического университета; д.т.н.; доц.; 400131, Волгоград, пр. Ленина, 28; сл. тел. (8442) 24-80-99; e-mail: dtm@vstu.ru

Чернышов Андрей Владимирович – ст. преп. каф. информатики, систем управления и телекоммуникаций Волжской госуд. академии водного транспорта; к.т.н.; 603950, Н. Новгород, ул. Нестерова, 5а; сл. тел. (831) 419-66-99; e-mail: A.Chernyshov@energia.nnov.ru

Чиркова Маргарита Макаровна – проф. каф. информатики, систем управления и телекоммуникаций Волжской госуд. академии водного транспорта; д.т.н.; проф.; 603950, Н. Новгород, ул. Нестерова, 5а; сл. тел. (831) 419-66-99; e-mail: chirkova@aqua.sci-nnov.ru

Шамолин Максим Владимирович – в.н.с. НИИ механики МГУ; д.ф.-м.н.; 119899, Москва, Мичуринский пр., 1; сл. тел. (495) 939-51-43; e-mail: shamolin@imec.msu.ru

Шатина Альбина Викторовна – проф. каф. высшей математики Московского госуд. института радиотехники, электроники и автоматики; д.ф.-м.н.; доц.; 117454, Москва, пр-т Вернадского, 78; сл. тел. (495) 433-03-55; e-mail: shatina_av@mail.ru

Шатина Любовь Сергеевна – асп. каф. теоретической механики и мехатроники МГУ; 119992, Москва, Ленинские горы; сл. тел. (495) 939-36-81; e-mail: l_shatina@mail.ru

Шепелев Георгий Александрович – асс. каф. информационной безопасности и теории управления Ульяновского госуниверситета; 432000, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42; сл. тел. (8422) 32-20-22; e-mail: geo.shepelev@gmail.com

Шерстнев Евгений Викторович – асп. каф. высшей математики Московского госуд. института радиотехники, электроники и автоматики; 117454, Москва, просп. Вернадского, 78; сл. тел. (495) 433-03-55; e-mail: sherevv@gmail.com

Шильников Леонид Павлович – зав. отделом НИИ ПМК ННГУ; к.ф.-м.н.; проф.; 603005, Н. Новгород, ул. Ульянова, 10; сл. тел. (831) 439-04-11; e-mail: diffequ@unn.ac.ru

Шихов Андрей Михайлович – асп. каф. механики деформируемого твердого тела Уральского госуниверситета путей сообщения; 620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66; сл. тел. (343) 358-55-90; e-mail: holerik666@mail.ru

Шохин Александр Евгеньевич – н.с. Института машиноведения РАН; 101990, Москва, Малый Харитоньевский пер., 4; сл. тел. (916) 617-58-20; e-mail: brysin@rambler.ru

Щеглов Георгий Александрович – доц. каф. аэрокосмических систем Московского госуд. технического университета; к.ф.-м.н.; доц.; 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5; сл. тел. (499) 263-63-10; e-mail: georg@energomen.ru

Щербаков Валерий Иванович – зав. каф. Военно-космической академии; к.т.н.; доц.; 197082, Санкт-Петербург, ул. Ждановская, 13; сл. тел. (812) 347-95-89; e-mail: vka114@mail.ru

Яковлева Татьяна Владимировна – асп. каф. математики и моделирования Саратовского госуд. технического университета; 410054, Саратов, ул. Политехническая, 77; сл. тел. (8452) 99-87-24; e-mail: yan-tan1987@mail.ru

Яшагин Николай Сергеевич – асп. каф. прикладной математики и информатики Самарского госуд. технического университета; 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244; сл. тел. (846) 337-04-43; e-mail: nik-yashagin@yandex.ru

Мезо-, нано-, биомеханика и механика природных процессов

Абрамян Андрей Карэнович – гл.н.с. лаб. гидроупругости Института проблем машиноведения РАН; д.т.н.; с.н.с.; 199178, Санкт-Петербург, ВО, Большой просп., 61; сл. тел. (812) 321-24-70; e-mail: andabr55@gmail.com

Андреев Александр Витальевич – инженер лаб. компьютерного конструирования материалов Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН; 634021, Томск, пр. Академический, 2/4; сл. тел. (3822) 28-69-71; e-mail: alexardas@mail.ru

Аптуков Валерий Нагимович – зав. каф. математического анализа Пермского госуниверситета; д.т.н.; проф.; 614990, Пермь, ул. Букирева, 15; сл. тел. (342) 23-93-75; e-mail: aptukov@psu.ru

Аргунова Кира Константиновна – с.н.с. лаб. техногенных газовых гидратов Института проблем нефти и газа Сибирского отделения РАН; к.ф.-м.н.; 677980, Якутск, ул. Октябрьская, 1; сл. тел. (4112) 39-06-29; e-mail: akk@ipng.ysn.ru

Астафуров Сергей Владимирович – н.с. лаб. компьютерного конструирования материалов Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН; к.ф.-м.н.; 634021, Томск, пр. Академический, 2/4; сл. тел. (3822) 28-69-71; e-mail: astaf@ispms.tsc.ru

Аэро Эрон Люттович – зав. лаб. микромеханики материалов Института проблем машиноведения РАН; д.ф.-м.н.; с.н.с.; 199178, Санкт-Петербург, ВО, Большой просп., 61; сл. тел. (812) 321-47-64, e-mail: 16aero@mail.ru

Баймухаметов Абай Абышевич – зав. лаб. механики горных пород Института механики и машиноведения им. ак. У.А. Джолдасбекова; д.ф.-м.н.; проф.; 050010, Казахстан, Алматы, ул. Курмангазы, 29; сл. тел. (727) 272-34-26; e-mail: abayab@mail.ru

Баймухаметов Мурат Абышевич – с.н.с. лаборатории механики горных пород Института механики и машиноведения; к.ф.-м.н.; доц.; 050010, Казахстан, Алматы, ул. Курмангазы, 29; сл. тел. (727) 272-34-26; e-mail: b_murat55@mail.ru

Балабаев Николай Кириллович – зав. лаб. молекулярной динамики Института математических проблем биологии РАН; к.ф.-м.н., с.н.с.; 42290, Московская обл., Пущино, ул. Институтская, 4; сл. тел.: (4967) 318517; e-mail: balabaev@psn.ru

Батищев Владимир Андреевич – проф. каф. теоретической и компьютерной гидродинамики Южного федерального университета; д.ф.-м.н.; проф.; 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а; сл. тел. (863) 297-51-09; e-mail: batish@math.rsu.ru

Баутин Петр Сергеевич – асп. каф. прикладной математики Уральского госуд. университета путей сообщения; 620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66; сл. тел. (343) 358-55-50; e-mail: ek.d.belova@gmail.com

Баутин Сергей Петрович – зав. каф. прикладной математики Уральского госуд. университета путей сообщения; д.ф.-м.н.; проф.; 620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66; сл. тел. (343) 358-55-50; e-mail: SBautin@math.usurt.ru

Белов Николай Николаевич – проф. Томского госуд. архитектурно-строительного университета; д.ф.-м.н.; проф.; 634003, Томск, пл. Соляная, 2; сл. тел. (3822) 65-03-17; e-mail: n.n.belov@mail.ru

Белова Екатерина Димитриевна – асп. Снежинского физико-технического института (филиал МИФИ); 456776, Челябинская обл., Снежинск, ул. Комсомольская, 8, а/я 911; сл. тел. (922) 212-80-31; e-mail: ek.d.belova@gmail.com

Беринский Игорь Ефимович – зав. отделом научно-технической информации Института проблем машиноведения РАН; к.ф.-м.н.; проф.; 199178, Санкт-Петербург, ВО, Большой просп., 61; сл. тел. (812) 321-47-87; e-mail: iberinsk@gmail.com

Бершицкий Сергей Юрьевич – н.с. лаб. биологической подвижности Института иммунологии и физиологии Уральского отделения РАН; 620041, Екатеринбург, ул. Первомайская, 91; сл. тел. (912) 650-66-11; e-mail: serg.bersh@gmail.com

Бессонов Николай Михайлович – зав. сектором вычислительной механики Института проблем машиноведения РАН; д.ф.-м.н.; 199178, Санкт-Петербург, ВО, Большой просп., 61; сл. тел. (812) 321-47-64; e-mail: nickbessonov@yahoo.com

Богомольный Валентин Матвеевич – проф. каф. бытовой техники Российского госуд. университета туризма и сервиса; к.т.н.; с.н.с.; 141220, Московская область, ст. Тарасовская Московской железной дороги, п/о Черкизово-1 Пушкинского района, ул. Главная, 99; сл. тел. (499) 367-79-95; e-mail: yurakudrov@yandex.ru

Богоявленская Варвара Анатольевна – инженер-исследователь отдела связанных проблем механики деформируемых твердых тел Института механики сплошных сред Уральского отделения РАН; 614013, Пермь, ул. ак. Королева, 1; сл. тел. (342) 237-83-30; e-mail: varvara@icmm.ru

Бойко Олег Владимирович – м.н.с. Института прикладной механики РАН; 119991, Москва, Ленинский просп., 32А; сл. тел. (499) 257-43-42; e-mail: boikoo87@mail.ru

Болеста Алексей Владимирович – с.н.с. Иститута теоретической и прикладной механики Сибирского отделения РАН; к.ф.-м.н.; 603090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1; сл. тел. (383) 330-38-04; e-mail: bolesta@itam.nsc.ru

Бондарев Эдуард Антонович – гл.н.с. лаб. техногенных газовых гидратов Института проблем нефти и газа Сибирского отделения РАН; д.т.н.; проф.; 677980, Якутск, ул. Октябрьская, 1; сл. тел. (4112) 33-63-57; e-mail: bondarev@ipng.ysn.ru

Бондарь Мария Петровна – гл.н.с. лаб. динамических воздействий Института гидродинамики Сибирского отделения РАН; д.ф.-м.н.; с.н.с.; 630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 15; сл. тел. (383) 333-23-69; e-mail: bond@hydro.nsc.ru

Борзых Владимир Эрнестович – зав. каф. автоматизации и вычислительной техники Тюменского госуд. нефтегазового университета; д.ф.-м.н.; проф.; 625000, Тюмень, ул. 50 лет Октября, 38; сл. тел. (3452) 28-06-78; e-mail: borzykh@mail.ru

Бородин Станислав Леонидович – м.н.с. Тюменского филиала Института теоретической и прикладной механики Сибирского отделения РАН; 625026, Тюмень, ул. Таймырская, 74; сл. тел. (3452) 229320; e-mail: timms@tmn.ru

Бычков Андрей Александрович – доц. Южного федерального университета; к.ф.-м.н.; доц.; 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 10; сл. тел. (863) 243-48-11; e-mail: az710@yandex.ru

Волков-Богородский Дмитрий Борисович – с.н.с. лаб. неклассических моделей механики композиционных материалов и конструкций Института прикладной механики РАН; к.ф.-м.н.; 119991, Москва, Ленинский просп., 32А; сл. тел. (945) 624-96-22; e-mail: v-b1957@yandex.ru

Ганимедов Владимир Леонидович – с.н.с. Института теоретической и прикладной механики Сибирского отделения РАН; к.ф.-м.н.; доц.; 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1; сл. тел. (383) 330-85-28; e-mail: ganim@itam.nsc.ru

Геодакян Наира Эдуардовна – соискатель Института геофизики и инженерной сейсмологии НАН Республики Армения; 3115, Гюмри, ул. В. Саргсяна, 5. сл. тел. (+374 312) 3-12-61, (+374 93) 51-31-23; e-mail: jon_iges@mail.ru

Геодакян Эдуард Григорьевич – зав. отделом сейсмологии Института геофизики и инженерной сейсмологии НАН Республики Армения; к.ф.-м.н.; 3115, Гюмри, ул. В. Саргсяна, 5; сл. тел. (+374 312) 3-12-61, (+374 93) 51-31-23; e-mail: jon_iges@mail.ru

Глазовский Андрей Федорович – в.н.с. Института географии РАН; к.г.н.; с.н.с.; 119017, Москва, Старомонетный пер., 29; сл. тел. (499)1259011; e-mail: glazovsky@gmail.com

Гниденко Антон Александрович – с.н.с. Института материаловедения Дальневосточного отделения РАН; к.ф.-м.н.; 680042, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 153; сл. тел. (4212) 22-69-56; e-mail: vzavod@mail.ru

Головин Николай Николаевич – с.н.с. Московского института теплотехники; к.т.н.; 127273, Москва, Березовая аллея, 10; сл. тел. (499) 263-63-26; e-mail: fn2@bmstu.ru

Голядкина Анастасия Александровна – нач. отдела биомеханики Образовательно-научного института наноструктур и биосистем Саратовского госуниверситета; 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83; сл. тел. (845-2) 21-07-55; e-mail: gramakovaaa@info.sgu.ru

Гончаров Михаил Адрианович – зав. лаб. геологического факультета МГУ; д.г.-м.н.; 119991, Москва, Ленинские горы; сл. тел. (495) 939-19-12; e-mail: m.a.gonch@mail.ru

Городцов Валентин Александрович – в.н.с. Института проблем механики РАН; д.ф.-м.н.; проф.; 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1; сл. тел. (495) 434-41-56; e-mail: gorod@ipmnet.ru

Гуляев Юрий Петрович - доц. каф. математической теории упругости и биомеханики Саратовского госуниверситета; к.ф.-м.н.; доц.; 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83; сл. тел. (8452) 21-07-54; e-mail: gulvis@yandex.ru

Гусарова Елена Борисовна – н.с. лаб. физики и механики полимеров Института химической физики РАН; 119991, Москва, ул. Косыгина, 4; сл. тел.: (495) 939-71-39; e-mail: gusar@polymer.chph.ras.ru.

Джалалова Маргарита Васильевна – с.н.с. лаб. аэромеханики и волновой динамики НИИ механики МГУ; к.ф.-м.н.; 119192, Москва, Мичуринский просп., 1; сл. тел. (495) 939-52-82; e-mail: margarita-vd@mail.ru

Доль Александр Викторович – инженер отдела биомеханики Образовательно-научного института наноструктур и биосистем Саратовского госуниверситета; 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83; сл. тел. (8452) 21-07-54; e-mail: dzero@pisem.net

Егоров Анатолий Кузьмич – гл.н.с. лаб. механики горных пород Института механики и машиноведения; д.ф.-м.н.; проф.; 050010, Казахстан, Алматы, ул. Курмангазы, 29; сл. тел. (727) 272-34-26; e-mail: b_murat55@mail.ru

Ельцов Игорь Николаевич – зам. директора Института нефтегазовой геологии и геофизики Сибирского отделения РАН; д.т.н.; 630090, Новосибирск, просп. Коптюга, 3; сл. тел. (383) 333-34-32; e-mail: EltsovIN@ipgg.nsc.ru

Епифанов Виктор Павлович – с.н.с. Института проблем механики РАН; к.ф.-м.н.; с.н.с.; 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1; сл. тел. (495) 433-62-57; e-mail: evp@ipmnet.ru

Ермошкин Алексей Валерьевич – м.н.с. отдела 230 Института прикладной физики РАН; 603950, Н. Новгород, ул. Ульянова, 46; сл. тел. (831) 416-47-58; e-mail: al-ermoshkin@yandex.ru

Ерошин Владимир Андреевич – в.н.с. лаб. нестационарной гидродинамики НИИ механики МГУ; д.ф.-м.н.; 119192, Москва, Мичуринский просп., 1; сл. тел. (495) 939-52-82; e-mail: margarita-vd@mail.ru

Заводинский Виктор Григорьевич – директор Института материаловедения Дальневосточного отделения РАН; д.ф.-м.н.; проф.; 680042, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 153; сл. тел. (4212) 22-69-56; e-mail: vzavod@mail.ru

Замыслов Владимир Евгеньевич – доц. каф. прикладной математики Уральского госуниверситета путей сообщения; к.ф.-м.н.; доц.; 620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66; сл. тел. (343) 358-55-50; e-mail: VZamislov@math.usurt.ru

Захаров Павел Петрович – м.н.с. Всероссийского НИИ автоматики; 127030, Москва, ул. Сущевская, 22; сл. тел. (495) 939-37-54; e-mail: jaquecostou@mail.ru

Зеленина Анастасия Александровна – докторант факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета; к.ф.-м.н.; доц.; 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а; сл. тел. (863) 297-51-14; e-mail: a.zelenina@gmail.com

Иванов Владимир Иосифович – доц. каф высшей математики Российского госуниверситета нефти и газа; к.ф.-м.н.; доц.; 119991, Москва, Ленинский проспект, 65; сл. тел. (499) 233-93-04; e-mail: v.i.ivanov@mtu-net.ru

Иванов Дмитрий Валерьевич – нач. отдела компьютерного инжиниринга Образовательно-научного института наноструктур и биосистем Саратовского госуниверситета; к.ф.-м.н.; 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83; сл. тел. (8452) 21-07-54; e-mail: ivanovdv@info.sgu.ru

Иванов Михаил Игоревич – м.н.с. лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики РАН; к.ф.-м.н.; 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, стр.1; сл. тел. (495) 434-32-83; e-mail: m-i-ivanov@mail.ru

Иомдина Елена Наумовна – гл.н.с. Московского НИИ глазных болезней; д.б.н.; 105062, Москва, Садовая-Черногрязская ул., 14/19; сл. тел. (495) 625-32-56; e-mail: iomdina@mail.ru

Карев Владимир Иосифович – зам. директора Института проблем механики РАН; д.т.н., 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1; сл. тел. (495) 434-35-56, e-mail: wikarev@ipmnet.ru

Карпов Евгений Викторович – с.н.с. лаб. механики композитов Института гидродинамики Сибирского отделения РАН; к.ф.-м.н.; 630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 15; сл. тел. (383) 333-20-51; e-mail: evkarpov@mail.ru

Качалин Константин Витальевич – асп. Института механики сплошных сред Уральского отделения РАН; 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1; сл. тел. (342) 237-83-17; e-mail: kovrov@icmm.ru

Кикоть Ирина Павловна – асп. лаб. физики и механики полимеров Института химической физики РАН; 119991, Москва, ул. Косыгина, 4; сл. тел. (495) 939-71-39; e-mail: irakikotx@gmail.com

Ким Александр Сергеевич – зав. лаб. математического моделирования тектоники земной коры ДТОО «Институт ионосферы» АО «Национальный центр космических исследований и технологий» Республики Казахстан; д.ф.-м.н.; 050010, Казахстан, Алматы, ул. Шевченко, 15; сл. тел. (727) 385-87-61; e-mail: kim.as@mail.ru

Кириллова Ирина Васильевна – директор Образовательно-научного института наноструктур и биосистем Саратовского госуниверситета; к.ф.-м.н.; доц.; 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83; сл. тел. (8452) 51-15-27; e-mail: nano-bio@sgu.ru

Киселев Алексей Борисович – проф. механико-математического факультета МГУ; д.ф.-м.н.; проф.; 119992, Москва, Ленинские горы, 1, главное здание МГУ; сл. тел. (495) 939-37-54; e-mail: akis2006@yandex.ru

Киселева Ольга Александровна – рук. отдела глаукомы Московского НИИ глазных болезней; д.м.н.; 105062, Москва, Садовая-Черногрязская ул., 14/19; сл. тел. (495) 608-40-65; e-mail: glaucoma@igb.ru

Клочков Борис Николаевич – с.н.с. отдела радиофизических методов в медицине Института прикладной физики РАН; д.ф.-м.н.; с.н.с.; 603950, г. Н. Новгород, ул. Ульянова, 46; сл. тел. (831) 416-48-19; e-mail: klochkov@appl.sci-nnov.ru

Ковалев Валерий Леонидович – проф. механико-математического факультета МГУ; д.ф.-м.н.; проф.; 119992, Москва, Ленинские горы; сл. тел. (495) 939-37-54; e-mail: valerykovalev@yandex.ru

Коваленко Юрий Федорович – зав. лаб. геомеханики Института проблем механики РАН; к.ф.-м.н.; 119526. Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1; сл. тел. (495) 434-41-60; e-mail: perfolinkgeo@yandex.ru;

Ковров Владимир Николаевич – зав. лаб. Института механики сплошных сред Уральского отделения РАН; к.т.н.; с.н.с.; 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1; сл. тел. (342) 237-83-17; e-mail: kovrov@icmm.ru

Кононенко Вадим Леонидович – в.н.с. лаб. акустической микроскопии Института биохимической физики РАН; д.ф.-м.н.; с.н.с.; 119334, Москва, ул. Косыгина, 4; сл. тел. (499) 939-74-92; e-mail: konon@sky.chph.ras.ru

Корнев Юрий Витальевич – с.н.с. Института прикладной механики РАН; к.т.н.; 119991, Москва, Ленинский просп., 32А; сл. тел. (499) 257-43-42; e-mail: yurikornev@mail.ru

Крупнов Александр Александрович – с.н.с. Института механики МГУ; к.ф.-м.н.; 119992, Москва, Мичуринский просп., 1; сл. тел. (495) 939-38-66; e-mail: kroupnov@reline.ru.ru

Крутова Ирина Юрьевна – асп. каф. прикладной математики Уральского госуниверситета путей сообщения; 620034, Екатеринбург, ул. Колмогорова, 66; сл. тел. (343) 358-55-50; e-mail: Irma-levv@mail.ru

Кручинин Павел Анатольевич – доц. каф. прикладной механики и управления МГУ; в.н.с. лаб. психологических и нейробиологических проблем адаптации в образовании Московского городского психолого-педагогического университета; к.ф.-м.н.; доц.; 119992, Москва, Ленинские горы, МГУ; сл. тел. (495) 939-33-83, (499) 259-79-81; e-mail: pkruch60@yandex.ru

Кубасова Наталия Алексеевна – в.н.с. лаб. биомеханики НИИ механики МГУ; 119192, Москва, Мичуринский просп, 1; сл. тел. (495) 939-12-52; e-mail: tsat@imec.msu.ru

Кувыркин Георгий Николаевич – зав. каф. прикладной математики Московского госуд. технического университета; д.т.н.; проф.; 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, 5; сл. тел. (499) 263-63-26; e-mail: fn2@bmstu.ru

Кулик Мария Александровна – м.н.с. Института материаловедения Дальневосточного отделения РАН; 680042, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 153; сл. тел. (4212) 22-69-56; e-mail: vzavod@mail.ru

Курбацкая Людмила Ивановна – с.н.с. Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН; к.ф.-м.н.; 630090, Новосибирск, просп. Лаврентьева, 6; сл. тел. (383) 330-61-52; e-mail: L.Kurbatskaya@ommgp.sscc.ru

Курбацкий Альберт Феликсович – гл.н.с. Института теоретической и прикладной механики Сибирского отделения РАН; д.ф.-м.н.; проф.; 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1; сл. тел. (383) 330-42-78; e-mail: kurbat@itam.nsc.ru

Левина Галина Владимировна – с.н.с. лаб. физической гидродинамики Института механики сплошных сред Уральского отделения РАН, с.н.с. отдела космогеофизики Института космических исследований РАН; к.ф.-м.н.; с.н.с.; 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1; 117997, Москва, ул. Профсоюзная, 84/32; сл. тел. (342) 237-83-94; e-mail: levina@icmm.ru

Леонтьев Виктор Леонтьевич – проф. Ульяновского госуниверситета; д.ф.-м.н.; проф.; 432000, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42; сл. тел. (8422) 32-00-15; e-mail: alex_lion@rambler.ru

Лисовенко Дмитрий Сергеевич – м.н.с. Института проблем механики РАН; к.ф.-м.н.; 119526, Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1; сл. тел. (495) 434-35-27; e-mail: lisovenk@ipmnet.ru

Логвенков Сергей Алексеевич – с.н.с. НИИ механики МГУ, доц. каф. высшей математики Национального исследовательского университета – Высшей школы экономики; к.ф.-м.н.; 119192, Москва, Мичуринский пр., 1, 101000, Москва, ул. Мясницкая, 20; сл. тел. (495) 939-25-55; e-mail: logv@bk.ru

Ломакин Никита Дмитриевич – магистр каф. теоретической и компьютерной гидродинамики Южного федерального университета; 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а; сл. тел. (863) 297-51-09; e-mail: lomand@ro.ru

Любимов Григорий Александрович – гл.н.с. НИИ механики МГУ; д.ф.-м.н.; проф.; 119192, Москва, Мичуринский просп., 1; сл. тел. (495) 939-25-55; e-mail: stein@imec.msu.ru

Мазо Михаил Абрамович – с.н.с. лаб. физики и механики полимеров Института химической физики РАН; к.ф.-м.н., с.н.с.; 119991, Москва, ул. Косыгина, 4; сл. тел. (495) 939-71-39 e-mail: mazo@polymer.chph.ras.ru

Маневич Леонид Исакович – зав. лаб. физики и механики полимеров Института химической физики РАН; д.т.н.; 119991, Москва, ул. Косыгина, 4; сл. тел. (495) 939-71-39; e-mail: manevitchleonid3@gmail.com

Маслов Леонид Борисович – доц. каф. теоретической и прикладной механики Ивановского госуд. энергетического университета; к.т.н.; доц.; 153003, Иваново, ул. Рабфаковская, 34; сл. тел. (4932) 26-97-12; e-mail: maslov@tipm.ispu.ru

Михайлов Иван Сергеевич – асп. Ульяновского госуниверситета; 432000, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42; сл. тел. (8422) 32-00-15; e-mail: tavork@fax.ru

Михасев Геннадий Иванович – зав. каф. био- и наномеханики Белорусского госуниверситета; д.ф.-м.н.; проф.; 220030, Беларусь, Минск, пр. Независимости, 4; сл. тел. (017) 209-53-45; e-mail: mikhasev@bsu.by

Моисеева Ирина Никитична – с.н.с. НИИ механики МГУ; к.ф.-м.н.; 119192, Москва, Мичуринский просп., 1; сл. тел. (495) 939-25-55; e-mail: moiseeva@imec.msu.ru

Монтгомери Майкл Т. – проф. тропической метеорологии факультета метеорологии, Naval Postgraduate School, с.н.с. Hurricane Research Division, NOAA; PhD; проф.; сл. тел. +1 (831) 656-22-96; e-mail: mtmontgo@nps.edu

Мусакаев Наиль Габсалямович – зав. лаб. Тюменского филиала Института теоретической и прикладной механики Сибирского отделения РАН; к.ф.-м.н.; доц.; 625026, Тюмень, ул. Таймырская, 74; сл. тел. (3452) 22-93-20; e-mail: timms@tmn.ru

Мучная Мария Ивановна – с.н.с. Института теоретической и прикладной механики Сибирского отделения РАН; к.ф.-м.н.; 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1; сл. тел. (383) 330-85-28; e-mail: mim@itam.nsc.ru

Назаренко Людмила Александровна – асп. отдела глаукомы Московского НИИ глазных болезней; 105062, Москва, Садовая-Черногрязская ул., 14/19; сл. тел. (495) 608-40-65; e-mail: glaucoma@igb.ru

Назаров Леонид Анатольевич – гл.н.с. Института горного дела Сибирского отделения РАН; д.ф.-м.н.; с.н.с.; 630091, Новосибирск, Красный просп., 54; сл. тел. (383) 217-05-28; e-mail: naz@misd.nsc.ru

Назарова Лариса Алексеевна – гл.н.с. Института горного дела Сибирского отделения РАН; д.ф.-м.н.; с.н.с.; 630091, Новосибирск, Красный просп., 54; сл. тел. (383) 217-24-46; e-mail: larisa@misd.nsc.ru

Нехаева Ольга Валентиновна – м.н.с. механико-математического факультета МГУ; к.ф.-м.н.; 119992, Москва, Ленинские горы, 1, главное здание МГУ; сл. тел. (495) 939-37-54; e-mail: onekhaeva@mail.ru

Обухов Александр Геннадьевич – проф. каф. высшей математики Тюменского госуд. нефтегазового университета; д.ф.-м.н.; доц.; 625000, Тюмень, ул. Володарского, 38; сл. тел. (3452) 20-10-27; e-mail: aobukhov@tsogu.ru

Останин Анатолий Иванович – ст. инженер Института механики сплошных сред Уральского отделения РАН; к.т.н.; доц.; 614013, Пермь, ул. Академика Королева, 1; сл. тел. (342) 237-83-17; e-mail: kovrov@icmm.ru

Пантелеев Иван Алексеевич – м.н.с. лаб. физических основ прочности Института механики сплошных сред Уральского отделения РАН; к.ф.-м.н.; 614013, Пермь, ул. акад. Королева, 1; сл. тел. (342) 237-83-12; e-mail: pia@icmm.ru

Пархоменко Валерий Павлович – зав. сектором моделирования климатических и биосферных процессов Вычислительного центра РАН; к.ф.-м.н.; доц.; 119991, Москва, ул. Вавилова, 40; сл. тел. (495) 930-51-46; e-mail: Vparhom@yandex.ru

Перевезенцев Владимир Николаевич – директор Нижегородского филиала Института машиноведения РАН; д.ф.-м.н.; проф.; 603024, Н. Новгород, ул. Белинского, 85; сл. тел. (831) 432-23-40; e-mail: pevn@uic.nnov.ru

Перельмутер Михаил Натанович – с.н.с. лаб. механики прочности и разрушения материалов и конструкций Института проблем механики РАН; к.т.н.; с.н.с.; 119526, Москва, просп. Вернадского, 101-1; сл. тел. (495) 433-62-57; e-mail: perelm@ipmnet.ru

Погосбекян Михаил Юрьевич – с.н.с. Института механики МГУ; к.ф.-м.н.; 119992, Москва, Мичуринский просп. 1; сл. тел. (495) 939-38-66; e-mail: kroupnov@reline.ru.ru

Полуэктова Татьяна Викторовна – асс. Сибирского госуд. медицинского университета; 634050, Томск, Московский тракт, 2; сл. тел. (3822) 42-09-51; e-mail: n.n.belov@mail.ru

Притыкин Дмитрий Аркадьевич – доц. каф. теоретической механики Московского физико-технического института; к.ф.-м.н.; 141700, Московская обл., Долгопрудный, Институтский пер., 9; сл. тел. (495) 408-78-66; e-mail: dpritykin@rambler.ru

Прокопенко Алексей Сергеевич – студ. МГУ; 119991, Москва, Ленинские горы; e-mail: guiper@mail.ru

Пухлий Владимир Александрович – проф. Севастопольского национального университета ядерной энергии и промышленности; д.т.н.; проф.; 99015, Украина, Севастополь-15, ул. Курчатова, 7; сл. тел. (0692) 71-01-80; e-mail: pu1611@rambler.ru

Рожин Игорь Иванович – с.н.с. лаб. техногенных газовых гидратов Института проблем нефти и газа Сибирского отделения РАН; к.ф.-м.н.; доц.; 677980, Якутск, ул. Октябрьская, 1; сл. тел. (4112) 39-06-32; e-mail: i_rozhin@mail.ru

Роман Никита Витальевич – асп. Томского госуниверситета; 634050, Томск, пр. Ленина, 36; сл. тел. (382) 228-69-75; romannv@sibmail.com

Савин Александр Васильевич – в.н.с. лаб. физики и механики полимеров Института химической физики РАН; д.ф.-м.н.; 119991, Москва, ул. Косыгина, 4; сл. тел. (495) 939-72-35; e-mail: irakikotx@gmail.com

Садовский Алексей Сергеевич – лаб.-исследователь Института теоретической и прикладной механики Сибирского отделения РАН; 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1; сл. тел. (383) 330-85-28; e-mail: as_s6@mail.ru

Сарафанов Георгий Федорович – зав. лаб. Нижегородского филиала Института машиноведения РАН; д.ф.-м.н.; 603024, Н. Новгород, ул. Белинского, 85; сл. тел. (831) 432-23-40; e-mail: sarafanov@mts-nn.ru

Сергеев Валерий Викторович – инженер лаб. компьютерного конструирования материалов Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН; 634021, Томск, пр. Академический, 2/4; сл. тел. (3822) 28-69-71; e-mail: svalera@ispms.tsc.ru

Сергеев Даниил Александрович – с.н.с. отделения гидрофизики и гидроакустики отдела нелинейных геофизических процессов Института прикладной физики РАН; к.ф.-м.н.; 603950, Н. Новгород, ул. Ульянова, 46; сл. тел. (831) 416-47-58; e-mail: daniil@hydro.appl.sci-nnov.ru

Синев Александр Николаевич – асс. каф. теоретической механики Московского физико-технического института; 141700, Московская обл., Долгопрудный, Институтский пер., 9; сл. тел. (495) 408-78-66; e-mail: Alex.Sinev@gmail.com

Скачков Андрей Павлович – ст. преп. каф. механики сплошных сред и вычислительных технологий Пермского госуниверситета; 614990, Пермь, ул. Букирева, 15; сл. тел. (342) 2-396-375; e-mail: skachkov@psu.ru

Славашевич Ирина Леонидовна – асп. каф. био- и наномеханики Белорусского госуниверситета; 220030, Беларусь, Минск, пр. Независимости, 4; сл. тел. (017) 209-53-45; e-mail: slavashevichi@yandex.ru

Смирнов Сергей Витальевич – зам. директора Института машиноведения Уральского отделения РАН; д.т.н.; с.н.с.; 62049, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34; сл. тел. (343) 374-40-76; e-mail: svs@imach.uran.ru

Смирнова Евгения Олеговна – м.н.с. лаб. микромеханики материалов Института машиноведения Уральского отделения РАН; 620219, Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34; сл. тел. (343) 375-35-74; e-mail: evgeniya@imach.uran.ru

Смолин Алексей Юрьевич – с.н.с. Института физики прочности и материаловедения Сибирского отделения РАН; д.ф.-м.н.; доц.; 634021, Томск, просп. Академический, 2/4; сл. тел. (382) 228-69-75; e-mail: asmolin@ispms.tsc.ru

Старченко Александр Васильевич – зав. каф. вычислительной математики и компьютерного моделирования Томского госуниверситета; д.ф.-м.н.; проф.; 634050, Томск, пр. Ленина, 36, корп. 2; сл. тел. (3822) 52-97-40; e-mail: starch@math.tsu.ru

Тирский Григорий Александрович – зав. лаб. НИИ механики МГУ; д.ф.-м.н.; проф.; 119192, Москва, Мичуринский просп., 1; сл. тел. (495) 939-38-66; e-mail: tirskiy@imec.msu.ru

Товбин Юрий Константинович – зав. лаб. Научно-исследовательского физико-химического института; д.ф.-м.н.; проф.; 105064, Москва, пер. Обуха, 3-1/12, стр. 6; сл. тел. (495) 917-89-82; e-mail: tovbin@cc.nifhi.ac.ru

Товстик Татьяна Петровна – с.н.с. лаб. мехатроники Института проблем машиноведения РАН; к.ф.-м.н.; 199178, Санкт-Петербург, В.О., Большой пр., 61; сл. тел. (812) 321-47-77, 321-47-72; e-mail: tovstik_t@mail.ru

Траченко Андрей Вадимович – студ. МГУ; 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы; e-mail: andrew@trachenko.com

Уткин Андрей Вячеславович – с.н.с. Института теоретической и прикладной механики Сибирского отделения РАН; к.ф.-м.н.; 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1; сл. тел. (383) 330-38-04; e-mail: utkin@itam.nsc.ru

Ференцзи Майкл Алан – Имперский колледж Лондонского университета, отдел молекулярной медицины; Лондон SW7 2AZ Великобритания; e-mail: m.ferenczi@imperial.ac.uk

Филиппов Роман Александрович – м.н.с. отдела математических методов механики материалов и структур Института проблем машиноведения РАН; 199178, Санкт-Петербург, ВО, Большой просп., 61; сл. тел. (812) 321-47-78; e-mail: rmnfilippov@gmail.com

Фомин Василий Михайлович – зам. председателя Сибирского отделения РАН, директор Института теоретической и прикладной механики Сибирского отделения РАН; д.ф.-м.н.; проф.; академик РАН; 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1; сл. тел. (383) 330-85-34; e-mail: fomin@itam.nsc.ru

Холмогорова Наталья Владимировна – доц. каф. анатомии и физиологии человека и животных Московского госуд. педагогического университета, зав. лаб. психологических и нейробиологических проблем адаптации в образовании Московского городского психолого-педагогического университета; к.б.н; доц.; 119992, Москва, Ленинские горы, МГУ; сл. тел. (495) 939-33-83, (499) 259-79-81; e-mail: pkruch60@yandex.ru

Цатурян Андрей Кимович – в.н.с. лаб. биомеханики НИИ механики МГУ; 119192, Москва, Мичуринский просп, 1; сл. тел. (495) 939-12-52; e-mail: tsat@imec.msu.ru

Цибульский Владимир Романович – гл.н.с. Института проблем освоения Севера Сибирского отделения РАН, проф. каф. автоматизации и вычислительной техники ТюмГНГУ; д.т.н.; проф.; 625003, Тюмень, а/я 2774; сл. тел. (3452) 28-06-78; e-mail: tsibulsky@ipdn.ru

Цыденов Баир Олегович – асп. каф. вычислительной математики и компьютерного моделирования Томского госуниверситета; 634050, Томск. пр. Ленина, 36, корп. 2; сл. тел. (3822) 52-97-40; e-mail: ba1r@sibmail.com

Чалов Сергей Владимирович – зав. лаб. физической газовой динамики Института проблем механики РАН; д.ф.-м.н.; 119526, Москва, пр. Вернадского, 101, корп. 1; сл. тел. (495) 434-41-89; e-mail: chalov@ipmnet.ru

Ченцов Александр Викторович – н.с. лаб. механики прочности и разрушения материалов и конструкций Института проблем механики РАН; к.ф.-м.н.; 119526, Москва, просп. Вернадского, 101-1; сл. тел. (495) 434-35-27; e-mail: chentsov@ipmnet.ru

Шарипова Лия Львовна – с.н.с. лаб. математических методов механики материалов Института проблем машиноведения РАН; к.ф.-м.н.; 199178, Санкт-Петербург, ВО, Большой просп., 61; сл. тел. (812) 321-47-80; e-mail: sleah@yandex.ru

Шворина Елена Николаевна – м.н.с. НИИ механики МГУ; 119192, Москва, Мичуринский просп, 1; сл. тел. (495) 939-12-52; e-mail: helena.shvorina@gmail.com

Шепеленко Владимир Николаевич – н.с. Института теоретической и прикладной механики Сибирского отделения РАН; к.ф.-м.н.; 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1; сл. тел. (383) 330-85-28; e-mail: shep@itam.nsc.ru

Шимкус Яунюс Константинович – н.с. лаб. акустической микроскопии Института биохимической физики РАН; 119334, Москва, ул. Косыгина, 4; сл. тел. (499) 939-74-92; e-mail: konon@sky.chph.ras.ru

Шлыков Владимир Юрьевич – с.н.с. лаб. нейробиологии моторного контроля Института проблем передачи информации РАН, с.н.с. лаб. психологических и нейробиологических проблем адаптации в образовании Московского городского психолого-педагогического университета; к.б.н.; 119992, Москва, Ленинские горы, МГУ; сл. тел. (495) 939-33-83, (499) 259-79-81; e-mail: pkruch60@yandex.ru

Шмерлин Борис Яковлевич – в.н.с. Научно-производственного объединения «Тайфун» Института экспериментальной метеорологии; к.ф.-м.н.; с.н.с.; 249038, Обнинск, Калужская обл., ул. Победы, 4; сл. тел. (48439) 7-19-13; e-mail: shmerlin@typhoon.obninsk.ru

Шмерлин Михаил Борисович – программист Геофизической службы РАН; 249035, Обнинск, Калужская обл., пр. Ленина, 189; сл. тел. (48439) 3-24-21; e-mail: shmerlin@gsras.ru

Шоев Георгий Валерьевич – асп. лаб. вычислительной аэродинамики Института теоретической и прикладной механики СО РАН; 630090, Новосибирск, ул. Институтская, 4/1; сл. тел. (383) 330-81-63; e-mail: shoev@itam.nsc.ru

Штейн Александр Александрович – в.н.с. НИИ механики МГУ; к.ф.-м.н.; 119192, Москва, Мичуринский пр., 1; сл. тел. (495) 939-25-55; e-mail: stein@imec.msu.ru

Щучкина Ольга Александровна – инженер отдела биомеханики Образовательно-научного института наноструктур и биосистем Саратовского госуниверситета; 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83; сл. тел. (845-2) 21-07-55; e-mail: lelik19s@rambler.ru

Эпов Михаил Иванович – директор Института нефтегазовой геологии и геофизики Сибирского отделения РАН; д.т.н.; проф.; академик РАН; 630090, Новосибирск, просп. Коптюга, 3; сл. тел. (383) 333-32-90; e-mail: EpovMI@ipgg.nsc.ru

Якунчиков Артем Николаевич – асс. лаб. многомасштабного моделирования МГУ; к.ф.-м.н.; 119992, Москва, Ленинские горы; сл. тел. (495) 939-37-54; e-mail: art-ya@mail.ru

Якушев Владимир Лаврентьевич – директор Института автоматизации проектирования РАН; д.ф.-м.н.; проф.; 123056, Москва, 2-я Брестская ул., 19/18; сл. тел. (499) 250-08-92; e-mail: yakushev@icad.org.ru

**ВЕСТНИК
НИЖЕГОРОДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО**

№ 4

Часть 2

2011

Главный редактор **Р.Г. Стронгин**

Редакция:
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23, редакция «Вестника ННГУ»
тел.: (831) 465-41-61, 462-32-29
vestnik@unn.ru

Формат 70×108 1/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс»
Уч.-изд. л. 79,7. Усл. печ. л. 69,2. Тираж 400 экз. Заказ № .

Издательство Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского.
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Отпечатано в РИУ ННГУ им. Н.И. Лобачевского
603000, г. Нижний Новгород, ул. Б. Покровская, 37